

◎ 主编 李贤瑜 沈继忠

高等数学

(理工类)

习题详解

GAODENG SHUXUE



责任编辑 章淑颖
封面设计 曾 宇
责任印制 余永珍



ISBN 978-7-81132-319-1

A standard barcode representing the ISBN 978-7-81132-319-1.

9 787811 323191 >

定价:45.00元(共二册)

三、计算题

十一、设连续函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上有界，且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ 。解 由于 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且在 $(0, 1]$ 上有界，故根据比较判别法可得：

高等数学

(理工类)

习题详解

主编 李贤瑜 沈继忠

副主编 周云卿 王克美

收敛

解 由于 $u_n = \frac{1}{\ln(1+n)}$, $u_{n+1} = \frac{1}{\ln(2+n)}$
显然有 $u_{n+1} \leq u_n$ 满足条件(1)又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(1+n)} = 0$ 根据莱布尼茨判别法可知 $\sum (-1)^{n+1} u_n$ 15. 收敛半径为 2, 收敛域为 $(-2, 2]$

解 此级数是缺少奇次项的幂级数

当 $x = 2$ 时, 所求级数成为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ 当 $x = -2$ 时, 所求级数成为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

所以可知

江西高校出版社

16. 收敛半径为 1, 收敛域为 $(-1, 1)$ 解 $u_n = \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$

则

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题详解:理工类/李贤瑜,沈继忠主编. —
南昌:江西高校出版社, 2008.8

ISBN 978 - 7 - 81132 - 319 - 1

I . 高… II . ①李… ②沈… III . 高等数学 - 高等学校 - 习题 IV . 013 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 119708 号

赣羊藏区

李贤瑜 沈继忠 主编
王美英 喻云凤 副主编

出版发行	江西高校出版社
社址	江西省南昌市洪都北大道 96 号
邮政编码	330046
总编室电话	(0791)8504319
销售电话	(0791)8511423
网址	www.juacp.com
印 刷	南昌市光华印刷有限责任公司
照 排	江西太元科技有限公司照排部
经 销	各地新华书店
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	10.625
字 数	258 千字
版 次	2008 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
印 数	1 ~ 2300 册
书 号	ISBN 978 - 7 - 81132 - 319 - 1
定 价	45.00 元(共二册)

版权所有 侵权必究

前 言

本书是李贤瑜、沈继忠主编的《高等数学》(理工类)的配套用书,主要是为学习《高等数学》的理工类大专生自学或复习之用的参考书,也可供讲授《高等数学》的教师在备课和批改作业时参考。

本书由南昌理工学院高等数学教研室的教师编写,其中第一章由王克美编写;第二章由周云卿编写;第三章由胡振琴编写;第四章由马宝芳编写;第五章由赖邦成编写;第六章由万平和编写;第七、十章由乐志峰编写;第八、九章由何琼编写。

本书中难免存在不足和错误之处,欢迎广大专家、同行和读者批评指正。

编 者

2008年1月

目 录

(47)	第一章 函数 极限 连续	(1)
(48)	习题 1-1 集合	(1)
(49)	习题 1-2 函数	(2)
(50)	习题 1-3 极限的定义	(6)
(51)	习题 1-4 极限的运算	(8)
(52)	习题 1-5 函数的连续性	(11)
(53)	自测题一	(13)
(54)	第二章 导数与微分	(17)
(55)	习题 2-1 导数的概念	(17)
(56)	习题 2-2 导数的运算法则	(19)
(57)	习题 2-3 高阶导数	(22)
(58)	习题 2-4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数	(24)
(59)	习题 2-5 微分	(27)
(60)	自测题二	(30)
(61)	第三章 导数的应用	(34)
(62)	习题 3-1 微分中值定理	(34)
(63)	习题 3-2 洛必达法则	(35)
(64)	习题 3-3 函数的单调性及其极值	(38)
(65)	习题 3-4 最大值与最小值问题	(42)
(66)	习题 3-5 曲线的凹凸性与拐点 函数图形的描绘	(45)
(67)	自测题三	(51)
(68)	第四章 不定积分	(55)
(69)	习题 4-1 不定积分的概念与性质	(55)
(70)	习题 4-2 换元积分法	(56)
(71)	习题 4-3 分部积分法	(60)
(72)	自测题四	(61)
(73)	第五章 定积分及其应用	(64)
(74)	习题 5-1 定积分的概念与性质	(64)
(75)	习题 5-2 微积分的基本公式	(65)
(76)	习题 5-3 定积分的换元法与分部积分法	(67)
(77)	习题 5-4 反常积分	(69)
(78)	习题 5-5 定积分的应用	(69)
(79)	自测题五	(71)

