多次复数及应用

张祖国　蔡习宁　著

河北科学技术出版社

多 次 复 数 及 应 用

张祖国　蔡习宁　著

河北科学技术出版社

〔冀〕新登字 004 号

内 容 简 介

本书提出了多次复数的概念；以二次复数为例研究了其定义、性质、分类及运算规则；提出了用矢性二次复数表示空间矢量、表示空间矢量绕另一矢量旋转有限角度的方法；推导了二次复数与笛卡尔坐标系中矢量之间的影射关系；并举例说明了多次复数在解代数方程、微分方程中的应用，在进行空间机构运动分析、空间机构运动综合及惯性力平衡中的应用。

本书可供数学、力学、机构学等研究人员参考，也可作为理、工科院校师生的研读材料。

多次复数及应用

张祖国　蔡习宁　著

河北科学技术出版社出版发行　（石家庄市北马路 45 号）

石家庄市先锋印刷厂印刷

787×1092 毫米　1/32　5 印张　104000 字　1992 年 5 月第 1 版

1992 年 5 月第 1 次印刷　　印数：1—3000　定价：3.00 元

ISBN　7-5375-0863-1/O・11

引　言

在很早以前，人们在解一元二次方程时，就遇到了负数开平方的问题，限于当时的科学技术水平，只好认为判别式小于零的一元二次方程无解，从而避免了负数开偶次方的运算。到16世纪初，意大利数学家在研究一元三次方程的根式解法时发现，对于确有三个实根的实系数一元三次方程，如果用公式表示这三个实根，就必须应用负数开平方的运算。这样，人们才承认了负数开平方仍是一种数，既然不是实数，那么它就是一种新数。由于当时对这种数很不了解，就把这种数称作"虚假的数"。这正是虚数一词的来源。16世纪后期，意大利数学家R·波贝利(Bombelli)给出了复数运算的正式论证，使得复数在某些纯数学领域中得到了应用后，引起了人们的重视。但是，由于当时的生产和科学技术水平很低，找不到复数的物理模型，也不知道怎样在实践中应用复数，因而对复数的研究进展缓慢。

两个多世纪以来，随着生产的发展和自然科学的进步，人们认识了复数的几何意义(例如表示平面上的点或矢量)，找到了复数的物理模型，使得复数研究得到迅速的发展，进而提出了复变函数的理论和方法，其在数学、自然科学和工程技术中有着广泛的应用，是研究流体力学、电磁学、弹性理论以及平面机构分析与综合的有力工具。在科学技术迅速发展的今

天，大量的、复杂的多维问题摆在人们的面前，而应用过去的复数方法去解决这些问题却是不方便甚至是不可能的。因此，在本书中，把过去的复数定义为一次复数（或平面复数）。

一次复数的提出和广泛的应用，引起了数学界及物理学界的极大兴趣，人们纷纷探索超复数。在这方面，尤以19世纪中叶英国数学家哈密顿引入的四元数（$a\cdot 1+b\cdot i+c\cdot j+d\cdot k$）最引人注目，应用四元数很好地解决了刚体旋转问题，并且在其他方面也有一些很重要的应用。但是由于其不适合乘法交换律，使得四元数的性质与一次复数有很大差异，例如，在一次复数范围内，我们都知道，一元二次方程有两个根，但是，如果在四元数范围内，即使是 $x^2+1=0$ 这样简单的方程，也有无限多个根。这种情况，使得四元数在数学上的应用带来很大的不便。

本书提出了多次复数的概念，并以二次复数为主进行了探讨，列举了大量的例子，以说明其在实际中的应用，由于采用了多次复数，使原来有些难于求解的问题，能较迅速地得到正确的结果。

作者在研究过程中，得到了清华大学唐锡宽教授，北京农业工程大学孙可宗教授，南京栖霞山化工厂杨霆力高级工程师，河北机电学院吴声浔教授和石家庄陆军学院钱宗铿副教授的热情帮助和支持，谨此表示深深的感谢。

由于著者水平所限，对多次复数的研究还很不深入，书中难免存在缺点甚至错误，希望读者能提出宝贵意见，特先致以谢意。

著　者

1991年8月

目　　录

第一章　二次复数及其代数运算

一、二次复数的概念

1. 二次复数的定义

令 $i^2=-1, j^2=-1, i\neq j, ij=ji$，对于任意四个实数 a、b、c、d，我们称

$$Z=a+ib+jc+ijd$$

或

$$Z=a+bi+cj+dij$$

为二次复数，其中 a、b、c、d 分别称为 Z 的实部、i 部、j 部、ij 部，分别记作 $[Z]_a$、$[Z]_i$、$[Z]_j$、$[Z]_{ij}$。当 b、c、d 同时为零时，$Z=a$，我们称其为实数；当 b 和 d 或 c 和 d 同时为零时，$Z=a+jc$ 或 $Z=a+ib$，我们称其为一次复数（或平面复数）；当 $a=0$ 时，如果 b、c、d 不都为零，则称 Z 为纯虚数。

