◆ 高职高专系列教材 ◆

高等数学

主编　陆美芳　欧志旋

GAODENG

SHUXUE

$F'(x)=f(x)$

$\int f(x)\,dx=F(x)+c$

广西人民出版社

高 等 数 学

主编　陆美芳　欧志旋

广西人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 陆美芳主编. —南宁：广西人民出版社，
2008.8
ISBN 978-7-219-06289-0

Ⅰ. 高… Ⅱ. 陆… Ⅲ. 高等数学—高等学校：技术学校—
教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 102747 号

策　　划：王先明
责任编辑：张　平

出　版　广西人民出版社
社　址　广西南宁市桂春路 6 号
邮　编　530028
网　址　http://www.gxpph.cn
发　行　全国新华书店
印　刷　南宁市社会福利印刷厂
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　13
字　数　300 千字
版　次　2008 年 8 月　第 1 版
印　次　2008 年 8 月　第 1 次印刷
书　号　ISBN 978-7-219-06289-0/G・1492
定　价：25.00 元

前　言

高职高专教育是我国高等教育体系的重要组成部分。我国的高职教育面临着新的形势，职业教育与培训创新工程的任务要求：以促进就业为目的，进一步转变高等教育职业技术学院的办学指导思想，实行多样化、灵活、开放的人才培养模式，把教育教学与生产实践、社会服务、技术推广结合起来、加强实践教学和就业能力的培养。为适应这一要求，以“市场为导向、产学结合”为主要特点的专业建设和课程改革已在高职高专院校展开，在这一新形势下，本教材就是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写而成的。定位在“以应用为目的，以必须够用为度”的平台上，力图做到“精选内容、降低理论、加强基础、突出应用”对内容体系做了局部调整，以更好地体现“高职高专”的特色。本教材简略了定理的推导，着重于方法、规律的介绍，在叙述中注意文字简练、清晰准确、循序渐进、由浅入深，并加入了更多有利于学生更好掌握计算方法的练习，力图使学生准确掌握必需的数学知识，提高应用数学知识的能力，为培养高层次、复合型、实用型高质量人才打下坚实的基础。

《高等数学》内容包括极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、微分方程、行列式、矩阵及线性方程。每章附有习题。

本书的编写过程中得到了学院领导、老师和学生的大力支持和帮助，在此一并致谢。

由于编者水平有限，书中难免有疏漏、不足之处，恳请广大读者批评指正，以便再版时改进。

目　　录

第一章　函数、极限与连续

变量是微积分研究的主要对象，函数反映了变量之间的依存关系，因此，它是微积分中最重要的概念之一．极限是高等数学的理论基础，极限概念是微积分中最重要、最基本的概念之一．微积分中很多重要概念和运算都是建立在极限概念基础上的．因此，掌握好极限的理论和方法是学好微积分的必要前提．

§1.1 函　　数

1.1.1　变量与区间

1．常量与变量

在研究事物运动中，常会遇到两种不同的量．如果一个量在某一个过程中保持不变，总是取一个值，则称这种量为**常量或常数**，例如长度、面积、体积、温度、时间、距离、速度等．如果一个量在某一个过程中是变化的，即是可以取不同的数值，则称这种量为**变量或变数**，如某个路口通过的车辆数．

常量通常用 a,b,c 等表示，变量常用 x,y,z 表示．

常量和变量依赖于所研究的过程．同一个量，在某一个过程中是常量，而在另一个过程中则可能是变量．因此，常量和变量是可以相互转化的．比如重力加速度 g，在地球表面它是一个常量，但到了太空它就是变量了．

2．绝对值

任何实数的绝对值记作 $|a|$，定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & a\ge 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$$

$|a|$ 在几何上表示实数轴上点 a 到原点的距离．绝对值及其运算性质：

（1）$|a|=\sqrt{a^2}$；

（2）$|a|\ge 0$；

（3）$|-a|=|a|$；

（4）$-|a|\le a\le |a|$；

（5）$|a+b|\le |a|+|b|$；

（6）$|a-b|\ge |a|-|b|$；

(7) $|ab| = |a| \cdot |b|$;

(8) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}(b \neq 0)$;

(9) 设$a > 0$，则$|x| < a$的充要条件是$-a < x < a$；

(10) 设$a > 0$，则$|x| > a$的充要条件是$x < -a或x > a$；

3．区间

区间是数学中常用到的实数集，区间有 4 种有限区间和 5 种无限区间，如下：
有限区间：(其中a和b是确定的实数，分别叫做区间的左端点和右端点，且$a < b$)

(1) 闭区间：$[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}$；

(2) 开区间：$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$；

(3) 半开半闭区间：$(a,b] = \{x \mid a < x \le b\}, [a,b) = \{x \mid a \le x < b\}$.

