Jianzhu Jiegou Youxianyuan Fenxi
Ji ANSYS Fanli Xiangjie

建筑结构有限元分析及ANSYS范例详解

石少卿 汪敏 刘颖芳 杨鑫 杨永雄 编著

中国建筑工业出版社

建筑结构有限元分析及 ANSYS 范例详解

石少卿　汪敏　刘颖芳　杨鑫　杨永雄　编著

中国建筑工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

建筑结构有限元分析及 ANSYS 范例详解/石少卿等编著. —北京：中国建筑工业出版社，2008
ISBN 978-7-112-10214-3

Ⅰ. 建… Ⅱ. 石… Ⅲ. 建筑结构-有限元分析-应用程序，ANSYS Ⅳ. TU3-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 103149 号

责任编辑：刘婷婷
责任设计：郑秋菊
责任校对：兰曼利　王雪竹

建筑结构有限元分析及 ANSYS 范例详解
石少卿　汪敏　刘颖芳　杨鑫　杨永雄　编著
*
中国建筑工业出版社出版、发行（北京西郊百万庄）
各地新华书店、建筑书店经销
霸州市顺浩图文科技发展有限公司制版
北京市兴顺印刷厂印刷
*
开本：787×1092 毫米　1/16　印张：16¾　字数：412 千字
2008 年 10 月第一版　　2008 年 10 月第一次印刷
印数：1—3000 册　　定价：**39.00** 元
ISBN 978-7-112-10214-3
（17017）

内容提要

本书主要介绍了建筑结构有限元法的基本理论与应用 ANSYS 软件进行分析求解的基本方法。针对连续梁、桁架、刚架、弹性力学平面问题和结构动力学问题给出了有限元理论分析的思路、方法，以及 ANSYS 数值分析实例。对于每一个数值分析实例，均按照图形用户界面和命令流两种方式进行了详细讲解。

本书可作为有限元法的入门教材，简明易学，对帮助读者理解有限元的基本思想以及求解的基本方法，提升对建筑结构求解分析的能力都有很大的帮助。同时，本书还可以帮助读者学习和熟练掌握 ANSYS 软件的使用，为读者应用 ANSYS 软件进行建筑结构分析打下基础。编写时精选内容，简化公式推导，理论联系实际，注重工程应用；叙述深入浅出，图文配合紧密。

本书可作为高等院校相关专业的本科生、研究生及教师学习有限元和 ANSYS 软件的教材，也可以供从事建筑结构分析和设计的其他人员参考。

目 录

第一章 有限元法概述 …… 1
第一节 有限元法的发展概况 …… 1
第二节 有限元法解题的基本过程 …… 2
第三节 有限元法应用举例 …… 7
第四节 有限元法优缺点简述 …… 10

第二章 ANSYS 的基本知识 …… 12
第一节 ANSYS 软件的简介 …… 12
第二节 ANSYS8.0 的安装与启动 …… 17
第三节 ANSYS 操作的基本过程 …… 25

第三章 连续梁的有限元分析及 ANSYS 范例详解 …… 26
第一节 连续梁的有限元法分析 …… 26
第二节 ANSYS 求解连续梁的单元简介 …… 34
第三节 连续梁的 ANSYS 范例详解 …… 36

第四章 桁架的有限元分析及 ANSYS 范例详解 …… 51
第一节 平面桁架的有限元分析 …… 51
第二节 ANSYS 求解平面桁架的单元简介 …… 68
第三节 平面桁架的 ANSYS 范例详解 …… 70
第四节 空间桁架有限元分析简介 …… 86
第五节 ANSYS 求解空间桁架的单元简介 …… 94
第六节 空间桁架的 ANSYS 范例详解 …… 96

第五章 刚架的有限元分析及 ANSYS 范例详解 …… 112
第一节 平面刚架的有限元分析 …… 112
第二节 平面刚架的 ANSYS 范例详解（一） …… 131
第三节 平面刚架的 ANSYS 范例详解（二） …… 146

