21世纪高等职业教育规划教材

实用高等数学

第二册

《实用高等数学》编写组 编

苏州大学出版社

21世纪高等职业教育规划教材

实用高等数学

第二册

《实用高等数学》编写组 编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实用高等数学. 第2册/黄海哨主编;《实用高等数学》编写组编. —苏州:苏州大学出版社,2008.5
21世纪高等职业教育规划教材
ISBN 978-7-81137-047-8

Ⅰ.实… Ⅱ.①黄…②实… Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第076381号

21世纪高等职业教育规划教材
实用高等数学(第二册)
《实用高等数学》编写组 编
责任编辑 李 娟

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市干将东路200号 邮编:215021)
无锡市江溪书刊印刷厂印装
(地址:无锡市南门外江溪桥139号 邮编:214027)

开本 787mm×1 092mm 1/16 印张 17.5 字数 437千
2008年5月第1版 2008年5月第1次印刷
ISBN 978-7-81137-047-8 定价:30.00元

编写说明

COMPILE EXPLANATION

为了满足高等职业教育事业又好又快发展的需要，根据教育部16号文件中关于进一步“改革教材、教学内容和教学方法，拓宽专业适应性，努力办出特色”，以及党的十七大报告中关于“大力发展职业教育，提高高等教育质量”的精神，我们邀请了高职院校富有教学经验和理论研究水平的一线教师，编写了这套《实用高等数学》教材. 教材坚持“以应用为目的，以必须、够用、高效为度”的编写原则，突出了“联系实际，理清概念，加强计算，注重应用，适度论证，提高素质，重视创新”的特色，强化了职业教育教材功能建设方面所必须具备的区域性与适应性.

教材在编写过程中，适当增加了实验课和实例教学的比重，努力改变了高等数学课程过去常见的繁、难、多、旧的状况，突出体现了服务于发展学生综合职业素质和职业能力的基本功能，有利于引导学生积极思考和实践，培养学生分析问题和解决实际问题的能力，加强了学生对数学作为一门重要专业基础课和工具课的感性认识. 为了适应不同地区、不同院校、不同专业的需要，教材在内容的安排上提供了极大的弹性，可根据具体情况灵活组合，充分体现了其通用性. 教材分第一、第二两册，完整教学时数为两学期，共128学时. 各专业可根据实际情况对教学内容作适当取舍.

教材在编写过程中主要参考了苏州大学出版社已出版的《高等数学》.

教材由邓国光、张建忠总主编. 第一册主编为吴跃生，副主编为邓润梅、胡文英、陈晓江、孙秀亭，参加编写、修改的还有邓国光、贺楚雄、喻璟、卜孝华、饶新明、许世建、程发珍、胡俊航. 第二册主编为黄海哨，副主编为刘淑珍、唐有光、付冬丽、凌寿铨，参加编写、修改的还有邹志红、余翔、王广明、罗建武、吴翰青、郭晓金、占翔、付金谋. 另外，陈景贤老师也对本教材的编写、修改做了大量的工作.

由于编者水平所限，不妥之处在所难免，敬请读者批评指正.

《实用高等数学》编写组

2008年5月

目录 Contents

第八章 常微分方程和拉氏变换

在科学研究和大量的应用实践中，往往需要求得变量之间存在的函数关系. 但从问题本身的已知条件往往不能直接归结出函数表达式，仅能得到含有未知函数的导数或微分的关系式，这种关系式就是本章所要讨论的微分方程. 所要求的函数关系需要求解这个微分方程才能显现出来，因此，微分方程是数学理论与实际问题相联系的途径之一，也是确定函数关系的一种数学方法. 本章主要介绍微分方程的基本概念和几类常见的微分方程的解法.

§8-1　微分方程的基本概念

我们先来看两个具体的实例.

