高等学校国家级特色专业
解 析 几 何 教 材

大学本科小学教育专业教材

解析几何

JIEXI JIHE

王智秋 主编

人民教育出版社

解析几何

大学本科小学教育专业教材

解析几何

王智秋　主编
王汇淳　副主编

人民教育出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

解析几何/王智秋主编．—北京：人民教育出版社，2007.10

大学本科小学教育专业教材

ISBN 978－7－107－20648－1

Ⅰ．解…

Ⅱ．王…

Ⅲ．解析几何－高等学校－教材

Ⅳ．0182

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 049628 号

人民教育出版社 出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

中青印刷厂印装　全国新华书店经销

2008 年 5 月第 1 版　2008 年 5 月第 1 次印刷

开本：890 毫米×1 240 毫米　1/32　印张：4.5

字数：110 千字　印数：0 001～3 000 册

ISBN 978－7－107－20648－1 / G·13738　定价：7.60 元

大学本科小学教育专业教材编写委员会

顾　　问　顾明远　吴履平　马　立

主任委员　刘新成　马云鹏　殷忠民

副主任委员（以汉语拼音字母为序）

康学伟　李全顺　刘国权　刘立德

王万良　王智秋　杨宝忠

委　　员（以汉语拼音字母为序）

黄海旺　金祥林　康学伟　李全顺

刘国权　刘克勤　刘立德　刘新成

马云鹏　曲铁华　唐京伟　王保才

王万良　王智秋　杨宝忠　叶宝生

殷忠民　张启庸　赵宏义

秘 书 长　王智秋

秘　　书　叶宝生

本书编写人员

主　　编　王智秋

副 主 编　王汇淳

撰　　稿（以汉语拼音字母为序）

郭焕玲　刘　莹　王汇淳　王智秋

特约审稿　田载今

大学本科小学教育专业教材编审委员会

大学本科小学教育专业教材

总　序

为了适应社会主义现代化建设和人民群众对教育需求不断增长的新形势，经国家教育部批准，全国各地相继成立了以培养大学本科学历小学教师为主要任务的初等教育学院（系），大学本科小学教育专业应运而生．该专业的设立是我国初等教育改革和发展的需要，是提高我国小学教师素质的重要举措，也是我国师范教育改革和发展的必然趋势．

《中共中央国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》指出：建设高质量的教师队伍是全面推进素质教育的基本保障．目前，培养小学教师的现行课程、教材和教法，已不能完全满足全面推进素质教育的客观要求，受到了前所未有的挑战．新的课程教材建设势在必行．鉴于此，教育部师范教育司组织有关高等学校成立了“面向21世纪培养本科程度小学师资专业建设研究”的全国性总课题组，制订了大学本科小学教育专业培养目标和课程方案，在此基础上形成了“全国小学教育专业建设协作会”，对该专业课程教材建设进行了深入研究．

为了加强对教材编写工作的管理，教育部师范司、教育部课程教材研究所及有关高师院校的领导和专家组成了“大学本科小学教育专业教材编写委员会”．中国教育学会会长顾明远、教育部课程教材研究所原所长吴履平、教育部师范司司长马立为编写委员会顾问，首都师范大学副校长刘新成等为编写委员会主任委员．编写委员会聘

请具有丰富教学经验和较高学术水平的学科带头人分别担任各科教材主编，并聘请知名专家审核编写大纲和初稿．为了加强对这套教材编审工作的领导、协调和统筹，人民教育出版社还成立了“大学本科小学教育专业教材编审委员会”．

本套教材的编写以“教育要面向现代化，面向世界，面向未来”为指针，以党和国家的教育方针以及大学本科小学教育专业培养目标为依据，以思想性、科学性、时代性和师范性为原则，致力于培养未来小学教师的创新精神和实践能力，全面体现“大学本科程度”和“面向小学教育”的要求，力求建立合理的教材结构，以满足21世纪对新型小学教师素质结构的需要．

本套教材是从大多数地区的情况出发而编写的全国通用教材，主要供培养本科层次小学教师的高等院校使用，也可供培养专科层次小学教师的院校使用，还可供广大在职小学教师进修或自学使用．这套教材由人民教育出版社于新世纪第一年开始陆续推出．

