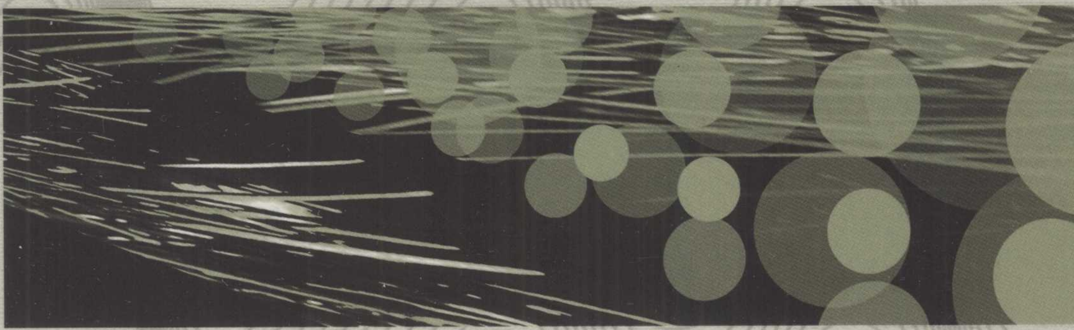
# 高等数学(一)



## 一元函数微积分学

● 曹广福　叶瑞芬　赵红星　编

高等教育出版社
Higher Education Press

# 高等数学(一)

## 一元函数微积分学

曹广福　叶瑞芬　赵红星　编

高等教育出版社

## 内容提要

本教材侧重问题的发现与分析，注重数学思想的挖掘，帮助读者学会如何进行数学猜测，如何从特殊现象中发现一般规律，不仅介绍数学知识，更注重概念、定理来龙去脉的阐述，强化数学应用能力的培养。

本教材语言流畅，通俗易懂。本册为一元函数微积分学，内容包括：函数与极限；导数与微分；导数的应用；积分；定积分的应用；微分方程简介。本教材主要面向地方高等院校非数学类专业的学生，也可作为重点高校学生的参考书。


**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学.1，一元函数微积分学/曹广福，叶瑞芬，赵红星编.—北京：高等教育出版社，2009.1

ISBN 978-7-04-024904-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①曹…②叶…③赵… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O13 O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第191876号

策划编辑 于丽娜　责任编辑 李华英　封面设计 于文燕
责任绘图 尹文军　版式设计 张　岚　责任校对 杨凤玲
责任印制 毛斯璐

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-58581118 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街4号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100120 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　　机 | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 经　　销 | 蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| 印　　刷 | 国防工业出版社印刷厂 | 畅想教育 | http://www.widedu.com |
| 开　　本 | 787×960　1/16 | 版　　次 | 2009年1月第1版 |
| 印　　张 | 18.5 | 印　　次 | 2009年1月第1次印刷 |
| 字　　数 | 340 000 | 定　　价 | 25.30元 |





**物料号　24904-00**

# 前言

曾经有一位中学校长邀请我与他的学生们谈谈如何学好数学，我对中学生们说：要谈如何学好数学，首先应该弄清楚学好数学的标准是什么？如果我是个中学数学教师，在应试教育体制下，我可能会认为，学生考试能得高分就是学好了数学。不过就算他考了满分，也许从进入大学的那一天起，他就开始背叛数学了。作为一名数学工作者，我认为，一个人如果能用数学的眼光去观察各种现象，能用数学的头脑去思考各种问题，能用数学的思想与方法去处理各种事情，那他就学好了数学。前者是应试教育的标准，后者是素质教育的目标。

高等数学是所有大学绝大多数专业都要开设的公共基础课程，涉及面之宽仅次于外语课程，可见其在大学教育中的地位与影响。在全面推行素质教育的今天，如何才能让大学生们真正学好数学？我以为，除了学生因素之外，还有两个十分关键的因素，一是教师的素质，二是教材的水准。从某种意义上说，教材在教学过程中发挥着至关重要的作用。它该告诉读者什么？它要达到什么目的？这是教材编写者必须思考的问题。

微积分堪称古往今来数学史上最伟大的发明创造，其思想的光辉照耀着自然科学、社会科学的几乎每一个角落。然而，遗憾的是，有一些传统的教材将它的思想淹没在一大堆抽象的符号和烦琐的演算之中，学生从教材乃至课堂上看不到微积分思想的光芒，常常为概念的晦涩难懂和演算的纷繁复杂而伤透脑筋。这里我们绝不敢冒天下之大不韪，对任何一本教材评头论足，只想结合多年的教学体会谈谈本教材的编写思路。