例 1　物体冷却的速度(℃/s)，正比于物体的温度与冷却环境温度之差. 现设钢锭出炉温度为 1150℃，炉外环境温度为 30℃，比例系数为 0.014(℃/s^2). 试求：

(1) 钢锭出炉后的温度 T(℃)与时间 t(s)之间的函数关系；

(2) 钢锭温度降到 750℃以下锻打将会影响产品质量，问应该在钢锭出炉后几秒内把它锻打好？

解　(1) 这是一个热力学中的冷却问题. 取 $t=0$ 为钢锭出炉开始冷却的时刻，设经时间 t 时钢锭温度为 T，则 $T=T(t)$，钢锭温度下降的速度为$\frac{dT}{dt}$.

据牛顿冷却定律得

$$\frac{dT(t)}{dt}=-0.014[T(t)-30], \tag{1}$$

其中等号右端添上负号，是因为当时间 t 增大时，钢锭温度 $T(t)$下降，故$\frac{dT}{dt}<0$.

按题意，$T(t)$还应满足条件

$$T|_{t=0}=1150. \tag{2}$$

将方程(1)变为

$$\frac{dT(t)}{T(t)-30}=-0.014dt. \tag{3}$$

两端求不定积分得

$$\int \frac{\mathrm{d}T}{T(t)-30} = -\int 0.014\mathrm{d}t\ ,$$

求出不定积分后得

$$\ln[T(t)-30] = -0.014t + C_1.$$

令 $C_1 = \ln C$(C_1,C 为任意常数),化简得

$$T(t) = 30 + C\mathrm{e}^{-0.014t}. \tag{4}$$

将条件(2) $T|_{t=0} = 1150$ 代入(4)式,得 $C = 1120$,于是所求函数关系为

$$T(t) = 30 + 1120\mathrm{e}^{-0.014t}. \tag{5}$$

(2) 将 $T = 750$ 代入(5)式中得

$$750 = 30 + 1120\mathrm{e}^{-0.014t},$$

即 $\mathrm{e}^{-0.014t} = \frac{9}{14}$,从而解得 $t \approx 31.56\mathrm{s}$.

所以应该在钢锭出炉后大约 31.56s 内把它锻打好.

例 2 一质量为 m 的质点,从高 h 处,只受重力作用从静止状态自由下落,试求其运动方程.

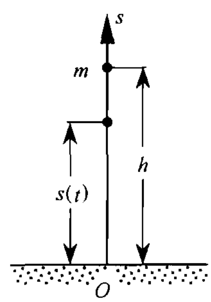

图 8-1

解 在中学阶段就已经知道,从高度为 h 处下落的自由落体,离地面高度 s 的变化规律为 $s = h - \frac{1}{2}gt^2$,其中 g 为重力加速度. 这个规律是怎么得到的呢? 下面我们给出推导过程.

取质点下落的铅垂线为 s 轴,它与地面的交点为原点,并规定正向朝上(图 8-1). 设质点在时刻 t 的位置在 $s(t)$. 因为质点只受方向向下的重力的作用(空气阻力忽略不计),由牛顿第二定律 $F = ma$,得

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} = -mg,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} = -g. \tag{6}$$

根据质点由静止状态自由下降的假设,初始速度为 0,所以 $s = s(t)$ 还应满足下列条件

$$s|_{t=0} = h, \left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0. \tag{7}$$

对(6)式两边积分,得

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = -g\int \mathrm{d}t = -gt + C_1\ . \tag{8}$$

对(8)式两边再积分,得

$$s(t) = \int(-gt + C_1)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2\ , \tag{9}$$

其中 C_1,C_2 均为任意常数.

将条件(7)代入(8)、(9)式,得 $C_1 = 0$,$C_2 = h$. 于是所求的运动方程为

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h. \tag{10}$$

总结这类问题,给出下面的定义:

定义 若在一个方程中涉及的函数是未知的,自变量仅有一个,且在方程中含有未知函

数的导数(或微分),则称这样的方程为**常微分方程**,简称**微分方程**.