第六章 微分方程	(74)	
习题 6-1	微分方程的基本概念	(74)
习题 6-2	一阶可分离变量的微分方程	(76)
习题 6-3	一阶线性微分方程	(81)
习题 6-4	可降阶的二阶微分方程	(88)
(1) 习题 6-5	二阶常数齐次线性微分方程	(94)
(1) 自测题六	(98)
第七章 空间解析几何	(103)	
(a) 习题 7-1	空间直角坐标及其向量	(103)
(b) 习题 7-2	向量的数量积与向量积	(105)
(c) 习题 7-3	平面及其方程	(107)
(d) 习题 7-4	空间直线及其方程	(108)
(e) 自测题七	(111)
第八章 多元函数微分学	(116)	
(f) 习题 8-1	多元函数的概念 二元函数的极限和连续性	(116)
(g) 习题 8-2	偏导数	(119)
(h) 习题 8-3	全微分	(122)
(i) 习题 8-4	多元复合函数与隐函数的微分法	(124)
(j) 习题 8-5	偏导数的应用	(127)
(k) 自测题八	(133)
第九章 重积分	(138)	
(l) 习题 9-1	二重积分的概念和性质	(138)
(m) 习题 9-2	二重积分的计算法	(139)
(n) 习题 9-3	二重积分的应用	(144)
(o) 自测题九	(145)
第十章 无穷级数	(150)	
(p) 习题 10-1	数项级数的概念和性质	(150)
(q) 习题 10-2	正项级数及其审敛法	(151)
(r) 习题 10-3	任意项级数	(154)
(s) 习题 10-4	幂级数	(155)
(t) 习题 10-5	函数的幂级数展开	(158)
(u) 自测题十	(160)

第一章 函数 极限 连续

习题 1-1 集合

1. 用区间表示下列不等式的集合

$$(1) |x| \geq 3; \quad (2) |x-2| < 3; \quad (3) |2x+1| \leq 1;$$

$$(4) |5 - \frac{1}{x}| < 1; \quad (5) x^2 - 6 \leq 0; \quad (6) x^2 - x - 6 > 0;$$

$$(7) 0 < |x-5| < 1; \quad (8) |3-2x| \leq 1.$$

解 (1) $|x| \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 3$ 或 $x \leq -3$, 表示成区间为 $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

(2) $|x-2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-2 < 3$, 即 $-1 < x < 5$, 区间表示为 $(-1, 5)$.

(3) $|2x+1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x+1 \leq 1$, 即 $-1 \leq x \leq 0$, 区间表示为 $[-1, 0]$.

(4) $|5 - \frac{1}{x}| < 1 \Leftrightarrow -1 < 5 - \frac{1}{x} < 1$, 即 $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$, 区间表示为 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{4})$.

(5) 由 $(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) \leq 0$, 得 $-\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$, 区间表示为 $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$.