本套教材的编写出版得到了教育部师范教育司、高等教育司、社会科学研究与思想政治工作司、课程教材研究所、人民教育出版社，以及部分省市教委（教育厅）和有关高等院校的领导和同志们的大力支持，谨在此一并致谢．

编写出版大学本科小学教育专业系列教材，是我们贯彻国家教育部师范教育课程教材改革精神、全面落实《面向21世纪教育振兴行动计划》的初步尝试，如有不当之处，敬请广大师生不吝指正，以使本套教材日臻完善．

大学本科小学教育专业教材编写委员会

2000年12月

本书前言

《解析几何》是为大学本科小学教育专业“空间解析几何”课程编写的教材．我国小学教育本科专业是20世纪末才兴起的一个比较年轻的专业．与传统的数学专业相比，小学教育专业“空间解析几何”课程的要求既有共性又有其特殊性．本教材可作为小学教育专业数学方向或理科方向“空间解析几何”课程的必修课教材，亦可作为该专业其他方向的选修课程教材．

按照教师专业化水平的要求及基础教育发展的需要，本科层次小学教师应具有较高的数学素养．未来小学教师应通过在大学中对高等数学各主要领域的学习，提高自身的数学素养和逻辑思维能力．空间解析几何课程，以学生已有的平面解析几何知识为基础，运用向量代数的方法，将二维空间中的诸多理论拓展到三维空间．不仅如此，它还是数学一系列后继课程如数学分析、高等代数以及应用数学等课程学习的基础并为某些学科提供相应的几何背景．本课程还对初等数学的教学具有指导作用．

本教材的主要特点如下．第一，二维与三维相互衔接．在第一章中，本书介绍了一次方程和二次方程表示的平面图形，这些都是学生在高中学过的直线和二次曲线，在此基础上，通过坐标变换将二次曲线给予分类．学生通过本课学习，可以运用类似的方法，思考二次曲面的分类．第二，突出重点，删繁就简．根据小学教育专业的特点，本书选取了解析几何中最重要的内容，在确保理论完整性的前提下，精简内容并且注意到承上启下，有利于学生的理解和掌握．第三，强调解决问题的思想与方法．第一章引论介绍笛卡儿用方程表示曲线的概念．第二章完整地介绍了向量的概念及其运算，特别给出了向量代数在初等几何中应用的实例．这些理论对后继课的学习都是非常有用的．第三章用向量代数作为工具和桥梁，

建立了平面和空间直线的方程，并进一步用代数的方法研究了平面和空间直线之间的其他问题. 第四章先是从曲面的几何特性出发推导其方程，后是从方程出发讨论曲面的几何性质等. 从第四章中读者还可体会“曲线按一定规律运动生成曲面”的思想.

教学建议：一般安排54学时，若安排36学时，则可将第一章引论部分作为自学内容.

本书由王智秋任主编，王汇淳任副主编. 刘莹、郭焕玲编写了相应的章节. 其中，第一章由王汇淳编写，第二章由刘莹编写，第三章由郭焕玲编写，第四章由王智秋编写.

在此特别感谢首都师范大学数学系刘增贤教授和侯忠义副教授在本书编写过程中给予的关怀与指导. 我们还要以无比崇敬的心情感谢已故的王汇淳老师，他对全书的内容设计提出了很有建树的观点，并在病中完成了第一章的初稿. 最后，衷心感谢李晓璐、张爱静两位研究生，她们对本书进行了多次核对工作.

编写大学本科小学教育专业的《解析几何》教材还是一次尝试，能否满足该专业人才培养的需求尚需要经过实践的检验. 希望各位老师、同学及广大读者对本书提出宝贵意见.

编　者

2008年4月

目　录

第一章　引　　论

§1　《解析几何》的产生

17 世纪以前，数学学科已经有了辉煌的发展，尤其是在几何学方面，不但具有完整的体系，更有广泛丰富的理论与实践. 但是就其研究内容与方法而言，还是属于常量数学的领域，至少就总体而论，是在形式逻辑的范围内活动的.