许多年来，微积分课程教材与教学改革方案层出不穷，有教学手段的改革，也有教学内容的改革。有一种观点认为，教材内容应该更新，有些甚至试图以勒贝格积分取代黎曼积分，可谓五花八门。传统的微积分真的过时了吗？内容真的陈旧了吗？在我看来，迄今为止微积分依然是最有用的数学，尽管一些新型的积分理论为数学论证带来了极大的方便，但要说可以取代微积分恐怕有些夸大其词。那么，可不可以将一些近代的数学思想与知识充实到微积分课程中呢？我以为，适当地做些介绍以收开阔视野之效未尝不可，但不应该喧宾夺主，侧重点仍然应该是传统的微积分。

经过多年的教学实践，我们认为，教材不应该只是定义、定理、证明、例题的堆砌，更重要的是要阐明这些定义产生的背景是什么？定理的科学意义是什么？如何发现定理的证明思想？阐明作者的观点以及对教材内容的理解，这对于学

生以及大多数的教师具有一定的指导意义，同时对于某些有经验的使用者也是一个重要的参考。

任何数学理论都不是空中楼阁，都有其产生的背景，虽然我们未必能从各种史料中将这些背景都挖掘出来，但我们可以通过合情推理，阐述这些理论的深刻思想内涵。降低理论深度有两层含义，一是有些太烦琐的证明可以作为选学内容不作要求，供有余力的学生学习；二是尽可能采用直观易懂的语言阐述教材内容，在不失数学的严谨性的前提下，能用通俗语言说明白的不用抽象语言，这对初学者尤为重要。我们可以在学生充分理解教材基本内容的基础上适当提高，将理论抽象化，让学生感受一下数学的抽象与简洁之美。

数学教育过程是一个传授思想的过程，我们传统的教育往往把数学当成了一种纯粹的知识与技能来传授，也许学生修完一些数学课程后能用数学进行一些实际计算，但却不懂得如何运用数学的眼光去观察问题、思考问题，著名的数学教育家 Halmos 说过这样的话："具备一定的数学修养比具备一定量的数学知识重要得多。"这或许正是东西方传统教育观念上的重大差别。教材应该反映数学思想，也就是说，它应该告诉读者要思考什么问题？为什么要考虑这样的问题？如何解决这些问题？数学教学应该是一个发现问题、分析问题、解决问题的过程。教材完全可以在这个问题上起到引导与指导作用。

或许有人认为，非数学专业的学生只要学会如何进行简单的数学推理，如何进行数学计算就足够了，我们对此不敢苟同。无论什么专业的学生，只要他要用数学，就应该首先学会如何用数学的眼光去观察问题，学会从个别现象中发现一般规律，从而做出大胆猜测并证明。否则他只能机械地套用数学公式和定理，而不懂得用数学头脑去提出问题与分析问题，终究不会有大作为。

我国的微积分教材是有相当的理论深度的，特别是理工科教材，其深度堪比某些数学专业的教材。当然，对于一些研究型大学来说，学生能经过一些严格的数学基础理论的训练，对于他们日后的科学研究无疑有重要意义。问题是，对于绝大多数非数学类专业的学生而言，他们学习数学的目的是为了应用数学知识（包括数学思想与方法）去解决实际问题。所以，作为教师，应该清楚地知道什么才是这些学生最需要的。在短短的一年多时间里，试图使学生在数学理论上达到一个相当的程度是不现实的。现行的某些教材虽然也介绍了一些数学应用，但理论的深度与应用的广度有些比例失调。我们以微积分第一章函数与极限为例（有些教材将函数与极限分为两章），国内教材通常是从集合与映射的概念出发定义函数，当然，由于学生在中学阶段已经学过集合与映射的概念，在理解上不会带来多大困难，接着，就是基本初等函数及初等函数的介绍，学生学完后，脑袋里装的都是一些抽象的符号，这些符号、概念能干什么？学生能说清楚吗？再说极限概念，我们的教材一般是先介绍圆的面积问题，接着就是一整套抽