二次复数的定义也可写成另一种形式：

令 $i^2=-1, j^2=-1, i\neq j, ij=ji=k$，对于任意四个实数 a、b、c、d，我们称

$$Z=a+ib+jc+kd$$

或

$$Z=a+bi+cj+dk$$

为二次复数。

2. 两个二次复数相等的定义

如果两个二次复数的实部、i 部、j 部、ij 部分别相等，那么称这两个二次复数相等。

即：如果 $Z_1=a_1+ib_1+jc_1+ijd_1 \quad Z_2=a_2+ib_2+jc_2+ijd_2$

而 $a_1=a_2 \quad b_1=b_2 \quad c_1=c_2 \quad d_1=d_2$

那么 $Z_1=Z_2$

推论 如果一个二次复数等于零，那么其实部、i 部、j 部、ij 部都等于零。

即：如果 $Z=a+ib+jc+ijd=0$

那么 $a=0 \quad b=0 \quad c=0 \quad d=0$

3. 矢性二次复数

如果二次复数

$Z=a+ib+jc+ijd$

可变形成

$$Z\cdot=r(\cos\alpha\cos\beta+i\sin\alpha\cos\beta+j\cos\alpha\sin\beta+ij\sin\alpha\sin\beta)$$

那么称 Z 为矢性二次复数，其中 r、α、β 为实数。

二、二次复数的代数运算

设有两个二次复数：

$Z_1=a_1+ib_1+jc_1+ijd_1 \quad Z_2=a_2+ib_2+jc_2+ijd_2$

1. 加减法

加减法定义为：

$$\begin{aligned}Z_1\pm Z_2&=(a_1+ib_1+jc_1+ijd_1)\pm(a_2+ib_2+jc_2+ijd_2)\\&=(a_1\pm a_2)+i(b_1\pm b_2)+j(c_1\pm c_2)+ij(d_1\pm d_2)\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

2. 乘法

(1)乘法定义

乘法定义为：

$$Z_1Z_2=(a_1+ib_1+jc_1+ijd_1)(a_2+ib_2+jc_2+ijd_2)$$

按实数多项式乘法法则，注意到 $i^2=-1, j^2=-1, i\neq j, ij=ji$，得：

$$Z_1Z_2=U+iV+jW+ijT \tag{1.2.2}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}U&=a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2+d_1d_2\\V&=a_1b_2+b_1a_2-c_1d_2-d_1c_2\\W&=a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2-d_1b_2\\T&=a_1d_2+b_1c_2+c_1b_2+d_1a_2\end{aligned}\right\} \tag{1.2.2.1}$$

(2)二次复数不满足乘积律

所谓二次复数不满足乘积律，即两个非零二次复数，乘积可以为零。

设 $Z_1\neq0, Z_2\neq0$，如果 $Z_1Z_2=0$，由式(1.2.2.1)可得到：

$$\left.\begin{aligned}a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2+d_1d_2&=0\\a_1b_2+b_1a_2-c_1d_2-d_1c_2&=0\\a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2-d_1b_2&=0\\a_1d_2+b_1c_2+c_1b_2+d_1a_2&=0\end{aligned}\right\} \tag{1.2.2.2}$$

如果把方程组(1.2.2.2)看做是 a_1、b_1、c_1 和 d_1 的四元一次方程组，其具有非零解的充要条件为：

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_2 & -b_2 & -c_2 & d_2\\ b_2 & a_2 & -d_2 & -c_2\\ c_2 & -d_2 & a_2 & -b_2\\ d_2 & c_2 & b_2 & a_2\end{vmatrix}$$

$$=(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)^2-4(a_2d_2-b_2c_2)^2=0 \tag{1.2.2.3}$$

即：

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= d_2 \\ b_2 &= -c_2 \end{aligned}\right\} \tag{1.2.2.4}$$

或

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= -d_2 \\ b_2 &= c_2 \end{aligned}\right\} \tag{1.2.2.5}$$

把式(1.2.2.4)代入式(1.2.2.2)得：

$$\left.\begin{aligned} a_1a_2-b_1b_2+c_1b_2+d_1a_2=0 \\ a_1b_2+b_1a_2-c_1a_2+d_1b_2=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.2.2.6}$$

解得：

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -d_1 \\ b_1 &= c_1 \end{aligned}\right\} \tag{1.2.2.7}$$

把式(1.2.2.5)代入式(1.2.2.2)得：

$$\left.\begin{aligned} a_1a_2-b_1b_2-c_1b_2-d_1a_2=0 \\ a_1b_2+b_1a_2+c_1a_2-d_1b_2=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.2.2.8}$$