17 世纪的欧洲已过渡到新的资本主义生产方式，为适应生产力的发展，一系列的学科需要加以改造. 比如，作为圆锥截线的椭圆和抛物线，它们的几何性质早在古希腊时代已经知道得很详细了，然而它们只是被当做一些静态的几何对象，人们主要用逻辑的手段推证这些图形的性质. 但是在天文学的发展中，当开普勒(Johann Kepler，1571—1630) 发现行星沿着椭圆轨道绕着太阳运动后，就必须采用新的方法计算这些椭圆. 在力学方面，当伽利略(Galile，1564—1642) 发现抛出去的石子沿着抛物线的轨道飞出去时，就有计算炮弹的轨道的需求. 总之，科学的发展要求用运动变化的新观点去改造旧观念，建立新方法. 于是变数进入了数学. 这样便出现了数学史上极为稀有的情景：在一二十年内出现了三个全新的数学分支——解析几何、微分学和积分学. 这三门学科的出现，本质上改变了整个数学的面貌. 17 世纪之初，许多优秀的数学家已经接近了解析几何的观念，但是只有两位数学家特别清楚地认识到创立新的数学分支的可能性. 其中一位是皮埃尔・费尔马

(P. S Fermat，1601－1665)，他是法国最卓越的数学家之一. 另一位是著名的法国哲学家惹耐・笛卡儿（Descarles，1596－1650），他的一部长篇哲学论著奠定了解析几何的基础.

§2 笛卡儿的两个基本观念

笛卡儿的理论以下面两个观念为基础：坐标观念和用方程表示曲线的观念.

1. 坐标观念

所谓平面上点的坐标，是这样的一对数（x，y），它们是这点到两条取定的互相垂直的有向直线（坐标轴）的有向距离. 坐标轴的交点称为坐标原点，它有坐标（0，0）. 符合上述条件的两条有向直线构成的图形称为平面上的笛卡儿（直角）坐标系，记作 $O—xy$或 $[O;\ x,\ y]$.

笛卡儿坐标的引入就把平面上的点与有序数对（x，y）构成了一一对应，促成了平面的所谓"算术化". 如欲指出平面上某点，给出它的坐标就够了. 而对于任意一对数，都有平面上的一个点反映它的存在和它在平面上的相对位置.

2. 用方程表示曲线的观念

在笛卡儿以前，对于带有两个未知数的方程 $F(x,y)=0$，人们只知道它的解是不定的，从这个方程无法决定这两个未知数的值. 例如给 x 某一个值 x_0，将其代入方程，就可以得到一个带有一个未知数 y 的方程，从这个方程一般说来可以解出 y，得 $y=y_0$. 这时数对（x_0，y_0）就满足方程 $F(x,y)=0$. 但是，由于 x_0 是任意给定的，所以这种"不定的"方程便没有被认为是值得关心的. 但是笛卡儿设想，若带有两个未知数的方程中的 x 是平面上点的横坐标，与 x 对应的 y 是该点的纵坐标，于是，让 x 连续地改变，则对于每一个 x 都可以从方程中算出确定的 y，因此，一般地说也

就得到了组成一条曲线的点的集合. 这样，一个带有两个未知数的一个代数方程 $F(x,y)=0$，就对应平面上一条完全确定的曲线，那就是平面上所有坐标满足这个方程的点所构成的曲线. 相反地，在已知平面上某曲线上点的几何特征的情况下，就可以建立这条曲线的方程. 至此，便把平面图形与代数方程联系起来，它们之间过渡的桥梁和联系的纽带便是平面上的笛卡儿坐标系. 以这种联系为出发点便开创了一门新的数学学科.

平面解析几何的一般方法是以带有两个变数的方程来表示曲线，再根据方程的代数性质来研究相应曲线的几何性质. 反过来：根据给定曲线的几何条件，找出它的方程，然后再根据方程的代数性质，研究这条曲线的几何性质. 在空间解析几何中，方程与曲线或曲面也有类似的关系. 所以，解析几何是用代数的方法研究几何问题. 当然，用图形这个几何直观去解释代数理论也有不可小视的优越性.