第四节　空间刚架的有限元简介 …… 165
第五节　ANSYS 求解空间刚架的单元简介 …… 167
第六节　空间刚架的 ANSYS 范例详解 …… 170

第六章　弹性力学平面问题的有限元法及 ANSYS 范例详解 …… 186
第一节　平面应力问题与平面应变问题 …… 186
第二节　弹性力学平面问题的基本方程 …… 188
第三节　弹性力学平面问题的离散化 …… 191
第四节　单元分析 …… 192
第五节　整体刚度矩阵的集成 …… 198
第六节　等效节点荷载 …… 202
第七节　平面应力问题有限元分析范例 …… 203
第八节　ANSYS 软件分析平面问题时的单元简介 …… 206
第九节　平面问题的 ANSYS 范例详解 …… 209

第七章　结构动力问题的有限元法简介及 ANSYS 范例详解 …… 221
第一节　结构的离散化和基本未知量的选取 …… 221
第二节　单元特性分析 …… 222
第三节　结构动力问题有限元法理论分析示例 …… 232
第四节　结构动力问题的 ANSYS 范例详解 …… 237

参考文献 …… 259

第一章

有限元法概述

第一节　有限元法的发展概况

在实际工程中，有许多问题用经典理论的解析法去求解，不是困难重重就是无法获解，而有限元法正是解决工程实际问题的一种有力的数值计算工具，它是一种将弹性理论、计算数学和计算机软件有机结合在一起的一种数值分析方法；由于这一方法具有灵活、快速和高效等特点，使其迅速发展成为求解各领域数理方程的一种通用的近似计算方法。目前，它在许多领域和实际工程问题中都得到广泛的应用。

在计算机没有问世之前，传统的结构分析是建立在手算的基础之上。由于受到计算手段的限制，计算对象只能局限于一些小型问题。以刚架计算为例，用位移法解题时，节点位移的个数一般不宜超过五个。20 世纪 30 年代出现力矩分配法以后，未知数的个数可以多一些，但最多也以一二十个为限。计算机的出现，在力学学科领域内引起了变革，为解决大型复杂的力学问题提供了一种有效的工具。与手算相比，电算不怕繁、就怕乱，它追求的是系统化的计算程序，为适应电算的特点，人们开始采用矩阵的方法来进行结构分析。20 世纪 50 年代，随着喷气飞机逐步取代螺旋桨飞机，飞机的结构愈加复杂，这对航空设计部门提出了更高的要求。以美国波音公司的 M. J. Turner、英国伦敦大学的 J. H. Argyris 为代表，提出了结构矩阵分析方法。结构矩阵分析是结构力学的一种分析方法，它认为：整体结构可以看作是由有限个小单元相互连接而组成的集合体，每个单元的力学特性可以比作建筑物中的砖瓦，装配在一起就能提供整体结构的力学特性。1960 年美国加州大学伯克利分校的 R. W. Clough 在总结前人工作的基础上，首先正式使用“有限单元”（Finite Element）这一术语，并用有限元的思想求解了平面弹性问题。从此，不但工程技术人员开始认识有限元法的功效，数学

家和力学家也看到了有限元法的巨大前景，相继从理论上对有限元法进行了深入的探讨，使有限元法建立在更为坚实的理论基础之上。在工程技术人员和理论工作者的共同努力下，有限元法成为解决各种力学问题的最有效的方法之一。20 世纪 70 年代，在英国科学家 O. C. Zienkiewicz 等人的努力下，将有限元法的应用推广到了热传导、电磁场、流体力学等领域。在国内，20 世纪 60 年代中科院计算所的冯康教授独立推导了有限元计算的数学过程，在大批学者的共同努力下，使有限元法在中国工程界开始大规模应用。

有限元法的出现是力学界和工程界的一件大事。有限元法开辟了解决大型复杂工程问题的新天地，使过去不敢碰的一些计算难题变成常规问题，计算的未知数可以达到成千上万个，并且计算精度高、计算速度快。例如桁架结构，过去结构力学的方法只能求解比较简单、杆件数目比较少的结构。有了有限元以后，可以求解杆件数目成千上万的大型桁架中各个杆件的受力及变形。如大型体育场馆的屋顶或雨篷现在多采用空间立体网架，它在风、重力等荷载的作用下各杆件受多大力、有多大变形、是否安全，都可以用有限元的方法求出。对于连续系统，工程中能得到精确解的问题很少，只有在非常简单的情况下才是可能的，对于这类问题只有通过有限元进行数值分析。基本过程就是将连续系统离散化，使连续系统变成离散系统，这种离散当然都带有近似性，但是，当离散变量的数目增加时，它可以逼近真实的连续解。总之，目前，有限元法已成为工程设计中不可或缺的一种重要方法，应用范围已从航空航天扩展到土木、机械、交通、水利等几乎所有的工业部门。有限元法的研究对象已从静力分析、线性问题扩展到动力分析、非线性问题；从弹性问题扩展到弹塑性、黏弹性问题和断裂问题；从固体力学扩展到流体力学；从工程力学扩展到生物力学。同时，有限元法本身在理论上也日趋完善，包括各种类型单元的建立，有限元法的数学基础，以及各种大型通用结构分析程序的编制等。