(6) 由 $(x+2)(x-3) > 0$, 得 $x > 3$ 或 $x < -2$, 区间表示为 $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

$$(7) \text{由 } \begin{cases} -1 < x-5 < 1 \\ x-5 \neq 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 4 < x < 6 \\ x \neq 5 \end{cases}.$$

区间表示为 $(4, 5) \cup (5, 6)$.

$$(8) |3-2x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 3-2x \leq 1, \text{ 即 } 1 \leq x \leq 2, \text{ 区间表示为 } [1, 2].$$

2. 用列举法表示下列集合

$$(1) \text{集合 } \{x \mid 0 < |x-2| \leq 5, x \in \mathbf{Z}\};$$

$$(2) \text{方程 } 2^{x-1} = 1 \text{ 的根的集合};$$

$$(3) \text{抛物线 } y^2 = x \text{ 与 } x=1 \text{ 的交点的集合.}$$

$$\text{解 (1) 依题意 } \begin{cases} -5 \leq x-2 \leq 5 \\ x-2 \neq 0 \\ x \in \mathbf{Z} \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -3 \leq x \leq 7 \\ x \neq 2 \\ x \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$$\therefore \{-3, -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

$$(2) \text{由 } 2^{x-1} = 1 \text{ 得 } x=1 \therefore \{1\}.$$

$$(3) \text{由 } \begin{cases} y^2 = x \\ x = 1 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases} \therefore \{(1, 1), (1, -1)\}.$$

3. 用描述法表示下列集合

$$(1) \text{不小于 6 的全体实数的集合};$$

$$(2) \text{抛物线 } y=2x^2 \text{ 与直线 } y=2 \text{ 的交点的集合};$$

(3) 点 2 的去心 $\frac{1}{3}$ 邻域.

解 (1) $\{x | x \geq 6\}$.

(2) $\{(x, y) | y = 2x^2 \text{ 且 } y = 2\}$.

$$(3) \overset{\circ}{U}(2, \frac{1}{3}) = \{x | 0 < |x - 2| < \frac{1}{3}\}.$$

4. 设 $A = \{x | 3 < x < 5\}$, $B = \{x | x > 4\}$, 求

(1) $A \cup B$; (2) $A \cap B$.

解 (1) $A \cup B = \{x | 3 < x < +\infty\}$ (2) $A \cap B = \{x | 4 < x < 5\}$

5. 设 $M = \{x | x^2 - 6x \leq 0\}$, $N = \{x | x^2 + x - 12 < 0\}$, 求

(1) $M \cup N$; (2) $M \cap N$.

解 由 $x^2 - 6x \leq 0$, 即 $x(x - 6) \leq 0$, 得 $0 \leq x \leq 6$.

所以 $M = \{x | 0 \leq x \leq 6\}$.

由 $x^2 + x - 12 < 0$, 即 $(x + 4)(x - 3) < 0$, 得 $-4 < x < 3$.

所以 $N = \{x | -4 < x < 3\}$. 于是

(1) $M \cup N = \{x | -4 < x \leq 6\}$ (2) $M \cap N = \{x | 0 \leq x < 3\}$

6. 设 $A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$, $B = [-10, 3]$. 求

(1) $A \cup B$; (2) $A \cap B$; (3) $A \setminus B$.

解 (1) $A \cup B = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$ (2) $A \cap B = [-10, -5]$

(3) $A \setminus B = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty)$

习题 1-2 函数

1. 下列各对函数中, 哪些是同一函数? 哪些不是?

(1) $x - 1$ 与 $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$; (2) $|x|$ 与 $\sqrt{x^2}$; (3) x 与 $(\sqrt{x})^2$;

(4) \sqrt{x} 与 $2^{\frac{1}{2} \log_2 x}$; (5) x 与 $\sin(\arcsin x)$; (6) x 与 $\ln e^x$.

解 (2) 与 (6) 是相同函数, 其余不是.

2. 求下列函数的定义域

(1) $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x^2 - x}$;

(2) $y = \frac{\lg(3+x)}{\sqrt{|x|-1}}$;

(3) $y = \arcsin \frac{1}{2x}$;

(4) $y = \sqrt{\sin x}$;

(5) $y = \frac{1}{x^2 - 1} + \arccos x + \sqrt{x}$;

(6) $y = \begin{cases} -x, & -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{3-x}, & 0 < x < 2. \end{cases}$

解 (1) 由 $\begin{cases} x+2>0 \\ x^2-x\geq 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x>-2 \\ x\geq 1 \text{ 或 } x\leq 0 \end{cases}$ ∴ 定义域为 $(-2, 0] \cup [1, +\infty)$.