解得：

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= d_1 \\ b_1 &= -c_1 \end{aligned}\right\} \tag{1.2.2.9}$$

由式(1.2.2.4)、(1.2.2.7)和(1.2.2.5)、(1.2.2.9)可得出结论：

如果两个二次复数具有下面的形式：

$$Z_1=a_1+ib_1+jb_1-ija_1 \tag{1.2.2.10}$$

$$Z_2=a_2+ib_2-jb_2+ija_2 \tag{1.2.2.11}$$

那么，$Z_1Z_2=0$。

满足 Z_1 类型的二次复数构成数集 KK_1。满足 Z_2 类型的二次复数构成数集 KK_2。上述结论可叙述为：KK_1 中的任意

一个数与 KK_2 中的任意一个数乘积为零。因此，称 $KK_1 \cup KK_2 - \{0\}$ 中的任意一个数为零因子，$KK_1 \cup KK_2 - \{0\}$ 为零因子集。显然 $KK_1 \cap KK_2 = \{0\}$。

根据乘法定义，任意两个二次复数的乘积仍为二次复数。反之，对任意的二次复数 $Z_1 = a_1 + ib_1 + jc_1 + ijd_1$，如果 $Z_2 = a_2 + ib_2 + jc_2 + ijd_2 \notin KK_1 \cup KK_2$，设 $Z_2 Z = Z_1$，其中 $Z = U + iV + jW + ijT$（U、V、W、T 为待定实数），由乘法定义可知：

$$\left.\begin{aligned} a_2U - b_2V - c_2W + d_2T = a_1 \\ b_2U + a_2V - d_2W - c_2T = b_1 \\ c_2U - d_2V + a_2W - b_2T = c_1 \\ d_2U + c_2V + b_2W + a_2T = d_1 \end{aligned}\right\} \tag{1.2.3}$$

由式(1.2.2.3)可知，方程组(1.2.3)的系数行列式不为零。即：

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_2 & -b_2 & -c_2 & d_2 \\ b_2 & a_2 & -d_2 & -c_2 \\ c_2 & -d_2 & a_2 & -b_2 \\ d_2 & c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.2.3.1}$$

根据克兰姆法则，方程组(1.2.3)存在唯一的解：

$$U = \frac{\Delta U}{\Delta} \quad V = \frac{\Delta V}{\Delta} \quad W = \frac{\Delta W}{\Delta} \quad T = \frac{\Delta T}{\Delta} \tag{1.2.3.2}$$

其中

$$\Delta U = \begin{vmatrix} a_1 & -b_2 & -c_2 & d_2 \\ b_1 & a_2 & -d_2 & -c_2 \\ c_1 & -d_2 & a_2 & -b_2 \\ d_1 & c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} \tag{1.2.3.3}$$

$$\Delta V=\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & -c_2 & d_2 \\ b_2 & b_1 & -d_2 & -c_2 \\ c_2 & c_1 & a_2 & -b_2 \\ d_2 & d_1 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} \tag{1.2.3.4}$$

$$\Delta W=\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 & a_1 & d_2 \\ b_2 & a_2 & b_1 & -c_2 \\ c_2 & -d_2 & c_1 & -b_2 \\ d_2 & c_2 & d_1 & a_2 \end{vmatrix} \tag{1.2.3.5}$$

$$\Delta T=\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 & -c_2 & a_1 \\ b_2 & a_2 & -d_2 & b_1 \\ c_2 & -d_2 & a_2 & c_1 \\ d_2 & c_2 & b_2 & d_1 \end{vmatrix} \tag{1.2.3.6}$$

注 $Z_2 \in KK_1 \cup KK_2$，即 $\Delta=0$ 时，方程组(1.2.3)可能有无穷多组解，或无解，不能确定相应的 Z。由此可定义除法。

3.除法

除法定义为：

满足 $Z_2Z=Z_1$ 的二次复数 $Z=U+iV+jW+ijT$，称为 Z_1 除以 Z_2 的商(其中 $Z_2 \notin KK_1 \cup KK_2$)，记作 $Z=\dfrac{Z_1}{Z_2}$。