例 1 的方程(1)、例 2 的方程(6)都是常微分方程.

微分方程中未知函数的导数的最高阶数,称为**微分方程的阶**.如例 1 的方程(1)是一阶微分方程,例 2 的方程(6)是二阶微分方程.

某个函数代入微分方程后,能成为自变量的恒等式,则称这个函数满足微分方程,满足微分方程的函数称为**微分方程的解**.因此,求满足微分方程的未知函数,也就是要求出微分方程的解.

求微分方程的解免不了会求不定积分,因此得到的解常含有任意常数.如果微分方程的解中含有相互独立的任意常数,且任意常数的个数与方程的阶数相同,则称为**微分方程的通解**.如例 1 的方程(4)、例 2 的方程(9)分别是微分方程(1)、(6)的通解.通解表示满足微分方程的未知函数的一般形式,在大部分情况下,也表示了满足微分方程的解的全体.在几何上,通解的图象是一族曲线,称为**积分曲线族**.

微分方程中对未知函数的附加条件,若以限定未知函数及其各阶导数在某一个特定点的值的形式表示,则称这种条件为微分方程的**定解条件**或**初始条件**.如在例 1、例 2 中的方程(2)、(7),就是微分方程(1)、(6)的初始条件.

微分方程初始条件的作用是用来确定通解中的任意常数.不含任意常数的解称为**特解**.如例 1 的方程(5)、例 2 的方程(10)依次是微分方程(1)、(6)满足初始条件(2)、(7)的特解.求微分方程满足初始条件的特解的问题,称为**初值问题**.特解表示了微分方程通解中一个满足定解条件的特定的解,在几何上表示为积分曲线族中一条特定的积分曲线.图 8-2 是例 1 积分曲线族及满足初始条件的积分曲线的示意图.

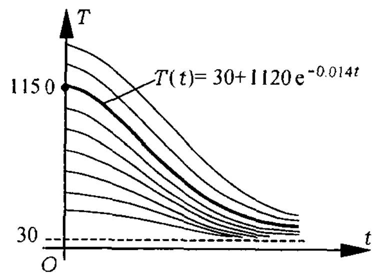

图 8-2

例 3　验证函数 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$(C_1,C_2 为任意常数)是方程 $y''-4y=0$ 的通解,并求满足初始条件 $y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=1$ 的特解.

解　$y'=2C_1e^{2x}-2C_2e^{-2x}$, $y''=4C_1e^{2x}+4C_2e^{-2x}$,
将 y,y'' 代入微分方程,得

$$y''-4y=4(C_1e^{2x}+C_2e^{-2x})-4(C_1e^{2x}+C_2e^{-2x})\equiv 0.$$

所以函数 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$ 是所给微分方程的解.又因为 $\frac{e^{2x}}{e^{-2x}}=e^{4x}\neq$ 常数,所以解中含有两个独立的任意常数 C_1 和 C_2,而微分方程是二阶的,即任意常数的个数与方程的阶数相同,所以它是该方程的通解.

将初始条件 $y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=1$ 分别代入 y 及 y' 中,得

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\2C_1-2C_2=1,\end{cases}$$

解得 $C_1=\frac{1}{4},C_2=-\frac{1}{4}$.于是所求特解为 $y=\frac{1}{4}(e^{2x}-e^{-2x})$.

随堂练习 8-1

1. 指出下列方程中哪些是微分方程?并说明它们的阶数:

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=2x$；　　(2) $y^2-3y+x=0$；

(3) $x(y')^2+y=1$；　　(4) $(x^2+y^2)dx-xydy=0$.

2. 判断下列方程右边所给函数是否为该方程的解？如果是解，是通解还是特解？

(1) $y''+y=0, y=C_1\sin x+C_2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ (C_1, C_2 为任意常数)；

(2) $y''=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+(y')^2}, y=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$；

(3) $(x+y)dx=-xdy, y=\dfrac{(C-x^2)}{2x}$ (C 为任意常数).