象的极限理论,特别是极限的 $\varepsilon-\delta$ 语言弄得学生晕头转向。

传统的高等数学教材有很多手工计算,包括极限计算、导数计算、积分计算等。这些计算固然是重要的,应该有适当训练,但没必要太多。应该让学生适当了解如何进行数值计算与计算机模拟。事实上,随着计算机技术的飞速发展,利用计算机进行大型的数学计算已显得司空见惯,如果我们的学生对此知之甚少,甚至一无所知,恐怕我们的数学教育是不完全的。

诚然,教材改革要符合中国国情,也要与教学大纲相适应,脱离了现行的教学大纲与高校教育现状,教材改革是难以取得成功的。一方面,我们应该认真地思考一下我们的课程教学大纲是否有不合理之处?是否可以改进?另一方面,我们应该在现行的课程体系及教学大纲与教材改革之间寻找一种平衡,使得我们的教材既能真正体现素质教育的要求,又不至于与现状相悖。这的确有难度,但任何一项改革都不是一件轻而易举、一蹴而就的事,更何况是涉及千千万万学子的重要基础课程的改革。

基于上述思想,我们试编了本教材,主要在如下几个方面进行了尝试:

1. 阐明为什么要引入某个概念?如何学会数学猜测?如何从特殊现象中发现一般规律?

2. 采用通俗易懂的语言叙述教材内容,降低对概念、定理及证明理解的难度,阐明概念与定理的深刻思想内涵。

3. 强化数学知识的运用,阐明概念、定理的来龙去脉,说明它们有何重要应用。

4. 适当介绍计算机作图及数值计算,简单介绍一些数学软件。

如果读者阅读了本教材后觉得不仅学到了微积分理论,还知道它能带给我们什么,并在日后的学习与研究中不知不觉地使用它,那么我们的辛苦就没有白费。

在本教材的编写过程中,我们参考了国内外一些微积分教材,包括 James Stewart 编的《微积分》(第五版)、同济大学应用数学系编的《高等数学》(第五版)等,有些例题正是取自这些教材,在此特作说明并致谢。

最后,衷心感谢广州大学校领导与教务部门对本教材的编写所给予的帮助,没有他们的大力支持,本教材是很难顺利完成的。

曹广福

2008 年 4 月

# 目　录


第一章　函数与极限 …… 1

§1　函数及其表示 …… 2

1. 函数及其表示 …… 2

2. 初等函数与数学模型 …… 9

*3. 计算机作图 …… 16

习题 1.1 …… 17

§2　函数的极限 …… 20

1. 数列的极限 …… 21

2. 函数的极限 …… 28

3. 无穷小与无穷大 …… 32

4. 函数极限的运算法则 …… 34

5. 极限存在的条件 …… 38

6. 再论无穷小 …… 43

习题 1.2 …… 44

§3　连续函数 …… 48

1. 连续与间断 …… 48

2. 连续函数的运算 …… 51

3. 初等函数的连续性 …… 52

4. 闭区间上的连续函数 …… 53

*5. 一致连续函数 …… 58

习题 1.3 …… 60

总复习题一 …… 63

第二章　导数与微分 …… 66

§1　导数的定义 …… 67

习题 2.1 …… 72

§2　求导法则 …… 74

1. 基本初等函数的求导公式 …… 74

2. 求导法则 …… 74

习题 2.2 …… 84

§3　高阶导数 …… 87

习题 2.3 …… 90
§4 函数的微分与近似计算 …… 90
1. 线性函数与微分 …… 90
2. 微分公式与微分运算法则 …… 93
3. 近似计算 …… 94
习题 2.4 …… 96
总复习题二 …… 97
**第三章 导数的应用** …… 100
§1 微分中值定理 …… 101
习题 3.1 …… 106
§2 最大值与最小值问题 …… 107
1. 极大值与极小值 …… 107
2. 最大值与最小值 …… 113
习题 3.2 …… 115
§3 洛必达法则 …… 116
习题 3.3 …… 120
§4 泰勒公式 …… 121
习题 3.4 …… 126
§5 函数图像的描绘 …… 127
1. 函数单调性的判断 …… 127
2. 曲线的凹凸性与拐点 …… 130
3. 函数的作图 …… 133
习题 3.5 …… 135
*§6 方程的近似解 …… 136
习题 3.6 …… 139
总复习题三 …… 139
**第四章 积分** …… 141
§1 原函数与不定积分 …… 142
习题 4.1 …… 145
§2 定积分 …… 146
1. 距离问题 …… 146
2. 面积问题 …… 147
3. 定积分的定义 …… 150
4. 定积分的基本性质 …… 152
习题 4.2 …… 155