第二节　有限元法解题的基本过程

一、结构的离散化

把结构物划分为多个单元的步骤称为将物体或结构物离散化。即，将拟分析的结构假想地分割成为有限个分区或分部。在有限元中，这些分区或分部称为单元。用所有单元集合体表示原来的物体，由此方便地

建立起单元内力学量与未知量的关系式，集合成结构分析方程。

例如可将杆系结构分割成为许多杆件，如图 1-1 中的①，②等，集合所有的杆件仍旧是原来的结构物。杆件①，②等称为单元。由于这种单元是一根细杆，横截面尺寸很小，只沿轴线方向有一个度量尺寸，于是可称之为一维单元。图 1-1 中的桁架结构可分割成 27 根杆件单元。

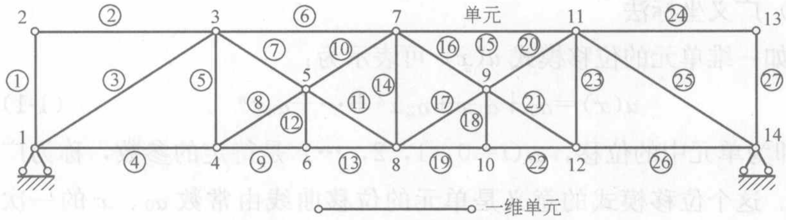
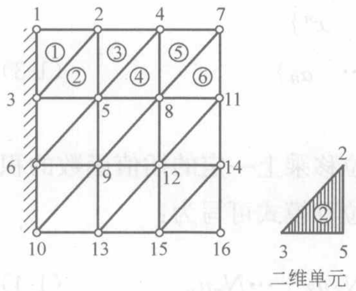


图 1-1　一维单元示意图

图 1-2 中的正方形板体可被分割成为 18 个小三角形平板，如 1-2-3，2-4-5 等。这些小三角形也称为单元，它们块体很薄，中面是有两个度量尺寸的平面，这种单元可称为二维单元。二维单元也可以是矩形、梯形、四边形或其他形状。

图 1-3 表示了一个实体结构，可分成 34 个长方体，由于长方体具有三个度量尺寸，于是可称之为三维单元。三维单元可以是一个四面体、六面体或其他形状的立体。



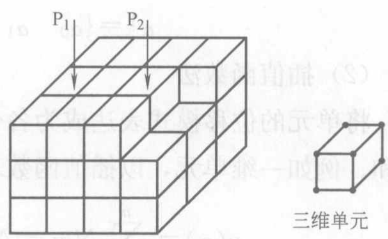


图 1-2　二维单元示意图

图 1-3　三维单元示意图

因此，在有限元法中分析的已不是原有的物体或结构物，而是一个由许多单元以一定方式连接成的与原物体形状接近的离散的结构。有限元法分析中所获得的物体或结构物的应力变形等结果只是近似的，但当物体或结构物被正确地划分为足够多的单元时，则所获得的解也就非常逼近真实的解。

二、单元特性分析

单元特性分析的主要工作是确定单元刚度矩阵。要确定单元刚度矩阵，首先就要进行位移模式或位移函数的确定。

1. 位移模式或位移函数的确定

物体或结构物离散化之后，每个单元中的一些物理量，如位移、应变等在单元中的变化可采用一些能逼近原函数的近似函数予以描述。在有限元位移法中就以一定的函数去表示单元内的位移或位移场。这些函数称为位移模式或位移函数。在建立单元的位移模式方面，常用的有两种方法：一是广义坐标法；二是插值函数法。

(1) 广义坐标法

例如一维单元的位移模式 $u(x)$ 可表示为：

$$u(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots+\alpha_n x^n \tag{1-1}$$