习题 8-1

1. 验证函数 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ (C_1, C_2 为任意常数)是方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0$ 的通解，并求满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 的特解.

2. 写出下列条件确定的曲线所满足的微分方程：

(1) 曲线上任一点 $P(x,y)$处的切线斜率等于该点的坐标之和；

(2) 曲线上任一点 $P(x,y)$处的切线与横轴交点的横坐标等于切点横坐标的一半.

3. 一质量为 m 的物体，由静止开始从水面沉入水中，下沉时质点受到的阻力与下沉的速度成正比(比例系数为 $k, k>0$). 求物体的运动速度 $v(t)$和沉入水下深度 $s(t)$所满足的微分方程及初始条件.

4. 已知曲线通过点(0,0)，且该曲线上任一点 $P(x,y)$处的切线斜率为 xe^{-x}，求该曲线的方程.

5. 设钢锭出炉温度为 1150℃，炉外环境温度为 30℃，钢锭出炉 20s 后温度降到 900℃. 试求钢锭出炉后的温度 T(℃)与时间 t(s)之间的函数关系.

§8-2　一阶微分方程

一阶微分方程中出现未知函数的导数或微分是一阶的，则它的一般形式为

$$F(x,y,y')=0. \tag{8-1}$$

下面我们来讨论它的一些解法.

一、可分离变量的一阶微分方程

若(8-1)式可转化为

$$g(y)dy=f(x)dx, \tag{8-2}$$

则称其为**可分离变量的微分方程**.

可分离变量的一阶微分方程的解法如下：

对原方程分离变量，成为变量分离的方程. 若函数 $f(x)$和 $g(y)$连续，在两边同时求不

定积分，即

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

依次记 $G(y)$，$F(x)$ 为 $g(y)$，$f(x)$ 的一个原函数，则从(1)式可得

$$G(y)=F(x)+C. \tag{2}$$

如果能求出 $G(y)$ 的反函数 G^{-1}，则从(2)式可以得到方程(1)的通解 $y=G^{-1}[F(x)+C]$.

例 1　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解.

解　显然，方程属于可分离变量类型. 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x,$$

两边积分，得 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\mathrm{d}x$，即

$$\ln|y|=x^2+C_1 \text{ 或 } y=\pm e^{x^2+C_1}=\pm e^{C_1}\cdot e^{x^2}.$$

因为 C_1 为任意常数，所以 $\pm e^{C_1}$ 也是任意常数，把它记作 C，代入后得到方程的通解为 $y=Ce^{x^2}$.

例 2　求微分方程 $y(1+x^2)\mathrm{d}y+x(1+y^2)\mathrm{d}x=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解.

解　显然，方程属于可分离变量类型. 分离变量得

$$\frac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=-\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2},$$

两边积分，得

$$\int\frac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=-\int\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2},$$

即

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln C.$$

故方程的通解为 $(1+x^2)(1+y^2)=C$.

将 $y|_{x=1}=1$ 代入通解表达式，得 $C=4$. 因此所求方程的特解为

$$(1+x^2)(1+y^2)=4.$$

某些方程在通过适当的变量代换之后，可以变为可分离变量的方程.

例 3　求方程 $y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=2x^2y(\ln x+\ln y)\mathrm{d}x$ 的通解及满足 $y(1)=2$ 的特解.

解　原方程不属于可分离变量类型. 改写原方程为 $\mathrm{d}(xy)=xy\ln(xy)2x\mathrm{d}x$，引入新未知函数 $u=xy$，则原方程成为 $\mathrm{d}u=u\ln u(2x\mathrm{d}x)$，这是 u 的可分离变量的方程.