(2) 由 $\begin{cases} 3+x>0 \\ |x|-1>0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x<3 \\ x>1 \text{ 或 } x<-1 \end{cases}$ ∴ 定义域为 $(-\infty, -1) \cup (1, 3)$.

(3) 由 $\begin{cases} -1 \leq \frac{1}{2x} \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$ 得 $x \geq \frac{1}{2}$ 或 $x \leq -\frac{1}{2}$ ∴ 定义域为 $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$.

(4) 由 $\sin x \geq 0$ 得 $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$

∴ 定义域为 $\{x | 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(5) 由 $\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ 得 $0 \leq x < 1$ ∴ 定义域为 $[0, 1)$.

(6) 定义域为 $[-1, 0] \cup (0, 2) = [-1, 2]$.

3. (1) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[-4, 4]$, 求 $f(x^2)$ 的定义域;

(2) 若 $f(x)$ 的定义域是 $(0, 1)$, 求 $f(\lg x)$ 的定义域.

解 (1) 由 $-4 \leq x^2 \leq 4$, 得 $-2 \leq x \leq 2$, 所以 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-2, 2]$.

(2) 由 $0 < \lg x < 1$, 得 $1 < x < 10$, 所以 $f(\lg x)$ 的定义域是 $(1, 10)$.

4. 设 $f(x) = \arccos(\lg x)$, 求 $f(10^{-1}), f(1), f(10)$.

解 $f(10^{-1}) = \arccos(\lg 10^{-1}) = \arccos(-1) = \pi$

$$f(1) = \arccos(\lg 1) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$f(10) = \arccos(\lg 10) = \arccos 1 = 0$$

5. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$

求: $\varphi(\frac{\pi}{6}), \varphi(-\frac{\pi}{4}), \varphi(\frac{\pi}{2})$.

解 $\varphi(\frac{\pi}{6}) = |\sin \frac{\pi}{6}| = \frac{1}{2}, \varphi(-\frac{\pi}{4}) = |\sin(-\frac{\pi}{4})| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$.

6. 下列函数中, 哪些函数在其定义域内是单调的?

(1) $\sin x$; (2) $\arcsin x$; (3) e^x ; (4) $\ln x$; (5) $x^2 - x$.

解 函数(2)、(3)、(4)在各自定义域内是单调函数.

7. 试证下列函数在指定区间上的单调性:

(1) $y = 2 - \ln x$ ($0, +\infty$); (2) $y = 3^{x-1}$ ($-\infty, +\infty$).

证 (1) 设 $f(x) = 2 - \ln x, 0 < x_1 < x_2 < +\infty$, 则

因为 $f(x_2) - f(x_1) = (2 - \ln x_2) - (2 - \ln x_1) = \ln x_1 - \ln x_2 = \ln \frac{x_1}{x_2} < 0$ ($\frac{x_1}{x_2} < 1$)

所以 $f(x_2) < f(x_1)$ 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少.

(2) 设 $f(x) = 3^{x-1}, -\infty < x_1 < x_2 < +\infty$,

则 $f(x_2) - f(x_1) = 3^{x_2-1} - 3^{x_1-1} = \frac{1}{3}(3^{x_2} - 3^{x_1}) > 0$

所以 $f(x_2) > f(x_1)$

即 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

8. 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) f(x) = \sin x - \cos x + 1;$$

$$(2) h(x) = x \frac{3^x - 1}{3^x + 1};$$

$$(3) \varphi(x) = |x \sin x| e^{\cos x};$$

$$(4) g(x) = x(x-1)(x+1);$$

$$(5) F(x) = \lg(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$\text{解 } (1) f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) + 1 = -\sin x - \cos x + 1$$

因为 $f(-x) \neq f(x)$, 且 $f(-x) \neq -f(x)$, 所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

$$(2) \text{因为 } h(-x) = (-x) \frac{3^{-x} - 1}{3^{-x} + 1} = (-x) \frac{1 - 3^x}{1 + 3^x} = x \frac{3^x - 1}{3^x + 1} = h(x), \text{ 所以, } h(x) \text{ 是偶}$$

函数.

