主编 李贤瑜 沈继忠

高等数学（理工类）习题详解

GAODENG SHUXUE

江西高校出版社

责任编辑 章淑颖
封面设计 曾　宇
责任印制 余永珍

ISBN 978-7-81132-319-1

定价:45.00元(共二册)

高等数学

（理工类）

习题详解

主　编　李贤瑜　沈继忠
副主编　周云卿　王克美

江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题详解：理工类/李贤瑜，沈继忠主编. —
南昌：江西高校出版社，2008.8

ISBN 978-7-81132-319-1

Ⅰ.高... Ⅱ.①李... ②沈... Ⅲ.高等数学-高
等学校-习题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 119708 号

出版发行	江西高校出版社
社　　址	江西省南昌市洪都北大道 96 号
邮政编码	330046
总编室电话	(0791)8504319
销售电话	(0791)8511423
网　　址	www.juacp.com
印　　刷	南昌市光华印刷有限责任公司
照　　排	江西太元科技有限公司照排部
经　　销	各地新华书店
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	10.625
字　　数	258 千字
版　　次	2008 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数	1～2300 册
书　　号	ISBN 978-7-81132-319-1
定　　价	45.00 元(共二册)

前　言

本书是李贤瑜、沈继忠主编的《高等数学》(理工类)的配套用书,主要是为学习《高等数学》的理工类大专生自学或复习之用的参考书,也可供讲授《高等数学》的教师在备课和批改作业时参考。

本书由南昌理工学院高等数学教研室的教师编写,其中第一章由王克美编写;第二章由周云卿编写;第三章由胡振琴编写;第四章由马宝芳编写;第五章由赖邦成编写;第六章由万平和编写;第七、十章由乐志峰编写;第八、九章由何琼编写。

本书中难免存在不足和错误之处,欢迎广大专家、同行和读者批评指正。

编　者

2008年1月

目 录

第一章　函数　极限　连续

习题 1－1　集合

1. 用区间表示下列不等式的集合

(1) $|x|\geqslant 3$;　(2) $|x-2|<3$;　(3) $|2x+1|\leqslant 1$;

(4) $|5-\frac{1}{x}|<1$;　(5) $x^2-6\leqslant 0$;　(6) $x^2-x-6>0$;

(7) $0<|x-5|<1$;　(8) $|3-2x|\leqslant 1$.

解　(1) $|x|\geqslant 3\Leftrightarrow x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -3$,表示成区间为$(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$.

(2) $|x-2|<3\Leftrightarrow -3<x-2<3$,即$-1<x<5$,区间表示为$(-1,5)$.

(3) $|2x+1|\leqslant 1\Leftrightarrow -1\leqslant 2x+1\leqslant 1$,即$-1\leqslant x\leqslant 0$,区间表示为$[-1,0]$.

(4) $|5-\frac{1}{x}|<1\Leftrightarrow -1<5-\frac{1}{x}<1$,即$\frac{1}{6}<x<\frac{1}{4}$,区间表示为$(\frac{1}{6},\frac{1}{4})$.

(5) 由$(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})\leqslant 0$,得$-\sqrt{6}\leqslant x\leqslant\sqrt{6}$,区间表示为$[-\sqrt{6},\sqrt{6}]$.

(6) 由$(x+2)(x-3)>0$,得 $x>3$ 或 $x<-2$,区间表示为$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$.

(7) 由$\begin{cases}-1<x-5<1\\ x-5\neq 0\end{cases}$　得$\begin{cases}4<x<6\\ x\neq 5\end{cases}$.

区间表示为$(4,5)\cup(5,6)$.

(8) $|3-2x|\leqslant 1\Leftrightarrow -1\leqslant 3-2x\leqslant 1$,即$1\leqslant x\leqslant 2$,区间表示为$[1,2]$.

2. 用列举法表示下列集合

(1) 集合$\{x|0<|x-2|\leqslant 5,x\in\mathbf{Z}\}$;

(2) 方程 $2^{x-1}=1$ 的根的集合;

(3) 抛物线 $y^2=x$ 与 $x=1$ 的交点的集合.