$u(x)$ 即为单元中的位移，$\alpha_i(i=0, 1, 2, \cdots)$ 是待定的参数，称为广义坐标。这个位移模式的意义是单元的位移曲线由常数 α_0、x 的一次式、x 的二次式、x 的三次式等组成，至于曲线幅度大小则由广义坐标 α_i 支配。之所以称 α_i 为广义坐标，是因为 α_i 并不真正地表示单元的节点位移，它们实际上是一些节点位移的组合。至于多项式数 n 则决定于单元的自由度，所谓单元的自由度就是单元所有节点的独立线位移、角位移等的总数。一个单元的自由度是这单元所有节点的自由度的总和。式 (1-1) 也可以表示为：

$$u(x)=\phi\alpha \tag{1-2}$$

式中：

$$\phi=\{1 \quad x \quad x^2 \quad \cdots \quad x^n\}$$

$$\alpha^{\mathrm{T}}=\{\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n\} \tag{1-3}$$

(2) 插值函数法

将单元的位移模式表达成为各个节点位移乘上一定的插值函数的积的和。例如一维单元，以插值函数表示的位移模式可写为：

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n} N_i u_i=N_1 u_1+N_2 u_2+\cdots N_n u_n \tag{1-4}$$

式中，N_i 为插值函数，一般采用拉格朗日多项式作插值函数，或用汉密尔顿多项式作插值函数，也有用面积坐标、体积坐标等形函数作插值函数。

以上两种建立单元位移模式的方法，以前者使用广泛，但后者优点较多。例如用广义坐标法建立位移模式时，求广义坐标 $\{\alpha_i\}$ 的计算过程中须计算一些矩阵的逆阵，如果矩阵是奇异的则其逆矩阵并不存在，这是它的局限性。另外广义坐标 α_i 的含义不明也是一种缺点。

选择单元的位移模式在有限元法中是比较关键的问题。作为一般的要求，所选择的位移模式必须保证单元内物理量的连续性，单元之间位

移的协调性、完备性以及整个解的收敛性。在广义坐标法中所选位移模式如为多项式，则须保证多项式的对称性。

2. 单元刚度（柔度）矩阵的确定

单元刚度矩阵表达了单元所有节点的节点力与节点位移之间的关系，它取决于单元的材料性质、形状尺寸、节点的数目等。

一根杆件的抗拉刚度是很容易理解的。若有一直杆长为 l、截面面积为 A、弹性模量为 E，把它放在 x 轴上，左端固定右端给予一个轴向拉力 F，使它伸长发生轴向位移 $\Delta=Fl/EA$，则 $F/\Delta=EA/l$ 称为刚度或刚度系数。在有限元法中，刚度指单元某一节点一定方向的单位节点位移引起的节点力；柔度是单元某一节点一定方向的单位节点力引起的节点位移。对于上述直杆，则有：

$$F=k\Delta \quad (k=EA/l) \tag{1-5}$$

式中，k 即为刚度系数，显然柔度为刚度的倒数。

对于二维或三维单元情况，例如在弹性力学平面问题的单元中，三个顶点 i、j、k 即为节点。如以 u 及 v 分别表示 x 及 y 方向的位移，F_X 及 F_Y 分别表示 x 及 y 方向的力，则共有六个节点位移和六个节点力：

$$u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k;\ F_{Xi}, F_{Yi}, F_{Xj}, F_{Yj}, F_{Xk}, F_{Yk} \tag{1-6}$$

它们之间的关系可以表示为：

$$\begin{Bmatrix} F_{Xi} \\ F_{Yi} \\ F_{Xj} \\ F_{Yj} \\ F_{Xk} \\ F_{Yk} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & \text{对称} & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \tag{1-7}$$

或写成为：

$$F=K\Delta \tag{1-8}$$

式中，矩阵 K 称为刚度矩阵，其中 k_{ij}（i，$j=1$，$2\cdots6$）称为刚度系数，F 为节点力矩阵，Δ 为节点位移矩阵。

在有限元位移法中需求单元的刚度矩阵，在有限元力法中需求柔度矩阵，而有限元混合法中两者都须求得。一般可以利用下列方法确定刚度矩阵与柔度矩阵：

（1）直接法——利用结构力学中直接刚度法的概念确定单元的节点力和节点位移的关系，即得到刚度矩阵。这个方法的优点是，物理概念明确、计算简便；缺点是用于复杂问题比较困难。