§3　牛顿－莱布尼茨公式 …… 156
1. 积分上限的函数及其导数 …… 157
2. 牛顿－莱布尼茨公式 …… 158
习题4.3 …… 161
§4　积分法 …… 162
1. 换元积分法 …… 162
2. 分部积分法 …… 170
习题4.4 …… 174
§5　特殊函数的积分 …… 177
1. 三角函数的积分 …… 177
2. 某些无理函数的积分 …… 179
3. 有理函数的积分 …… 182
4. 可化为有理函数的积分 …… 185
习题4.5 …… 188
*§6　定积分的近似计算 …… 189
1. 梯形算法 …… 190
2. 抛物线算法 …… 192
习题4.6 …… 194
§7　反常积分 …… 195
1. 无限区间上的反常积分 …… 195
2. 无界函数的反常积分 …… 201
习题4.7 …… 205
总复习题四 …… 206
**第五章　定积分的应用** …… 209
§1　几何中的应用 …… 210
1. 曲线弧长 …… 210
2. 面积问题 …… 216
3. 体积问题 …… 221
习题5.1 …… 224
§2　在其他方面的应用 …… 226
1. 函数的平均值 …… 226
2. 做功问题 …… 227
3. 压力问题 …… 230
4. 引力问题 …… 232
5. 力矩与质心 …… 234

6. 经济学中的应用 …… 239
习题 5.2 …… 241
总复习题五 …… 243
**第六章 微分方程简介** …… 245
§1 微分方程及其求解 …… 246
1. 利用微分方程建模 …… 246
2. 微分方程求解 …… 247
习题 6.1 …… 260
*§2 微分方程的应用 …… 262
1. 在物理学中的应用 …… 262
2. 在经济学中的应用 …… 266
3. 在生物学中的应用(种群的增长) …… 269
习题 6.2 …… 271
总复习题六 …… 272
**附录 积分表** …… 274

# 第一章
# 函数与极限

世间万物皆是不断变化的，人的生老病死，大海的潮涨潮落，经济市场的瞬息万变，无不体现了一个永恒的真理，不变是相对的，变是绝对的．如何描述各种现象的变化规律？如何预测其变化趋势？函数是反映这些客观规律的重要模型，它告诉我们不同的量在某个过程中的内在关系以及它们的变化规律，通过对这些函数模型的分析可以预测各种相关量的变化趋势．这正是本章要介绍的两个重要概念——函数与极限．

# §1　函数及其表示

## 1. 函数及其表示

### 1.1　函数的定义

为了建立反映某个变化过程中各种对象的相互关系及变化规律的模型，首先要将各种对象进行量化，通常用数(自然数、实数或复数)来表示这些不断变化对象的特定状态. 换句话说，随着对象的不断变化，反映这些对象特定状态的数也在不断变化，我们把这些不断变化的数称之为变量(当然，有时候仅仅用数未必能反映某事物的状态，但这不在微积分的讨论范围).

在一个变化过程中，不同的变量相互间往往是有内在关系的. 例如：一天中温度的变化与时间有关；商品的销售量与价格有关. 如果一个变量依赖于另一个变量，我们就说前者是后者的函数.

**定义 1.1**　设 $A,B$ 都是实数集，如果对 $A$ 中的每一个元 $x$，都有 $B$ 中唯一的元与之对应，通常记这个元为 $f(x)$，则称对应关系 $f:x\to f(x)$ 为定义在 $A$ 上的**函数**. $A$ 称为函数 $f$ 的定义域，集合 $f(A)\{f(x)\mid x\in A\}$ 称为函数 $f$ 的值域. $A$ 中代表任一值的符号 $x$ 称为自变量，代表 $f$ 值域里任一个值的符号称为因变量. 通常用 $x$ 表示自变量，$y$ 表示因变量. 这样 $y$ 与 $x$ 的函数关系可写作 $y=f(x)$. 我们也称 $y$ 是 $x$ 的函数.