§3 二元一次方程所表示的图形

1. 二元一次方程的图形

二元一次方程的一般形式为

$$Ax+By+C=0. \text{（}A,\ B,\ C\text{ 为常数；}$$
$$A,\ B\text{ 不全为 }0\text{，即 }A^2+B^2\neq 0\text{）} \tag{1.1}$$

（1）若 $B\neq 0$，$C=0$，则方程化为

$$y=-\frac{A}{B}x,$$

它的图形是过坐标原点 $O(0,0)$ 的一条直线，其斜率

$$k=\tan\alpha=-\frac{A}{B}.$$

（2）若 $B\neq 0$，$C\neq 0$，则方程化为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

它的图形是由直线 $y=-\frac{A}{B}x$ 上各点沿 y 轴方向移动 $-\frac{C}{B}$ 所构成的点的全体，它也是一条直线.

(3) 若 $B=0$，则方程化为

$$Ax=-C \text{ 或 } x=-\frac{C}{A},$$

它表示平行于 y 轴的直线. 当 $C=0$ 时，它表示 y 轴.

(4) 若 $A=0$，则方程化为

$$By=-C \text{ 或 } y=-\frac{C}{B},$$

它表示平行于 x 轴的直线. 当 $C=0$ 时，它表示 x 轴.

反之，对于在笛卡儿坐标系 $O-xy$ 中任一条直线均可以表示成二元一次方程 $Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$ 的形式，于是，方程 $Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$ 与直线 l 具有一一对应的关系.

2. 两条直线的夹角

设给出两条直线 l_1 和 l_2，它们的方程分别为

$$l_1：A_1x+B_1y+C_1=0;$$
$$l_2：A_2x+B_2y+C_2=0.$$

如图 1.1 所示，若令 φ 为 l_1 逆时针旋转到 l_2 所成的角（$0\leqslant\varphi<\pi$），则

$$k_1=-\frac{A_1}{B_1}=\tan\alpha_1;$$

$$k_2=-\frac{A_2}{B_2}=\tan\alpha_2.$$

$$\tan\varphi=\tan(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_1\cdot\tan\alpha_2}$$
$$=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \tag{1.2}$$

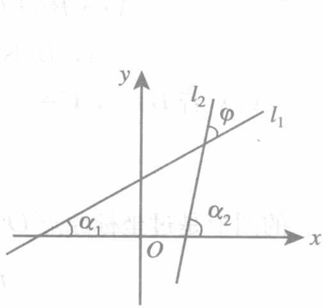

图 1.1

进一步，（1.2）式可以用直线方程的系数表示为

$$\tan\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}. \tag{1.3}$$

3. 直线与一次不等式

一条直线把平面上的点分成三部分：

（1）直线上的点 P，其坐标（x，y）满足这条直线的方程

$$Ax+By+C=0.$$

（2）平面上这条直线的某一侧的点 Q，其坐标（x，y）满足不等式

$$Ax+By+C>0.$$

（3）平面上这条直线的另一侧的点 R，其坐标（x，y）满足不等式

$$Ax+By+C<0.$$

怎样识别直线两侧的点的坐标所满足的不等式呢？不妨采用下述步骤：

设直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0$.

（1）当 $C\neq0$ 时，直线 l 不通过坐标原点.

当 $C>0$，直线在原点一侧的点，其坐标满足不等式 $Ax+By+C>0$. 另一侧点，其坐标满足不等式 $Ax+By+C<0$.

（2）当 $C=0$ 时，直线过坐标原点. 在直线的某一侧选一点（x_0，y_0），将其坐标代入直线方程的左端，得数值 Ax_0+By_0，则与点（x_0，y_0）居于该直线同侧的任一点（x_1，y_1）都使得 Ax_1+By_1 与 Ax_0+By_0 同号. 即若 $Ax_0+By_0>0$ 则与（x_0，y_0）同侧的点，其坐标满足不等式

$$Ax+By>0,$$

另一侧的点，其坐标满足不等式

$$Ax+By<0.$$

以上的讨论，从另一个角度来说，它给出了一个二元一次不等