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}=2x\mathrm{d}x,$$

两边积分，$\int\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}=\int 2x\mathrm{d}x$，得 $\ln(\ln u)=x^2+\ln C$ 或 $\ln u=Ce^{x^2}$，通解为

$$\ln(xy)=Ce^{x^2}.$$

当 $x=1$ 时 $y=2$，所以 $C=e^{-1}\ln 2$，特解为

$$\ln(xy)=\ln 2\cdot e^{x^2-1}.$$

二、齐次方程

若一阶微分方程(8-1)能化为

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{8-3}$$

的形式，那么方程(8-1)就称为**齐次方程**.

例如，方程$x^2dy=y^2dx-xydy$就是齐次方程，因为它可以化为形式：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\frac{y}{x}}.$$

对齐次方程只要作一个变量代换，一定能转化为新变量的可分离变量的一阶微分方程，从而可望求得通解. 其具体步骤如下：

第一步 化原方程为(8-3)形式；

第二步 在(8-3)式中作变量代换，令 $u=\frac{y}{x}$，则可化为

$$y=ux,\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$$

代入(8-3)式后得 $u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$. 这是一个关于 u 的可分离变量的一阶方程，分离变量后成为

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}; \tag{3}$$

第三步 两边积分得到(3)式的通解

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x};$$

第四步 求出不定积分后以 $u=\frac{y}{x}$ 回代，即得原齐次微分方程的通解.

例 4 求微分方程 $x\frac{dy}{dx}+y=2\sqrt{xy}$的通解.

解 原方程可化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\sqrt{xy}-y}{x}=2\sqrt{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}.$$

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux,\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，代入上式，得

$$u+x\frac{du}{dx}=2\sqrt{u}-u,$$

分离变量，得

$$\frac{du}{2(u-\sqrt{u})}=-\frac{dx}{x},$$

两端积分，得

$$\int\frac{1}{2\sqrt{u}(\sqrt{u}-1)}du=-\int\frac{dx}{x},$$

即

$$\int\frac{d(\sqrt{u}-1)}{\sqrt{u}-1}=-\ln x+\ln C,$$

得

$$\ln(\sqrt{u}-1)+\ln x=\ln C, x(\sqrt{u}-1)=C.$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 回代，得原方程的通解为$\sqrt{xy}-x=C$.

三、一阶线性微分方程

如果一阶微分方程可化为

$$y'+P(x)y=Q(x) \tag{8-4}$$

的形式，即方程关于未知函数及其导数是线性的，而 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是已知的连续函数，则称此方程为**一阶线性微分方程**. 当不含未知函数的项 $Q(x)\neq 0$ 时，称方程(8-4)为关于未知函数 y,y' 的**一阶非齐次线性微分方程**；反之，当 $Q(x)\equiv 0$ 时，即变为

$$y'+P(x)y=0, \tag{8-5}$$

称其为方程(8-4)所对应的**一阶齐次线性微分方程**.

先考虑方程(8-4)所对应的齐次方程(8-5)的解法. 显然它是可分离变量类型的方程，分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x,$$

两端积分，得

$$\ln y=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln C,$$

式中 $\int P(x)\mathrm{d}x$ 表示 $P(x)$ 的一个原函数. 于是一阶齐次线性微分方程(8-5)的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{8-6}$$

其中 C 为任意常数.

其次考虑非齐次方程(8-4)的解. 比较方程(8-4)、(8-5)，差别仅在(8-4)的等式右端是一个函数. 根据指数函数的求导特点，试设方程(8-4)的解为

$$y=C(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{4}$$

即把齐次方程通解中的任意常数 C 改变为 x 的待定函数 $C(x)$，然后求出 $C(x)$，使之满足非齐次线性方程(8-4).

对(4)式求导，得

$$y'=C'(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+C(x)[-P(x)]\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{5}$$

将(4)、(5)式代入(8-4)式，经整理后得

$$C'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x},$$

积分后得

$$C(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C. \tag{8-7}$$

将(8-7)式代入(4)式，即得一阶非齐次线性方程(8-4)的通解公式

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\quad (C\text{ 为任意常数}). \tag{8-8}$$

上述通过把对应的齐次线性方程通解中的任意常数 C 改变为待定函数 $C(x)$，然后求出非齐次线性方程通解的方法，称为**常数变易法**.