解　(1) 依题意$\begin{cases}-5\leqslant x-2\leqslant 5\\ x-2\neq 0\\ x\in\mathbf{Z}\end{cases}$　即　$\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 7\\ x\neq 2\\ x\in\mathbf{Z}\end{cases}$

$\therefore\ \{-3,-2,-1,0,1,3,4,5,6,7\}$.

(2) 由 $2^{x-1}=1$　得　$x=1$　$\therefore\ \{1\}$.

(3) 由$\begin{cases}y^2=x\\ x=1\end{cases}$　得　$\begin{cases}x_1=1\\ y_1=1\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1\\ y_2=-1\end{cases}$　$\therefore\ \{(1,1),(1,-1)\}$.

3. 用描述法表示下列集合

(1) 不小于 6 的全体实数的集合;

(2) 抛物线 $y=2x^2$ 与直线 $y=2$ 的交点的集合;

(3) 点 2 的去心$\frac{1}{3}$邻域.

解 (1) $\{x|x\geqslant 6\}$.

(2) $\{(x,y)|y=2x^2$ 且 $y=2\}$.

(3) $\overset{0}{U}(2,\frac{1}{3})=\{x|0<|x-2|<\frac{1}{3}\}$.

4. 设 $A=\{x|3<x<5\}$, $B=\{x|x>4\}$,求

(1) $A\cup B$; (2) $A\cap B$.

解 (1) $A\cup B=\{x|3<x<+\infty\}$ (2) $A\cap B=\{x|4<x<5\}$

5. 设 $M=\{x|x^2-6x\leqslant 0\}$, $N=\{x|x^2+x-12<0\}$,求

(1) $M\cup N$; (2) $M\cap N$.

解 由 $x^2-6x\leqslant 0$,即 $x(x-6)\leqslant 0$,得 $0\leqslant x\leqslant 6$.

所以 $M=\{x|0\leqslant x\leqslant 6\}$.

由 $x^2+x-12<0$,即$(x+4)(x-3)<0$,得 $-4<x<3$.

所以 $N=\{x|-4<x<3\}$. 于是

(1) $M\cup N=\{x|-4<x\leqslant 6\}$ (2) $M\cap N=\{x|0\leqslant x<3\}$

6. 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$, $B=[-10,3)$.求

(1) $A\cup B$; (2) $A\cap B$; (3) $A\setminus B$.

解 (1) $A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$ (2) $A\cap B=[-10,-5)$

(3) $A\setminus B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$

习题 1－2 函数

1. 下列各对函数中,哪些是同一函数? 哪些不是?

(1) $x-1$ 与$\frac{x^2-1}{x+1}$; (2) $|x|$与$\sqrt{x^2}$; (3) x 与$(\sqrt{x})^2$;

(4) $\sqrt{x}$与 $2^{\frac{1}{2}\log_2 x}$; (5) x 与 $\sin(\arcsin)x$; (6) x 与 $\ln e^x$.

解 (2)与(6)是相同函数,其余不是.

2. 求下列函数的定义域

(1) $y=\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{x^2-x}$; (2) $y=\frac{\lg(3+x)}{\sqrt{|x|-1}}$;

(3) $y=\arcsin\frac{1}{2x}$; (4) $y=\sqrt{\sin x}$;

(5) $y=\frac{1}{x^2-1}+\arccos x+\sqrt{x}$; (6) $y=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ \sqrt{3-x}, & 0<x<2.\end{cases}$

解 (1) 由$\begin{cases}x+2>0\\ x^2-x\geqslant 0\end{cases}$ 得$\begin{cases}x>-2\\ x\geqslant 1 \text{ 或 } x\leqslant 0\end{cases}$ ∴ 定义域为$(-2,0]\cup[1,+\infty)$.