4.积与商的分类

(1)积的分类

①如果 $Z_1 \in KK_1 \cup KK_2$，那么对任意的二次复数 Z_2，$Z_1Z_2 \in KK_1 \cup KK_2$；

②如果 Z_1、$Z_2 \notin KK_1 \cup KK_2$，那么 $Z_1Z_2 \notin KK_1 \cup KK_2$。

证明

①设 $Z_1 \in KK_1$，即：

$Z_1 = a_1 + ib_1 + jb_1 - ija_1$

由乘法定义可得：

$Z_1Z_2 = U + iV + jW + ijT$

其中

$U = a_1(a_2 - d_2) - b_1(b_2 + c_2)$

$V = a_1(b_2 + c_2) + b_1(a_2 - d_2)$

$W = a_1(b_2 + c_2) + b_1(a_2 - d_2)$

$T = -[a_1(a_2 - d_2) - b_1(b_2 + c_2)]$

所以

$U = -T \quad V = W$

即

$Z_1Z_2 \in KK_1$

同理，如果 $Z_1 \in KK_2$，则 $Z_1Z_2 \in KK_2$。

②设 Z_1、$Z_2 \notin KK_1 \cup KK_2$。

反证法，不妨设 $Z_1Z_2 \in KK_1$（$Z_1Z_2 \in KK_2$ 可做类似的讨论），由方程组(1.2.2.2)和式(1.2.2.3)可知，$Z_1Z_2 \neq 0$。

任取 $Z_3 \in KK_2$（$Z_3 \neq 0$），由零因子性质可知：

$(Z_1Z_2)Z_3 = 0$

而 $(Z_1Z_2)Z_3 = Z_1(Z_2Z_3)$

所以

$Z_1(Z_2Z_3) = 0$

由①知，$Z_2Z_3 \in KK_2$，但 $Z_2Z_3 \neq 0$，

进而 $Z_1 \in KK_1$，与原假设矛盾。

所以

$Z_1Z_2 \notin KK_1$

证毕。

(2)商的分类

设 $Z=\frac{Z_1}{Z_2}$,$Z_2 \notin KK_1 \cup KK_2$。

①如果 $Z_1 \notin KK_1 \cup KK_2$,那么 $Z \notin KK_1 \cup KK_2$;

②如果 $Z_1 \in KK_1$ 或 $Z_1 \in KK_2$,那么相应地有 $Z \in KK_1$ 或 $Z \in KK_2$。

根据除法定义,$Z_2 Z = Z_1$,商的分类可由积的分类得出。

5. **开平方**

设二次复数 $A=x+iy+jz+ijw$ 的平方等于 $B=a+ib+jc+ijd$,那么 A 叫 B 的平方根,记作 $A=\sqrt{B}$。

因为

$$\begin{aligned} A^2=B &= (x+iy+jz+ijw)^2 \\ &= a+ib+jc+ijd \end{aligned} \tag{1.2.5.1}$$

根据两个二次复数相等的定义可得:

$$x^2-y^2-z^2+w^2=a \tag{1.2.5.2}$$

$$2xy-2zw=b \tag{1.2.5.3}$$

$$2xz-2yw=c \tag{1.2.5.4}$$

$$2xw+2yz=d \tag{1.2.5.5}$$

由式(1.2.5.2)−(1.2.5.5)和(1.2.5.3)+(1.2.5.4)得:

$$P^2-Q^2=a-d \tag{1.2.5.6}$$

$$2PQ=b+c \tag{1.2.5.7}$$

其中

$$P=x-w \tag{1.2.5.8}$$

$$Q=y+z \tag{1.2.5.9}$$

由式(1.2.5.6)、(1.2.5.7)得：

$$4Q^4+4(a-d)Q^2-(b+c)^2=0$$

$$Q^2=\frac{-(a-d)\pm\sqrt{(a-d)^2+(b+c)^2}}{2}$$

因为 $Q^2\geqslant 0$ 及 $\sqrt{(a-d)^2+(b+c)^2}\geqslant|a-d|$，所以根号前应取正号，则有：

$$Q=\pm\sqrt{\frac{-(a-d)+\sqrt{(a-d)^2+(b+c)^2}}{2}} \qquad (1.2.5.10)$$

将式(1.2.5.10)代入式(1.2.5.6)得：

$$P=\pm\sqrt{\frac{(a-d)+\sqrt{(a-d)^2+(b+c)^2}}{2}} \qquad (1.2.5.11)$$

根据式(1.2.5.7)可决定 Q 和 P 所对应的正负值。

由式(1.2.5.2)+(1.2.5.5)和(1.2.5.3)−(1.2.5.4)得：

$$R^2-S^2=a+d \qquad (1.2.5.12)$$

$$2RS=b-c \qquad (1.2.5.13)$$

其中

$$R=x+w \qquad (1.2.5.14)$$

$$S=y-z \qquad (1.2.5.15)$$

由式(1.2.5.12)、(1.2.5.13)得：

$$S=\pm\sqrt{\frac{-(a+d)+\sqrt{(a+d)^2+(b-c)^2}}{2}} \qquad (1.2.5.16)$$

$$R=\pm\sqrt{\frac{(a+d)+\sqrt{(a+d)^2+(b-c)^2}}{2}} \qquad (1.2.5.17)$$

根据式(1.2.5.13)可决定 S、R 所对应的正负值。

由式(1.2.5.8)、(1.2.5.9)、(1.2.5.14)和(1.2.5.15)可得：