将(8-8)式改写成下面的形式：

$$y=C\cdot \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

上式右端第一项恰是对应的齐次线性方程(8-5)的通解;第二项可由非齐次线性方程(8-4)的通解(8-8)中取 $C=0$ 得到,所以是方程(8-4)的一个特解.由此可知,一阶非齐次线性方程的通解是其对应齐次方程的通解与它的一个特解之和.

例 5 求方程 $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$ 的通解.

解 将原方程改写成

$$y'-\frac{2x}{1+x^2}y=1+x^2,$$

所以原方程是线性非齐次的,其中

$$P(x)=-\frac{2x}{1+x^2},Q(x)=1+x^2.$$

下面,我们用两种方法来求原方程的通解.

方法 1(常数变易法):

先求对应齐次方程 $y'-\frac{2x}{1+x^2}y=0$ 的通解.分离变量后积分,依次有

$$\frac{dy}{y}=\frac{2x}{1+x^2}dx,$$

$$\ln y=\ln(1+x^2)+\ln C,$$

所以齐次方程通解为 $y=C(1+x^2)$.

设 $y=C(x)(1+x^2)$,代入原方程,得

$$C'(x)(1+x^2)+2xC(x)-\frac{2x}{1+x^2}C(x)(1+x^2)=1+x^2,$$

$$C'(x)(1+x^2)=(1+x^2),C'(x)=1,C(x)=x+C.$$

由此得到原方程的通解为 $y=(x+C)(1+x^2)$.

方法 2(公式法):

由公式(8-8)得原方程的通解

$$\begin{aligned} y &= e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\left[\int(1+x^2)e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}dx}dx+C\right] \\ &= e^{\ln(1+x^2)}\left[\int\frac{(1+x^2)}{(1+x^2)}dx+C\right]=(1+x^2)(x+C). \end{aligned}$$

有时方程不是关于未知函数 y,y' 的一阶线性方程,若把 x 看成 y 的未知函数 $x=x(y)$,方程成为关于未知函数 $x(y),x'(y)$ 的一阶线性方程

$$\frac{dx}{dy}+P_1(y)x=Q_1(y).$$

这时也可以利用上述方法求解,得到解的形式是 $x=x(y,C)$.对原来的未知函数 y 而言,得到的是由方程 $x=x(y,C)$ 所确定的隐函数.

例 6 求微分方程 $(y^2-6x)\frac{dy}{dx}+2y=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解.

解 原方程不是关于未知函数 y,y' 的一阶线性方程,现改写方程为

$$\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=-\frac{y}{2}, \tag{6}$$

则它是关于 $x(y),x'(y)$ 的一阶线性方程,其中 $P_1(y)=-\frac{3}{y},Q_1(y)=-\frac{y}{2}$.

代入与(8-8)相应的通解公式,得(6)式的通解为

$$x=\mathrm{e}^{-\int P_1(y)\mathrm{d}y}\left[\int Q_1(y)\mathrm{e}^{\int P_1(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]=\mathrm{e}^{\int\frac{3}{y}\mathrm{d}y}\left[\int\left(-\frac{y}{2}\right)\mathrm{e}^{-\int\frac{3}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]$$

$$=\mathrm{e}^{3\ln y}\left[\int\left(-\frac{y}{2}\right)\mathrm{e}^{-3\ln y}\mathrm{d}y+C\right]=y^3\left[\int\left(-\frac{y}{2}\right)y^{-3}\mathrm{d}y+C\right]=Cy^3+\frac{1}{2}y^2.$$

将条件 $y|_{x=1}=1$ 代入上式,得 $C=\dfrac{1}{2}$,于是所求方程的特解为 $x=\dfrac{1}{2}y^2(y+1)$.