(3) 因为 $\varphi(-x) = |(-x)\sin(-x)| e^{\cos(-x)} = |x \sin x| e^{\cos x} = \varphi(x)$, 所以, $\varphi(x)$ 是偶函数.

(4) 因为 $g(-x) = (-x)(-x-1)(-x+1) = -x(x+1)(x-1) = -g(x)$, 所以, $g(x)$ 是奇函数.

$$(5) \text{因为 } F(-x) = \lg(-x + \sqrt{1 + (-x)^2}) = \lg(-x + \sqrt{1 + x^2}) = \lg \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x} \\ = -\lg(x + \sqrt{1 + x^2}) = -F(x), \text{ 所以, } F(x) \text{ 是奇函数.}$$

9. 下列各函数中, 哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期:

$$(1) y = \cos(2x+1); \quad (2) y = \sin^2 x; \quad (3) y = x \sin x;$$

$$(4) y = \sin \pi x - 1; \quad (5) y = \tan(2x-1); \quad (6) y = 2^{\sin x}.$$

解 (1) 是周期函数, 周期 $l = \pi$.

(2) 是周期函数, 周期 $l = \pi$.

(3) 不是周期函数.

(4) 是周期函数, 周期 $l = 2$.

(5) 是周期函数, 周期 $l = \frac{\pi}{2}$.

(6) 是周期函数, 周期 $l = 2\pi$.

10. 求下列函数的反函数:

$$(1) y = 3x + 1;$$

$$(2) y = \frac{1-3x}{x-2};$$

$$(3) y = \frac{2^x}{2^x + 1};$$

$$(4) y = 1 + \lg(x+2);$$

$$(5) y = x^2 (x \geq 0);$$

$$(6) y = \frac{1}{x}.$$

解 (1) 由 $y = 3x + 1$, 得 $x = \frac{1}{3}(y-1)$, 反函数为 $y = \frac{1}{3}(x-1)$.

(2) 由 $y = \frac{1-3x}{x-2}$, 得 $x = \frac{1+2y}{y+3}$, 反函数为 $y = \frac{1+2x}{x+3}$.

(3) 由 $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$, 得 $2^x = \frac{y}{1-y}$, $x = \log_2 \frac{y}{1-y}$, 反函数为 $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$.

(4) 由 $y = 1 + \lg(x+2)$, 得 $\lg(x+2) = y-1$, $x = 10^{y-1} - 2$, 反函数为 $y = 10^{x-1} - 2$.

(5) 由 $y = x^2$, $x \geq 0$, 得 $x = \sqrt{y}$, 反函数 $y = \sqrt{x}$.

(6) 由 $y = \frac{1}{x}$, 得 $x = \frac{1}{y}$, 反函数为 $y = \frac{1}{x}$.

11. 将 y 表示为 x 的函数:

$$(1) y = u^2, u = \lg t, t = \tan \frac{x}{2};$$

$$(2) y = \sqrt{u}, u = \cos t, t = 2^x.$$

解 (1) $y = [\lg(\tan \frac{x}{2})]^2$; (2) $y = \sqrt{\cos 2^x}$.

12. 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的:

$$(1) y = \sin 2x;$$

$$(2) y = e^{\frac{1}{x}};$$

$$(3) y = \sqrt{2 - x^2};$$

$$(4) y = (3x - 5)^{10};$$

$$(5) y = \tan \sqrt{1 + x};$$

$$(6) y = \sin^2(1 + 2x);$$

$$(7) y = [\arcsin(1 - x^2)]^3;$$

$$(8) y = \ln \tan \frac{1}{x}.$$

解 (1) $y = \sin u, u = 2x$;

$$(2) y = e^u, u = \frac{1}{x};$$

$$(3) y = \sqrt{u}, u = 2 - x^2;$$

$$(4) y = u^{10}, u = 3x - 5;$$

$$(5) y = \tan u, u = \sqrt{v}, v = 1 + x;$$

$$(6) y = u^2, u = \sin v, v = 1 + 2x;$$

$$(7) y = u^3, u = \arcsin v, v = 1 - x^2;$$

$$(8) y = \ln u, u = \tan v, v = \frac{1}{x}.$$

12. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

作 $f(x)$ 的图形.