(2) 由$\begin{cases}3+x>0\\ |x|-1>0\end{cases}$ 得$\begin{cases}x<3\\ x>1 \text{ 或 } x<-1\end{cases}$ ∴ 定义域为$(-\infty,-1)\cup(1,3)$.

(3) 由 $\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{1}{2x}\leqslant 1\\ x\neq 0\end{cases}$ 得 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$ 或 $x\leqslant-\dfrac{1}{2}$ $\therefore$ 定义域为 $(-\infty,-\dfrac{1}{2}]\cup[\dfrac{1}{2},+\infty)$.

(4) 由 $\sin x\geqslant 0$ 得 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi, k\in\mathbf{Z}$

$\therefore$ 定义域为 $\{x\,|\,2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi, k\in\mathbf{Z}\}$.

(5) 由 $\begin{cases}x^2-1\neq 0\\ -1\leqslant x\leqslant 1\\ x\geqslant 0\end{cases}$ 得 $0\leqslant x<1$ $\therefore$ 定义域为 $[0,1)$.

(6) 定义域为 $[-1,0]\cup(0,2)=[-1,2)$.

3.(1) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[-4,4]$, 求 $f(x^2)$ 的定义域;

(2) 若 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1)$, 求 $f(\lg x)$ 的定义域.

解 (1) 由 $-4\leqslant x^2\leqslant 4$, 得 $-2\leqslant x\leqslant 2$, 所以 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-2,2]$.

(2) 由 $0<\lg x<1$, 得 $1<x<10$, 所以 $f(\lg x)$ 的定义域是 $(1,10)$.

4. 设 $f(x)=\arccos(\lg x)$, 求 $f(10^{-1}), f(1), f(10)$.

解 $f(10^{-1})=\arccos(\lg 10^{-1})=\arccos(-1)=\pi$

$f(1)=\arccos(\lg 1)=\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$

$f(10)=\arccos(\lg 10)=\arccos 1=0$

5. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$

求: $\varphi(\dfrac{\pi}{6}), \varphi(-\dfrac{\pi}{4}), \varphi(\dfrac{\pi}{2})$.

解 $\varphi(\dfrac{\pi}{6})=|\sin\dfrac{\pi}{6}|=\dfrac{1}{2}, \varphi(-\dfrac{\pi}{4})=|\sin(-\dfrac{\pi}{4})|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \varphi(\dfrac{\pi}{2})=0$.

6. 下列函数中, 哪些函数在其定义域内是单调的?

(1) $\sin x$; (2) $\arcsin x$; (3) e^x; (4) $\ln x$; (5) x^2-x.

解 函数(2)、(3)、(4)在各自定义域内是单调函数.

7. 试证下列函数在指定区间上的单调性:

(1) $y=2-\ln x$ $(0,+\infty)$; (2) $y=3^{x-1}$ $(-\infty,+\infty)$.

证 (1)设 $f(x)=2-\ln x, 0<x_1<x_2<+\infty$, 则

因为 $f(x_2)-f(x_1)=(2-\ln x_2)-(2-\ln x_1)=\ln x_1-\ln x_2=\ln\dfrac{x_1}{x_2}<0$ $(\dfrac{x_1}{x_2}<1)$

所以 $f(x_2)<f(x_1)$ 即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少.

(2) 设 $f(x)=3^{x-1}, -\infty<x_1<x_2<+\infty$,

则 $f(x_2)-f(x_1)=3^{x_2-1}-3^{x_1-1}=\dfrac{1}{3}(3^{x_2}-3^{x_1})>0$

所以 $f(x_2)>f(x_1)$

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

8. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\sin x-\cos x+1$;　　(2) $h(x)=x\dfrac{3^x-1}{3^x+1}$;

(3) $\varphi(x)=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}$;　　(4) $g(x)=x(x-1)(x+1)$;

(5) $F(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

解　(1) $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$

因为 $f(-x)\neq f(x)$,且 $f(-x)\neq -f(x)$,所以 $f(x)$既非偶函数又非奇函数.