例 7 质量为 2kg 的物体,在重力和与速度成正比的阻力作用下,从高 500m 处自由下落.设阻力系数 $k=1.0$,求下落距离和下落速度的变化规律,并求物体落地时间及落地时的速度.

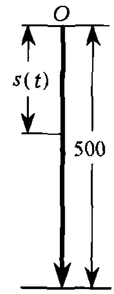

图 8-3

解 如图 8-3 所示,向下为正.设下落距离 $s=s(t)$,则下落速度,加速度分别为

$$v(t)=s'(t),a(t)=s''(t).$$

物体下落过程受力:

重力 $F_1=mg=2g$ (g 为重力加速度),

阻力 $F_2=-kv(t)=-s'(t)$.

据牛顿第二定律 $F=ma$,得 $s(t)$满足方程

$$2s''(t)=2g-s'(t). \tag{7}$$

因为物体是自由落下,所以 $s(t)$还应满足初始条件

$$s(0)=0,s'(0)=0. \tag{8}$$

改写(7)式为

$$2s''(t)+s'(t)=2g,\text{即}[2s'(t)+s(t)]'=2g,$$

所以 $2s'(t)+s(t)=2gt+C_1$.

以初始条件(8)代入,得 $C_1=0$,所以 $s(t)$满足方程

$$2s'(t)+s(t)=2gt,\text{即 } s'(t)+0.5s(t)=gt. \tag{9}$$

(9)式是关于 $s(t),s'(t)$的一阶线性非齐次方程,应用公式(8-8),得

$$s(t)=\mathrm{e}^{-\int 0.5\mathrm{d}t}\left(\int gt\mathrm{e}^{\int 0.5\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right)=\mathrm{e}^{-0.5t}\left(g\cdot\int t\mathrm{e}^{0.5t}\mathrm{d}t+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-0.5t}\left[2g\left(t\mathrm{e}^{0.5t}-\int\mathrm{e}^{0.5t}\mathrm{d}t\right)+C\right]=\mathrm{e}^{-0.5t}[2g(t-2)\mathrm{e}^{0.5t}+C]$$

$$=2g(t-2)+C\mathrm{e}^{-0.5t}.$$

以初始条件 $s(0)=0$ 代入,得 $C=4g$,所以

$$s(t)=2g[t-2(1-\mathrm{e}^{-0.5t})], \tag{10}$$

$$v(t)=s'(t)=2g(1-\mathrm{e}^{-0.5t}). \tag{11}$$

以 $s=500$ 代入(10)式,取 $g=9.8$,得 $500=19.6[t-2(1-\mathrm{e}^{-0.5t})]$,即 $19.6t+39.2\mathrm{e}^{-0.5t}-539.2=0$,求得近似解 $t\approx27.51$.代入(11)式得

$$v(27.51)=2\times9.8(1-\mathrm{e}^{-0.5\times27.51})\approx19.6(\mathrm{m/s}).$$

所以物体约在下落后 27.5s 时落地,落地时的速度约为 19.6m/s.

从速度函数(11)可见,物体下落时开始是加速的,但由于受空气的阻力,当时间 t 稍大后,很快近似于速度为 $2g$ 的均速下落.

随堂练习 8-2

1. 判别下列一阶微分方程中，哪些是属于可分离变量、齐次或线性方程的类型：

(1) $x\mathrm{d}y+y^2\sin x\mathrm{d}x=0$；

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3y=\mathrm{e}^{2x}$；

(3) $\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{x+y^2}$；

(4) $(x+1)y'-3y=\mathrm{e}^x(1+x)^4$；

(5) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=2\sqrt{xy}$；

(6) $(x^2+1)y'+2xy=\cos x$.

2. 求解下列微分方程：

(1) $\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$；

(2) $y'=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}, y|_{x=0}=1$；

(3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2$；

(4) $y^2\mathrm{d}x+(x^2-xy)\mathrm{d}y=0$.