解 见图 1-1.

13. 设 $f(x) = \frac{1-x}{x}, g(x) = \frac{1}{x}$, 求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)] = \frac{1-g(x)}{g(x)} = \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = x - 1$;

$$g[f(x)] = \frac{1}{f(x)} = \frac{x}{1-x}.$$

14. 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x+1, & x \geq 0. \end{cases}$$

求 $f(x+1), f(x-1)$.

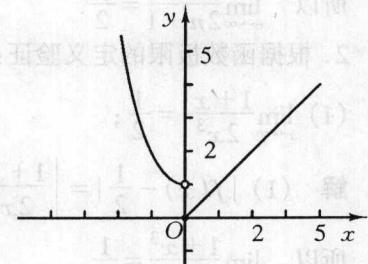


图 1-1

$$\text{解 } f(x+1) = \begin{cases} x+1, & x+1<0 \\ (x+1)+1, & x+1 \geq 0 \end{cases} \text{ 即 } f(x+1) = \begin{cases} x+1, & x<-1 \\ x+2, & x \geq -1 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x-1) = \begin{cases} x-1, & x-1<0 \\ (x-1)+1, & x-1 \geq 0 \end{cases} \text{ 即 } f(x-1) = \begin{cases} x-1, & x<1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

15. 设 $f(\sin x) = \cos 2x$, 求 $f(x)$.

解 因为 $f(\sin x) = \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, 所以 $f(x) = 1 - 2x^2$.

$$16. \text{ 设 } f\left(\frac{1}{x}\right) = 4x - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} (x \neq 0), \text{ 求 } f(x).$$

$$\text{解 因为 } f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}, \text{ 所以 } f(x) = \frac{4}{x} - \sqrt{1 + x^2}. \quad (3)$$

习题 1-3 极限的定义

1. 根据数列极限的定义验证:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^{n+1}}{n} = 1; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{解 (1)} |x_n - 1| = \left| \frac{n + (-1)^{n+1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}, \text{ 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^{n+1}}{n} = 1.$$

$$(2) |x_n - \frac{3}{2}| = \left| \frac{3n+1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{1}{2(2n+1)}, \text{ 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{1}{2(2n+1)} \rightarrow 0,$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}.$$

2. 根据函数极限的定义验证:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4.$$

$$\text{解 (1)} |f(x) - \frac{1}{2}| = \left| \frac{1+x^3}{2x^3} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2|x|^3}, \text{ 当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{1}{2|x|^3} \rightarrow 0,$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}.$$

$$(2) |f(x) - (-4)| = \left| \frac{x^2-4}{x+2} + 4 \right| = \left| \frac{(x+2)^2}{x+2} \right| = |x+2| \quad (x \neq -2)$$

$$\text{当 } |x+2| \rightarrow 0 \text{ 且 } x \neq -2 \text{ 时, } |f(x) - (-4)| = |x+2| \rightarrow 0, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4.$$

3. 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

画出 $f(x)$ 的图形, 求 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 并问 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 是否存在?

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2+1) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在. (图 1-2)

4. 设 $f(x) = \frac{|x|}{x}$, 问 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 是否存在? 为什么?