(2) 因为 $h(-x)=(-x)\dfrac{3^{-x}-1}{3^{-x}+1}=(-x)\dfrac{1-3^x}{1+3^x}=x\dfrac{3^x-1}{3^x+1}=h(x)$,所以,$h(x)$是偶函数.

(3) 因为 $\varphi(-x)=|(-x)\sin(-x)|\mathrm{e}^{\cos(-x)}=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}=\varphi(x)$,所以,$\varphi(x)$是偶函数.

(4) 因为 $g(-x)=(-x)(-x-1)(-x+1)=-x(x+1)(x-1)=-g(x)$,所以,$g(x)$是奇函数.

(5) 因为 $F(-x)=\lg(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\lg(-x+\sqrt{1+x^2})=\lg\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$ $=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})=-F(x)$,所以,$F(x)$是奇函数.

9. 下列各函数中,哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期:

(1) $y=\cos(2x+1)$;　　(2) $y=\sin^2 x$;　　(3) $y=x\sin x$;

(4) $y=\sin\pi x-1$;　　(5) $y=\tan(2x-1)$;　　(6) $y=2^{\sin x}$.

解　(1) 是周期函数,周期 $l=\pi$.

(2) 是周期函数,周期 $l=\pi$.

(3) 不是周期函数.

(4) 是周期函数,周期 $l=2$.

(5) 是周期函数,周期 $l=\dfrac{\pi}{2}$.

(6) 是周期函数,周期 $l=2\pi$.

10. 求下列函数的反函数:

(1) $y=3x+1$;　　(2) $y=\dfrac{1-3x}{x-2}$;　　(3) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$;

(4) $y=1+\lg(x+2)$;　　(5) $y=x^2(x\geqslant 0)$;　　(6) $y=\dfrac{1}{x}$.

解　(1) 由 $y=3x+1$,得 $x=\dfrac{1}{3}(y-1)$,反函数为 $y=\dfrac{1}{3}(x-1)$.

(2) 由 $y=\dfrac{1-3x}{x-2}$,得 $x=\dfrac{1+2y}{y+3}$,反函数为 $y=\dfrac{1+2x}{x+3}$.

(3) 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$,得 $2^x=\dfrac{y}{1-y}$,$x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$,反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

(4) 由 $y=1+\lg(x+2)$,得 $\lg(x+2)=y-1$,$x=10^{y-1}-2$,反函数为 $y=10^{x-1}-2$.

(5) 由 $y=x^2$,$x\geqslant 0$,得 $x=\sqrt{y}$,反函数 $y=\sqrt{x}$.

(6) 由 $y=\dfrac{1}{x}$,得 $x=\dfrac{1}{y}$,反函数为 $y=\dfrac{1}{x}$.

11. 将 y 表示为 x 的函数:

(1) $y=u^2, u=\lg t, t=\tan\dfrac{x}{2}$;

(2) $y=\sqrt{u}, u=\cos t, t=2^x$.

解 (1) $y=[\lg(\tan\dfrac{x}{2})]^2$; (2) $y=\sqrt{\cos 2^x}$.

12. 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的:

(1) $y=\sin 2x$; (2) $y=e^{\frac{1}{x}}$;

(3) $y=\sqrt{2-x^2}$; (4) $y=(3x-5)^{10}$;

(5) $y=\tan\sqrt{1+x}$; (6) $y=\sin^2(1+2x)$;

(7) $y=[\arcsin(1-x^2)]^3$; (8) $y=\ln\tan\dfrac{1}{x}$.

解 (1) $y=\sin u, u=2x$;

(2) $y=e^u, u=\dfrac{1}{x}$;

(3) $y=\sqrt{u}, u=2-x^2$;

(4) $y=u^{10}, u=3x-5$;

(5) $y=\tan u \quad u=\sqrt{v} \quad v=1+x$;

(6) $y=u^2, u=\sin v, v=1+2x$;

(7) $y=u^3, u=\arcsin v, v=1-x^2$;

(8) $y=\ln u, u=\tan v, v=\dfrac{1}{x}$.

12. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0, \\ x, & x\geqslant 0. \end{cases}$$

作 $f(x)$ 的图形.

解 见图 1-1.

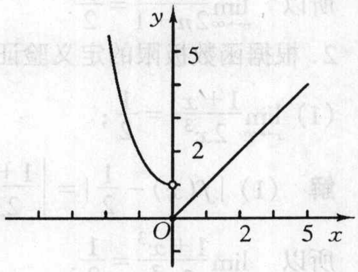

图 1-1

13. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{x}, g(x)=\dfrac{1}{x}$, 求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=\dfrac{1-g(x)}{g(x)}=\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=x-1$;

$g[f(x)]=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x}{1-x}$.

14. 设

$$f(x)=\begin{cases} x, & x<0, \\ x+1, & x\geqslant 0. \end{cases}$$

求 $f(x+1), f(x-1)$.

解 $f(x+1)=\begin{cases}x+1, & x+1<0\\(x+1)+1, & x+1\geqslant 0\end{cases}$ 即 $f(x+1)=\begin{cases}x+1, & x<-1\\x+2, & x\geqslant -1\end{cases}$

$f(x-1)=\begin{cases}x-1, & x-1<0\\(x-1)+1, & x-1\geqslant 0\end{cases}$ 即 $f(x-1)=\begin{cases}x-1, & x<1\\x, & x\geqslant 1\end{cases}$.

15. 设 $f(\sin x)=\cos 2x$，求 $f(x)$.

解 因为 $f(\sin x)=\cos 2x=1-2\sin^2 x$，所以 $f(x)=1-2x^2$.

16. 设 $f(\frac{1}{x})=4x-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}(x\neq 0)$，求 $f(x)$.

解 因为 $f(\frac{1}{x})=\frac{4}{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}$，所以 $f(x)=\frac{4}{x}-\sqrt{1+x^2}$.

习题1－3 极限的定义

1. 根据数列极限的定义验证：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n+1}}{n}=1$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

解 (1) $|x_n-1|=\left|\frac{n+(-1)^{n+1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\to 0$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n+1}}{n}=1$.

(2) $|x_n-\frac{3}{2}|=\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}$，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{2(2n+1)}\to 0$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

2. 根据函数极限的定义验证：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$; (2) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$.

解 (1) $|f(x)-\frac{1}{2}|=\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2|x|^3}$，当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{2|x|^3}\to 0$，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$.

(2) $|f(x)-(-4)|=|\frac{x^2-4}{x+2}+4|=|\frac{(x+2)^2}{x+2}|=|x+2|\quad(x\neq -2)$

当 $|x+2|\to 0$ 且 $x\neq -2$ 时，$|f(x)-(-4)|=|x+2|\to 0$，所以 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$.

3. 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0\\x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

画出 $f(x)$ 的图形，求 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，并问 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在？

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1\quad \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.（图1－2）

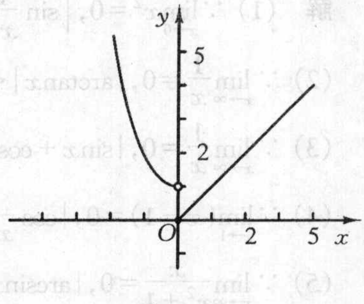

图 1－2

4. 设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，问$\lim\limits_{x\to0}f(x)$是否存在？为什么？

解 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

5. 设

$$f(x)=\begin{cases}3x, & -1<x<1\\ 2, & x=1\\ 3x^2, & 1<x<2.\end{cases}$$

求$\lim\limits_{x\to0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to1}f(x)$，$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}f(x)$.

解 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}3x=0$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}3x=3$ $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}3x^2=3$ $\therefore \lim\limits_{x\to1}f(x)=3$

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}3x^2=\dfrac{27}{4}$.