无限区间：$[a,+\infty) = \{x \mid x \ge a\}, (a,+\infty) = \{x \mid x > a\}$；

$(-\infty,b] = \{x \mid x \le b\}, (-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$;

$(-\infty,+\infty) = \{x \mid x \in R\}$.

区间右端点b与左端点a的差$b-a$成为区间长度．$+\infty$和$-\infty$，分别读作正无穷大和负无穷大，它们不表示任何数，仅仅是记号．

4．邻域

定义：设a与δ 是两个实数，且$\delta > 0$，满足不等式$|x-a| < \delta$的实数集，即

$$\{x \mid |x-a| < \delta, \delta > 0\} = (a-\delta < x < a+\delta)$$

称为点a的δ邻域，点a称为邻域的中心，δ称为邻域的半径．

有时候用到的邻域不包括邻域中心，点a的δ邻域内去掉中心a后，所得的区间$(a-\delta,a) \cup (a,a+\delta)$称为点$a$的$\delta$去心邻域，即

$$\{x \mid 0 < |x-a| < \delta, \delta > 0\}$$

1.1.2 函数

1．概念

在许多的现象中，变量的变化常常是相互关联、相互依赖的．

定义：如果变量x在其变化范围D内任取一个数值，变量y按照某一对应关系总有唯一一个数值和它对应，则称变量y为变量x的函数，记作$y = f(x), x \in D$．

其中x称为自变量，f称为对应关系（或对于法则）；自变量x的变化范围D称为函数的定义域．

自变量x取定某一个数值x_0时，对应的函数y的值称为称为函数$y = f(x)$在点x_0处的函数值，记作$y = f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$．当自变量x取遍定义域D内的各个数值时，对应所有的函数值组成的集合称为这个函数的值域．

2．函数表示方法

常用的函数表示方法有如下三种：

（1）公式法．用数学式子表示函数的方法称为公式法．这种表示法便于对函数进行理论上的研究，它的优点是关系清晰，缺点是不够直观，较抽象．

（2）列表法．在实际应用中，常把自变量x的数值与对应的函数值y列成表格，这种表示函数的方法称为列表法，这种表示方法的优点是自变量x的取值和与之对应的函数值能够直接从表格中查到，缺点是自变量x的取值有限．

（3）图示法．图示法就是用图形表示函数的方法，这种方法优点是函数的变化很直观，便于研究函数的几何性质，缺点是不便于做理论研究．

3．函数的几种特性

（1）函数的奇偶性

定义：设函数$f(x)$的定义域关于原点对称，如果对于定义域内任何x都有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为该定义域上的偶函数，如$y=\cos x, x\in R$；如果对于定义域内任何x都有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为该定义域上的奇函数，如$y=\sin x, x\in R$．

由定义可知，偶函数的图象关于y轴对称，奇函数的图象关于原点对称．

（2）函数的单调性

定义：设函数$f(x)$在区间D上有定义，对于任意x_1、$x_2\in D$，且$x_1<x_2$时，如果恒有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数$f(x)$在区间D内单调增加（或单调减少），称区间D为$f(x)$的单调增区间（或单调减区间）．

单调增加函数和单调减少函数统称单调函数．

（3）函数的周期性

定义：设函数$y=f(x)$，如果存在正的常数T，使得对于定义域任何x，均有$x\pm T$也在定义域内，且恒有 $f(x\pm T)=f(x)$ 成立，则称函数$y=f(x)$为周期函数，称T为函数$y=f(x)$的周期，通常所说的周期函数的周期是指最小正周期．

（4）函数的有界性

定义：函数$y=f(x)$在区间D内有定义，如果存在一个正数M，对于所有的$x\in D$，恒有$|f(x)|\le M$，则称函数$y=f(x)$在D内有界；如果这样的正数M不存在，则函数$y=f(x)$ D内无界．

例如，函数$f(x)=\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内是有界的，因为对于任意的$x\in R$，恒有$|\cos x|\le 1$存在，这里的$M=1$（当然也可以取大于 1 的任何正实数作为M，使$|\cos x|\le M$成立）．

又如函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间（1，2）内是有界的，但在（0，1）内是无界的．

1.1.3 初等函数

1．反函数

函数$y=f(x)$反映的是y怎样因x的变化而变化的，但变量之间的关系是相互制约的，故y的变化影响x的变化．

定义：设y是x的函数$y=f(x)$，如果把当y作自变量，x当作函数，则由关系

$y=f(x)$所确定的函数$x=\varphi(y)$，称为函数$y=f(x)$的反函数，记作$x=f^{-1}(y)$.