（2）虚功原理——利用单元的外力及内力虚功总和等于零的条件，得出单元的节点力与节点位移的关系，亦即得到了刚度矩阵或柔度矩阵。

（3）能量法——首先建立起表达单元的势能或余能的泛函式，然后利用变分极值原理求出泛函的极值，于是得到单元的力和变形的关系，即刚度矩阵或柔度矩阵。由各刚度矩阵或柔度矩阵，按照一定的方法，可以建立起结构的总体刚度或柔度矩阵，从而建立结构的总体方程组。

（4）迦辽金法——将假设的场变量的函数称为“试函数”。引入问题的控制方程式及边界条件，利用最小二乘法等方法使误差最小，便得到近似的场变量函数形式。

三、形成结构的总体矩阵，建立结构的总体方程组

所谓结构总体方程组是指能反映整个离散化了的结构上所有节点力与所有节点位移的关系式所形成的方程组。这里节点“力”是广义的，包括力与力矩。节点“位移”也是广义的，包括线位移和角位移。有限元位移法，须将所有单元的刚度系数按一定的位置予以集合迭加成为总刚度矩阵。这种总刚度矩阵即联系着一个结构物上所有的节点力及节点位移的关系。由于各个单元的刚度系数是相对于单元的局部坐标，而各个单元的局部坐标并不统一，所以还须设立总体坐标系，将所有刚度系数都转变成为总体坐标系的量后才能进行迭加组合。值得注意的是在形成总体矩阵的过程中还须引入所给问题的边界条件及荷载情况，并相应地修改方程组。

四、解总体方程组

一般来说所形成的总体方程组，往往数目庞大，可能有几十个，几百个，以至于成千上万。欲解这些联立的代数方程组须运用一定的计算数学方法，解出其中的未知数。如果方程组是线性的，可应用一些标准的解线性方程组的解法；如果是非线性的，则须利用一些解非线性方程组的方法，例如牛顿-拉夫森方法。

五、后处理

按上一步求解得未知量后，还须计算问题中需要计算的量，例如主应力、主应变等。在工程问题中，有限元法广泛地用于解决静荷载作用下固体的应力、变形及位移的问题，用于解决固体力学中诸如振动，动力响应及稳定等问题，可用于解决非线性大变形问题，塑性力学问题，蠕变问题及应力波传播问题等。除此之外，这个方法还可用于解决流体力学问题、热传导问题等。

第三节　有限元法应用举例

下面通过一例题来叙述有限元法的基本求解过程，图 1-4 所示结构是一个变截面结构，已知 AB、BC 段长度均为 8cm，圆截面的直径分别为 4cm 和 2cm，C 点受到一个集中力 P 的作用，求 A、B、C 三截面的内力和位移。

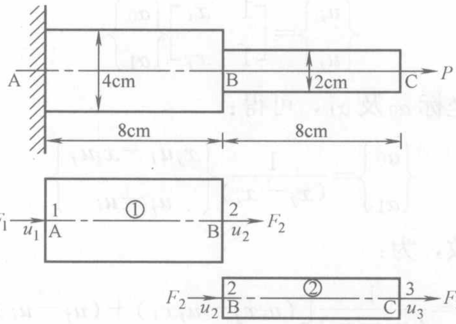


图 1-4　变截面结构及有限元离散单元示意图

根据有限元法的解题步骤，首先是进行离散化。

一、结构的离散化

对于这个结构，可将它分为两个单元，即单元①及单元②（图 1-4 所示）。为叙述方便，节点 A、B、C 分别采用 1、2、3 代替。单元的长度都为 8cm，直径分别为 4cm 及 2cm。两个单元的节点力和节点位移分别用 F_i 和 u_i 表示。

二、单元特性分析

1. 选择位移函数

一个单元的位移模式一方面要能描绘单元节点之间的位移量的变化，另一方面它的广义坐标数目至少要与单元的自由度数目相等。在目前一维单元拉伸问题中，只须假设位移模式为一次多项式，广义坐标为两个，故：杆中任意点沿杆轴的位移可表示为：

$$u(x)=\alpha_0+\alpha_1 x \tag{1-9}$$

其中，广义坐标 α_0 反映了刚性位移，α_1 反映了杆件的变形情况，x 是杆件单元的局部坐标（图 1-5）。考虑到本节主要目的是叙述有限元法解题的基本思路，再加上本题局部坐标系和整体坐标系是一致的，所以暂不区分局部坐标和整体坐标，对符号的约定在后面的章节再作详细说明。