6. 观察下列各题中，哪些是无穷小？哪些是无穷大？

(1) $\dfrac{1+2x}{x}$ $(x\to0)$； (2) $\dfrac{1+2x}{x^2}$ $(x\to\infty)$；

(3) $\tan x$ $(x\to\dfrac{\pi}{2})$； (4) $e^{-x}(x\to+\infty)$；

(5) $2^{\frac{1}{x}}(x\to0^-)$； (6) $\dfrac{(-1)^n}{2^n}$ $(n\to\infty)$；

(7) $\dfrac{x-3}{x^2-9}$ $(x\to3)$； (8) $\sin\dfrac{1}{x}$ $(x\to0)$.

解 (1)、(3)为无穷大；(2)、(4)、(5)、(6)为无穷小；(7)、(8)既不是无穷大，也不是无穷小.

7. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？举例说明.

解 不一定. 例如，当 $x\to0$ 时，$\sin2x$，$3x$ 均为无穷小. 但$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{3x}=\dfrac{2}{3}\neq0$，即它们的商不是无穷小.

8. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+\cos x}{x}$； (4) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\cos\dfrac{1}{x-1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\arcsin x}{x^2+1}$.

解 (1) $\because \lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, $\left|\sin\dfrac{1}{x^2}\right|\leqslant 1$, $\therefore \lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}=0$.

(2) $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$, $\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=0$.

(3) $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $|\sin x+\cos x|=|\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})|\leqslant\sqrt{2}$, $\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x\cos x}{x}=0$.

(4) $\because \lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$, $|\cos\dfrac{1}{x-1}|\leqslant 1$, $\therefore \lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cos\dfrac{1}{x-1}=0$.

(5) $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$, $|\arcsin x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\arcsin x}{x^2+1}=0$.

习题 1－4　极限的运算

1. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-1}{x^3-3x^2+4}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-3x^3}{1+x^2+4x^3}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x(x-1)}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4})$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})$;

(7) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n})$ $(n\in\mathbf{N}^+)$; (10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2+3}$ $(n\in\mathbf{N}^+)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-1}{x^3-3x^2+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^3}}=\dfrac{0}{1}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-3x^3}{1+x^2+4x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}-3}{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}+4}=-\dfrac{3}{4}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)(x+1)=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{\sin x}{x})=1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{\sqrt{5+x}+\sqrt{x}}=0$.

(7) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2xh+h^2}{h}=\lim\limits_{x\to 0}(2x+h)=2x$.

(8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2-3}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}2[1-(\frac{1}{2})^n]=2.$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[1+(2n-1)]\frac{n}{2}}{n^2+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+3}=1.$

2. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{\sin3x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-x-2}$;

(4) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\theta}{\frac{\pi}{2}-\theta}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{\sin3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{2x}\cdot\dfrac{3x}{\sin3x}\cdot\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}.$

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\sqrt{2}\,|\sin\frac{x}{2}|}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\sqrt{2}.$

(3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}\cdot\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{3}.$

(4) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\theta}{\frac{\pi}{2}-\theta}=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\frac{\pi}{2}-\theta}=1.$

3. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+1}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{2x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot2}\cdot\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{1}=e^{2}.$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{-\frac{x}{4}\cdot(-8)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{-\frac{x}{4}}\right]^{-8}=e^{-8}.$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-\frac{1}{x})^{x}}{(1+\frac{1}{x})^{x}}=\dfrac{e^{-1}}{e}=e^{-2}.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{-3x}\cdot(-3)}=\lim\limits_{x\to0}[(1-3x)^{-\frac{1}{3x}}]^{-3}=e^{-3}.$

4. 填空题

(1) 当 $x\to0^+$ 时, x 是 $e^{\sqrt{x}}-1$ 的________阶无穷小;

(2) 当 $x\to0$ 时, $e^{2x}-1$ 是 $\sin x$ 的________阶无穷小;

(3) 当 $x\to1$ 时, $1-x$ 是 $1-x^3$ 的________阶无穷小;

(4) 当 $x\to0$ 时, $1-\cos^2x$ 与 $a\sin^2\dfrac{x}{2}$ 为等价无穷小, 则 $a=$________.