解 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2}{x} = 3$
 $\frac{x}{x} = 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

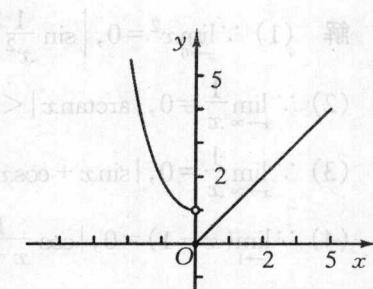


图 1-2

5. 设

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & -1 < x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ 3x^2, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x^2 = 3 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} 3x^2 = \frac{27}{4}.$$

6. 观察下列各题中, 哪些是无穷小? 哪些是无穷大?

$$(1) \frac{1+2x}{x} (x \rightarrow 0); \quad (2) \frac{1+2x}{x^2} (x \rightarrow \infty);$$

$$(3) \tan x (x \rightarrow \frac{\pi}{2}); \quad (4) e^{-x} (x \rightarrow +\infty);$$

$$(5) 2^x (x \rightarrow 0^-); \quad (6) \frac{(-1)^n}{2^n} (n \rightarrow \infty);$$

$$(7) \frac{x-3}{x^2-9} (x \rightarrow 3); \quad (8) \sin \frac{1}{x} (x \rightarrow 0).$$

解 (1)、(3) 为无穷大; (2)、(4)、(5)、(6) 为无穷小; (7)、(8) 既不是无穷大, 也不是无穷小.

7. 两个无穷小的商是否一定是无穷小? 举例说明.

解 不一定. 例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin 2x, 3x$ 均为无穷小. 但 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3} \neq 0$, 即它们的商不是无穷小.

8. 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + \cos x}{x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cos \frac{1}{x-1};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \arcsin x}{x^2 + 1}.$$

$$\text{解} \quad (1) \because \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \left| \sin \frac{1}{x^2} \right| \leqslant 1, \therefore \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2} = 0.$$

$$(2) \because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, |\arctan x| < \frac{\pi}{2}, \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} = 0.$$

$$(3) \because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, |\sin x + \cos x| = |\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})| \leqslant \sqrt{2}, \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + \cos x}{x} = 0.$$

$$(4) \because \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0, \left| \cos \frac{1}{x-1} \right| \leqslant 1, \therefore \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \cos \frac{1}{x-1} = 0.$$

$$(5) \because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0, |\arcsin x| \leqslant \frac{\pi}{2}, \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \arcsin x}{x^2 + 1} = 0.$$

习题 1-4 极限的运算

1. 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 1}{x^3 - 3x^2 + 4};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x - 3x^3}{1 + x^2 + 4x^3};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x(x-1)};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right);$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x});$$

$$(7) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{x-1};$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) (n \in \mathbb{N}^+); \quad (10) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2+3} (n \in \mathbb{N}^+).$$

$$\text{解} \quad (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 1}{x^3 - 3x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x - 3x^3}{1 + x^2 + 4x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - 3}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + 4} = -\frac{3}{4}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)(x+1) = 0.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{5+x} + \sqrt{x}} = 0.$$

$$(7) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2-3}{(x-1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2[1 - (\frac{1}{2})^n] = 2.$$

$$(10) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1+(2n-1)]\frac{n}{2}}{n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+3} = 1.$$

2. 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-x-2};$$

$$(4) \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\frac{\pi}{2} - \theta}.$$

$$\text{解 } (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{2} |\sin \frac{x}{2}|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}} = \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}.$$

$$(4) \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\frac{\pi}{2} - \theta} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\frac{\pi}{2} - \theta} = 1.$$

3. 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+1};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)^{2x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\text{解 } (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2} \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)^1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)^1 = e^2.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)^{-\frac{x}{4} \cdot (-8)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{4}{x}\right)^{-\frac{x}{4}}\right]^{-8} = e^{-8}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{-\frac{1}{3x} \cdot (-3)} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1-3x)^{-\frac{1}{3x}}]^{-3} = e^{-3}.$$

4. 填空题

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, x 是 $e^{\sqrt{x}} - 1$ 的 _____ 阶无穷小;

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{2x} - 1$ 是 $\sin x$ 的 _____ 阶无穷小;

(3) 当 $x \rightarrow 1$ 时, $1-x$ 是 $1-x^3$ 的 _____ 阶无穷小;

(4) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1-\cos^2 x$ 与 $a \sin^2 \frac{x}{2}$ 为等价无穷小, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.