现将杆件单元 ij 放在局部坐标 xoy 的 x 轴上，且形心轴与 x 轴重合。杆件两端的节点位移是 u_i 及 u_j，两端节点力是 F_i 及 F_j。

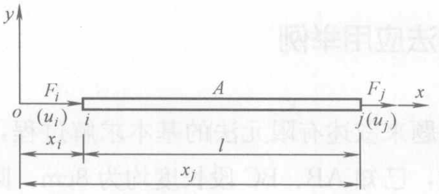


图 1-5　局部坐标上的杆件单元

当 $x=x_i$ 时，$u=u_i$；当 $x=x_j$ 时，$u=u_j$。代入式（1-9），可得：

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} \tag{1-10}$$

从上式解出广义坐标 α_0 及 α_1，可得：

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix}=\frac{1}{(x_j-x_i)}\begin{Bmatrix} x_j u_i-x_i u_j \\ u_j-u_i \end{Bmatrix} \tag{1-11}$$

于是可得位移函数，为：

$$u(x)=\frac{1}{(x_j-x_i)}[(u_i x_j-u_j x_i)+(u_j-u_i)x] \tag{1-12}$$

2. 单元刚度矩阵的确定

确定单元的刚度矩阵，也就是确定一个单元的节点力与节点位移的关系式。根据杆件单元简单拉（或压）时的几何方程及虎克定律可得：

$$\varepsilon_x=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\sigma_x}{E}=\frac{F}{EA} \tag{1-13}$$

式中，ε_x 为杆件轴向拉（压）应变；σ_x 为轴向正应力；F 为轴向拉（压）力；A 为杆的横截面面积；E 为弹性模量。

当 $x=x_i$ 时，$u=u_i$；当 $x=x_j$ 时，$u=u_j$。可得：

$$F_i=\frac{EA}{l}(u_i-u_j) \tag{1-14}$$

利用杆件单元的静力平衡条件：

$$F_i+F_j=0 \tag{1-15}$$

可得：

$$F_j=-\frac{EA}{l}(u_i-u_j) \tag{1-16}$$

写在一起有：

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \tag{1-17}$$

式（1-17）表示了杆件单元节点力 $F^e=\{F_i \quad F_j\}^T$ 及节点位移 $\Delta^e=\{u_i \quad u_j\}^T$ 之间的关系，亦即：

$$K^e \cdot \Delta^e = F^e \tag{1-18}$$

式中：

$$K^e = \begin{bmatrix} EA/l & -EA/l \\ -EA/l & EA/l \end{bmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-19}$$

即为杆件单元受轴向拉（压）力的刚度矩阵。

对单元①及②分别应用式（1-19），同时考虑到两根杆件的材料相同、单元长度相同，故有 $E_1=E_2=E$，$l_1=l_2=l=8\times10^{-2}\,\text{m}$，单元①及单元②的截面面积如下：

$$A_1=\frac{\pi}{4}(4)^2=1.256\times10^{-3}\,\text{m}^2,\ A_2=\frac{\pi}{4}(2)^2=3.14\times10^{-4}\,\text{m}^2,$$

故有：

$$\text{单元①}:K^{e_1}=\begin{bmatrix} EA_1/l & -EA_1/l \\ -EA_1/l & EA_1/l \end{bmatrix}=E\begin{bmatrix} 0.01570 & -0.01570 \\ -0.01570 & 0.01570 \end{bmatrix}$$

$$\text{单元②}:K^{e_2}=\begin{bmatrix} EA_2/l & -EA_2/l \\ -EA_2/l & EA_2/l \end{bmatrix}=E\begin{bmatrix} 0.00393 & -0.00393 \\ -0.00393 & 0.00393 \end{bmatrix} \tag{1-20}$$

三、建立结构物的总体方程式

建立结构物的总体方程式，即是要确定结构物整体中所有节点力与节点位移的关系，从而建立结构整体的刚度矩阵，因此，首先应确定这根变截面杆离散后的节点位移列矩阵 Δ 及相应的节点力列矩阵 F。

$$\begin{aligned} \Delta &= \{u_1 \quad u_2 \quad u_3\}^{\mathrm{T}} \\ F &= \{F_1 \quad F_2 \quad F_3\}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{1-21}$$