**例 1.1**　设正方形的边长为 $x$，则面积 $S=x^2$. 对每一个正数 $x$，都存在一个相应的 $S$ 的值，即 $S$ 是 $x$ 的函数.

**例 1.2**　一天中温度 $y$ 随着时间 $t$ 而变化，即每一个时刻 $t$，都有一个特定的温度 $y$ 与之对应，故 $y$ 是 $t$ 的函数.

当然，函数关系的建立，有时不是一件容易的事. 例如，例 1.2 中要明确写出 $y$ 与 $t$ 的函数关系实际是做不到的. 很多时候，为了便于分析，往往需要做一些合理的假设，从而使问题的研究变得简单一点，但又能比较准确地反映客观规律. 很多数学模型其实只是实际问题的近似，但只要这种近似是合理的，并不影响我们对问题的客观判断.

### 1.2　函数的表示

函数的表示方式不是唯一的，往往需要根据不同的问题选择不同的表示方式. 有时我们也需要尝试用不同的方式表示同一个函数，从而获得对这个函数的更多了解. 那么有多少种表示函数的方法呢？归纳起来，一般有下列四种：

(1) **描述法**　用文字来描述两个变量之间的函数关系.

**例 1.3**　商品的销售量是价格的函数，也就是说，给定一个价格都有一个销售量与之对应. 这里应该看到，影响商品销售量的因素不仅仅是价格，还有其他

许多因素,例如购买者的消费水平等,但是价格是主要因素,所以,这里实际上对现实作了一次合理的近似,即假定销售量仅与价格有关,这对于分析销售量的变化规律并没有实质性的影响.

(2) **数值法** 将函数值用列表的方式表示出来. 这种表示方法在各种财务报表中是很常见的. 我们的成绩表也代表了一个函数关系,在这个表中,每一个学号都对应一个分数,分数是学号的函数.

(3) **图像法** 用函数的图像来描述函数关系. 这种表示法的优势在于函数的变化规律一目了然.

**例 1.4** 图 1.1 显示了商品的销售量 $Q$ 随价格 $p$ 的变化规律,该图清楚地显示,当价格上涨时,销售量下降.

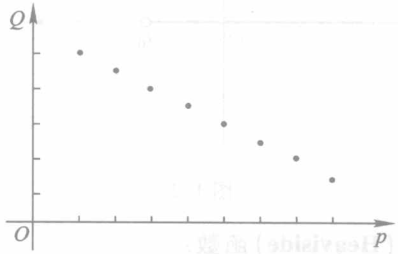



图 1.1

(4) **公式法** 用一个数学公式将函数关系表示出来. 这是微积分中用得最多的一种表示法,它便于我们做定性和定量分析.

**例 1.5** 试写出球半径 $r$ 与体积 $V$ 之间的函数关系.

**解** $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

利用微积分解决实际问题的一个关键技巧是:**实际问题往往是用文字描述了两个量之间的函数关系,而我们要将之转换为数学公式**. 这是我们解应用题的一个基本技巧.

**例 1.6** 某房东有 100 套住房,如果以每套 1 800 元/月的价格出租,则 100 套住房刚好全部租出,若每套增加 100 元/月,则将少租出一套,每套房屋的维护费为 30 元/月,试建立房东的收入与房屋租金之间的函数关系.

**解** 假设每套房的租金为 $x$ 元/月,房东的收入为 $y$,依题意有

$$y=(x-30)\left(100-\frac{x-1\ 800}{100}\right).$$

### 1.3 分段函数

有时候我们也许无法用一个统一的数学公式来表达一个函数,也就是说,在某一个变化过程中,两个变量的对应关系可能需要用不同的形式来表示. 例如,

电路工程中常出现的一种现象是:在某个时刻 $t_0$ 前,电路无电流通过,而从时刻 $t_0$ 开始,施加一个单位的电流,并保持不变,用数学公式来表示就是

$$H(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant t_0,\\ 0, & t<t_0.\end{cases}$$

其图像(如图 1.2)为

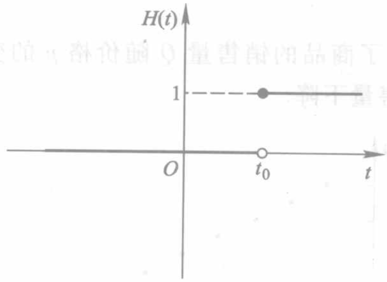



图 1.2

这就是著名的**赫维赛德(Heaviside)函数**.

在定义域的不同部分用不同的公式来表示的函数称为**分段函数**.