3. 求下列微分方程的通解：

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{\frac{5}{2}}$；

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x+y^3}$.

习题 8-2

1. 求解下列微分方程：

(1) $\mathrm{d}y-\sqrt{y}\mathrm{d}x=0$；

(2) $y'\sin x=y\ln y, y|_{x=\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}$；

(3) $x(y^2-1)\mathrm{d}x+y(x^2-1)\mathrm{d}y=0$；

(4) $y'=\mathrm{e}^{2x-y}, y|_{x=0}=0$；

(5) $y\ln x\mathrm{d}x+x\ln y\mathrm{d}y=0$；

(6) $\sqrt{1-x^2}y'=x, y|_{x=0}=0$.

2. 求解下列微分方程：

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$；

(2) $(x-y)y\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=0$；

(3) $2x^3\mathrm{d}y+y(y^2-2x^2)\mathrm{d}x=0$；

(4) $xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2+x^2, y(1)=1$；

(5) $y'=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}, y|_{x=1}=0$；

(6) $y\mathrm{d}x=\left(x+y\sec\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y, y(0)=1$.

3. 求解下列微分方程：

(1) $y'+y=2\mathrm{e}^x$；

(2) $y'+y\cos x=\mathrm{e}^{-\sin x}, y|_{x=0}=0$；

(3) $x^2\mathrm{d}y+(2xy-x^2)\mathrm{d}x=0$；

(4) $y\mathrm{d}x+(x-\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0, y(2)=3$；

(5) $(x^2+1)y'+2xy-\cos x=0$；

(6) $(x-2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+2(x-2)^3, y|_{x=1}=0$.

4. 设一曲线过原点，且在点(x,y)处的切线斜率等于$2x+y$，求此曲线方程.

5. 已知曲线过点$\left(1,\frac{1}{3}\right)$，且在该曲线上任意一点处的切线斜率等于自原点到该点连线的斜率的两倍，求此曲线的方程.

6. 质量为 5kg 的物体以初速度 100m/s 垂直上抛. 设物体在受重力作用的同时，还受与速度成正比的空气阻力作用，比例系数为 1.0. 求物体的上升高度和上升速度的变化规律.

§8-3　可降阶的高阶微分方程

二阶及二阶以上的微分方程称为**高阶微分方程**. 上节的例 6 就是一个高阶方程，当时我们把二阶方程降阶为一阶，再通过连续两次解一阶方程得到要求的结果. 把高阶方程降阶为阶数较低的方程求解，是求高阶方程的常用技巧之一. 本节将介绍几种特殊类型的高阶方程.

一、$y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程

这种类型的方程的特点是：在方程中解出最高阶导数后，等号右边仅是自变量 x 的函数.

降阶方法：只要通过逐次积分，就能逐次降阶，直到成为一阶方程. 即在两边积分一次，得到 $n-1$ 阶方程 $y^{(n-1)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1$，再积分一次，得到 $n-2$ 阶方程 $y^{(n-2)}=\int\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x+C_1x+C_2$. 如此继续，便可得到所求方程的通解.

例 1　求微分方程 $y'''=x+1$ 的通解.

解　将所给方程两边积分一次，得

$$y''=\int(x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+x+C_1;$$

两边再积分，得

$$y'=\int\left(\frac{1}{2}x^2+x+C_1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2;$$

第三次积分，得

$$y=\int\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{6}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3.$$

二、缺项型二阶微分方程

从二阶微分方程解出二阶导数后，它的一般形式应该是

$$y''=f(x,y,y').$$

所谓缺项型，是指等号右边或者不显含未知函数项 y，成为

$$y''=f(x,y') \tag{8-9}$$

的形式；或者不显含自变量项 x，成为

$$y''=f(y,y') \tag{8-10}$$

的形式.

降阶方法：对缺项型二阶方程，只要引进新变量 $p=y'$，都可以降阶为 p 的一阶方程，只是演化的过程略有区别.