于是按照上式所预定的元素的次序及位置，结合式（1-20），并组织各单元有关元素“对号入座”，从而建立起这根变截面杆的总刚度矩阵如下：

$$K=\begin{bmatrix} EA_1/l & -EA_1/l & 0 \\ -EA_1/l & EA_1/l+EA_2/l & -EA_2/l \\ 0 & -EA_2/l & EA_2/l \end{bmatrix} \tag{1-22}$$

由于杆件的整体坐标系就是这两个单元的局部坐标，所以这里没有必要将单元的局部坐标的刚度矩阵化为整体坐标的刚度矩阵。总刚度矩阵中央的一项是单元①的刚度系数和单元②的刚度系数的叠加。

将具体数据代入式（1-22）可列出结构物整体的节点力与位移的关系式：

$$K\Delta = F \tag{1-23}$$

即：
$$E\begin{bmatrix} 0.01570 & -0.01570 & 0 \\ -0.01570 & 0.01963 & -0.00393 \\ 0 & -0.00393 & 0.00393 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \tag{1-24}$$

其中右端项 F_s 形成过程如下：

$$F_s=\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 0 \\ F_2^{(2)} \\ P \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \tag{1-25}$$

四、解线性方程组

在解线性方程组（1-24）之前须引入所有边界条件及荷载量，显然式（1-25）中引入了唯一的外力 P，于是只需引入边界条件：

$$x_1=0,\ u=u_1=0 \tag{1-26}$$

在式（1-24）中可先解后两个方程，得：

$$u_2=63.69427P/E,\ u_3=318.14720P/E \tag{1-27}$$

然后再将式（1-27）代入式（1-24）的第一式得：

$$F_1=-P \tag{1-28}$$

于是整个静力平衡条件都得到满足。

五、其他计算及检验

从式（1-24）及式（1-27）中可计算出：

$$-F_1^{(1)}=F_2^{(1)}=-F_2^{(2)}=F_3^{(2)}=P \tag{1-29}$$

说明各单元的静定条件亦满足。

第四节　有限元法优缺点简述

一、有限元法的特点

1. 概念清楚，容易理解。可以在不同的水平上建立起对该方法的理解。从使用的观点来讲，每个人的理论基础不同，理解的深度也可以不同，既可以通过直观的物理意义来学习，也可以从严格的力学概念和数学概念推导。

2. 适应性强，应用范围广泛。有限元法可以用来求解工程中许多复杂的问题，特别是采用其他数值计算方法（如有限差分法）求解困难的问题。如复杂结构形状问题，复杂边界条件问题，非均质、非线性材料问题，动力学问题等。目前，有限元法在理论上和应用上还在不断发展，今后将更完善，其使用范围也将更广泛。

3. 有限元法采用矩阵形式表达，便于编制计算机程序，可以充分

利用高速数字计算机的优势。由于有限元法计算过程的规范化，目前在国内外有许多通用程序，可以直接套用，非常方便。著名的有 SAP 系列、ADINA、ANSYS、ASKA、NASTRAN、MARK、ABAQUS 等。

二、有限元法的优缺点

1. 解题的适应性强：

（1）单元的类型、形状及大小可以变更以适合于不同几何形状及较为复杂的物体或结构物；

（2）可适用于几乎任何荷载作用及边界条件的情况；

（3）可适用于线性及非线性物理条件由各种性质材料组成的物体或结构物；

（4）可适用于复杂的混合结构物的分析，如由杆、板、壳及杆系结构物组成的混合结构物。

2. 解题效能较高：

（1）过去和目前有较多用经典解析法不能解决的困难问题，现在用有限元方法分析都可获得解决。如形状复杂、开孔洞及复杂边界条件的弹性板壳力学平衡问题、应力集中问题、稳定及振动问题、动力响应问题、塑性力学问题、复杂的混合结构问题等；

（2）事先编好程序后，借助于计算机，于短时间内即得到计算结果；

（3）有些工程上的问题有现成的标准程序可以套用。

3. 有限元法存在的一些缺点：

（1）特殊问题须编写具体程序，其程序编写过程未必简单；

（2）输入数据的准备工作量较大，输出结果需要有经验的人加以判断；

（3）计算产生的误差较难估计。