**例 1.7** 作出下列函数的图像,并求 $f(-1),f(0),f(1)$ 的值.

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x, & x<0.\end{cases}$$

**解** 若 $x<0$,则 $f(x)=x$;若 $x\geqslant 0$,则 $f(x)=x^2$. 因此,函数图像由两部分组成,位于 $y$ 轴左边的部分是斜率为 1 的直线,位于 $y$ 轴右边的那部分是抛物线(如图 1.3).

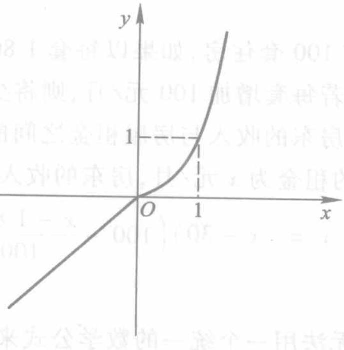



图 1.3

易知

$$f(-1)=-1,\quad f(0)=0,\quad f(1)=1.$$

一个常见的分段函数是绝对值函数,即 $f(x)=|x|$,它可以写为

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x & x<0.\end{cases}$$

其图像(如图 1.4)为

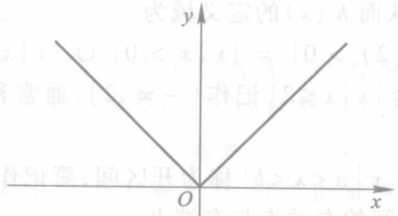


图 1.4

另一个常用的分段函数是取整函数 $f(x)=[x]$:对任意实数 $x$,$[x]$ 定义为不超过 $x$ 的整数. 例如 $[4]=4$,$[4.01]=4$,$[-4]=-4$,$[-4.01]=-5$. 这个函数称为**取整函数**. 显然,取整函数是分段函数.

还有两个分段函数也是常用的,即所谓的最大值函数与最小值函数. 设 $a,b$ 是两个任意实数,$\max\{a,b\}$ 表示取 $a,b$ 中较大者,即当 $a>b$ 时,$\max\{a,b\}=a$;当 $a<b$ 时,$\max\{a,b\}=b$. $\min\{a,b\}$ 表示取 $a,b$ 中较小者,即当 $a>b$ 时,$\min\{a,b\}=b$;当 $a<b$ 时,$\min\{a,b\}=a$. 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是定义在区间 $I$ 上的函数,定义

$$\max\{f,g\}(x)=\max\{f(x),g(x)\},$$
$$\min\{f,g\}(x)=\min\{f(x),g(x)\}.$$

$\max\{f,g\}(x)$ 称为**最大值函数**,$\min\{f,g\}(x)$ 称为**最小值函数**.

## 1.4　函数的定义域

从函数的定义可以看到,确定一个函数有两个要素,即定义域与函数关系. 除了要用适当的方式表示一个函数,还要搞清楚自变量的变化范围,也就是需确定函数的定义域. 当定义域与函数关系确定后,函数的值域将随之而定. 有时候,函数的定义域是事先给定的,很多时候,函数的定义域往往隐藏在函数的表达式中,需要我们去发现.

**例 1.8**　求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\sqrt{2-x}$;　(2) $g(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+1}$;

(3) $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}}$.

**解** (1) 因为负数平方根没有意义,所以 $f(x)$ 的定义域为

$$\{x \mid 2-x \geqslant 0\}=\{x \mid x \leqslant 2\}.$$

(2) 由于分母不能为零,故 $g(x)$ 的定义域由所有使得 $x^2-2x+1 \neq 0$ 的点组成,故 $g(x)$ 的定义域为

$$\{x \mid x^2-2x+1 \neq 0\}=\{x \mid (x-1)^2 \neq 0\}=\{x \mid x \neq 1\}.$$

(3) 因为分母不能为零,负数没有平方根,故 $h(x)$ 的定义域由所有使得 $x^2+2x>0$ 的点 $x$ 组成,从而 $h(x)$ 的定义域为

$$\{x \mid x(x+2)>0\}=\{x \mid x>0\} \cup \{x \mid x<-2\}.$$

为了简便,也将集合 $\{x \mid x \leqslant 2\}$ 记作 $(-\infty, 2]$,通常称这类集合为区间,我们常用的区间有:

(1) **开区间** 集合 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间,简记作 $(a, b)$,此处 $a, b$ 都是实数,$a, b$ 分别称为开区间的左端点与右端点.

(2) **闭区间** 集合 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间,简记作 $[a, b]$,$a, b$ 分别称为闭区间的左端点与右端点.

(3) **半开半闭区间** 集合 $\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 或 $\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 都称为半开半闭区间,分别记为 $[a, b)$,$(a, b]$.

以上区间都称为有限区间,$b-a$ 称为区间的长度.直观地看,这些区间代表数轴上的一条有限线段.

如果 $a$, $b$ 是实数,则集合 $\{x \mid a<x<+\infty\}$,$\{x \mid -\infty<x<b\}$,$\{x \mid a \leqslant x<+\infty\}$,$\{x \mid -\infty<x \leqslant b\}$ 称为无限区间,分别记为 $(a,+\infty)$,$(-\infty, b)$,$[a,+\infty)$,$(-\infty, b]$.

图 1.5 显示了这些区间:

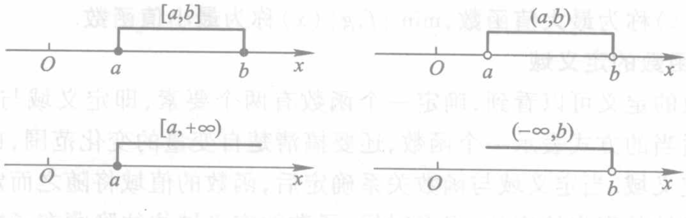



图 1.5

如果 $x_0 \in (a, b)$,也称 $(a, b)$ 为 $x_0$ 的一个**邻域**,称 $(a, b) \backslash \{x_0\}$ 为 $x_0$ 的**去心邻域**.特别地,对任意的正数 $\delta>0$,称 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为 $x_0$ 的 **$\delta$-邻域**,称 $(x_0-\delta, x_0+\delta) \backslash \{x_0\}$ 为 $x_0$ 的**去心 $\delta$-邻域**.

## 1.5 函数的特性

研究函数的目的是为了分析不同变量之间的相互依赖关系及其变化规律. 也就是说,当自变量发生变化时,因变量会发生怎样的变化?我们通常关心函数什么样的变化特征呢?从函数的图像我们不难理解,如果我们知道函数的曲线在什么范围内、什么时候上升、什么时候下降、关于某个参照系(通常是点或直线)是否对称等,那么这个函数图像的大致的形状也就清楚了,或者说函数的大概的变化规律也就清楚了. 由此可见,函数的如下几个特性是我们应该关心的:

(1) **函数的有界性** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$, $X$ 是 $D$ 的一个子集,如果存在常数 $K_1$,使得对任意的 $x \in X$,有

$$f(x) \leqslant K_1,$$

则称 $f(x)$ 在 $X$ 上有**上界**,而 $K_1$ 称为函数 $f(x)$ 在 $X$ 上的一个上界. 如果存在常数 $K_2$,使得对任意的 $x \in X$,有

$$f(x) \geqslant K_2,$$

则称 $f(x)$ 在 $X$ 上有**下界**,而 $K_2$ 称为 $f(x)$ 在 $X$ 上的一个下界. 如果存在正常数 $K$,使得对任意的 $x \in X$,有

$$|f(x)| \leqslant K,$$

则称 $f(x)$ 在 $X$ 上**有界**. 如果找不到这样的 $K$ 使得上面的不等式成立,则称 $f(x)$ 在 $X$ 上无界.

**例 1.9** 判断下列函数在其定义域内是否有界:

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0,1)$; (2) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in (0,1)$.

**解** (1) $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上无界. 这是因为不管 $K$ 取何值,只要 $x$ 很小,必有 $|f(x)| \geqslant K$. 事实上,对任何固定的正数 $K$,只要 $0 < x < \dfrac{1}{K}$,就一定有 $\dfrac{1}{x} > K$.

(2) $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有界. 这是因为不管 $x$ 取何值,其正弦函数值总是在 $[-1,1]$ 中,即 $\left|\sin \dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$.

**函数有界的重要性在于,当某个变量发生变化时,与之相关的量是不是可以控制.**

(2) **函数的单调性** 设函数 $f(x)$ 是定义在 $D$ 上的函数, $I$ 是 $D$ 的一个子区间,如果对任意 $x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是**单调递增的**;如果对任意 $x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,有

$$f(x_1) > f(x_2),$$