由于习惯上采用字母x表示自变量，y表示x的函数，因此，将$x=\varphi(y)$中的y改写成x，x改写成y，这样，$y=f(x)$的反函数就写成$y=\varphi(x)$或$y=f^{-1}(x)$. 显然，$y=f(x)$和$y=f^{-1}(x)$是互为反函数，它们的图象关于直线$y=x$对称.

2. 基本初等函数

（1）常数函数　$y=c$，$(x\in R)$

如$y=2$，$y=-1$等。

（2）幂函数　$y=x^{\alpha}(\alpha为常数)$

一般地，函数$y=x^{\alpha}(\alpha为常数)$叫做幂函数，其中x是自变量，α是常数，如$y=x^2,y=x^{-\frac{1}{2}}$.

（3）指数函数　$y=a^x(a>0且a\neq1)$

一般地，函数$y=a^x(a>0且a\neq1)$叫做指数函数，其中x是自变量，函数的定义域是R.

指数幂运算有下列性质：$a^m a^n=a^{m+n},\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n},(a^m)^n=a^{mn}$

（4）对数函数　$y=\log_a x(a>0且a\neq1)$

一般地，如果$a^x=N(a>0且a\neq0)$，那么数x叫做以 a 为底 N 的对数，记作$x=\log_a N$，其中a叫做对数的底数，N叫做真数.

对数运算有下列性质：

①$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$

②$\log_a(\dfrac{M}{N})=\log_a M-\log_a N$

③$\log_a M^n=n\log_a M$

特别地

①$\log_a 1=0$　（$a^0=1$）；　　②$\log_a a=1$　（$a^1=a$）.

通常将以 10 为底的对数称为常用对数，如 $\log_{10}2$、$\log_{10}12$ 等，并把对数 $\log_{10}N$ 简记为 $\lg N$，如 lg2、lg12 等.

在科学技术中，常常使用以 e（e=2.71828…是一个无理数）为底的对数，这种对数称为自然对数.正数 N 的自然对数 $\log_e N$ 一般简记为 $\ln N$，如 ln2、ln15 等.

我们把函数$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）叫做**对数函数**，其中 x 是自变量，函数的定义域是$(0,+\infty)$.

*①指数式和对数式的关系　$N=a^b\Leftrightarrow b=\log_a N$

②同底数的指数函数和对数函数互为反函数.

（5）三角函数　$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$；

（6）反三角函数　$y=\arcsin x,x\in[-1,1],y\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$；

$$y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi];$$

$$y=\arctan x, x\in R, y(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2});$$

$$y=arc\cot x, x\in R, y\in(0,\pi).$$

3．复合函数

定义：如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或一部分在 $f(u)$ 的定义内，那么 y 通过 u 的联系也是 x 的函数，我们称 y 是 x 的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 u 是中间变量。

例 1　已知 $y=f(u)=\sqrt{u}$，　$u=\varphi(x)=a^2-x^2$

则　$y=f[\varphi(x)]=\sqrt{a^2-x^2}$ 称为复合函数.

利用复合函数的概念，一个较复杂的函数可以看成几个简单函数复合而成，这样更便于对函数进行研究使用.

例 2　函数 $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$ 可以看成是由

$y=e^u, u=\sqrt{v}=v^{\frac{1}{2}}, v=x^2+1$ 三个函数复合而成.

4．初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算所构成，并能用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

例如　$y=\dfrac{\cos^3 x-5}{2x}$，$y=\log\sqrt{x^2-3x-2}$ 等都是初等函数.

1.1.4　分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量不同的值，不能用一个解析式表示的，而用两个或两个以上的解析式表示的函数，称为分段函数.

例 3　$y=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的分段函数，其图形如图 1-1 所示.

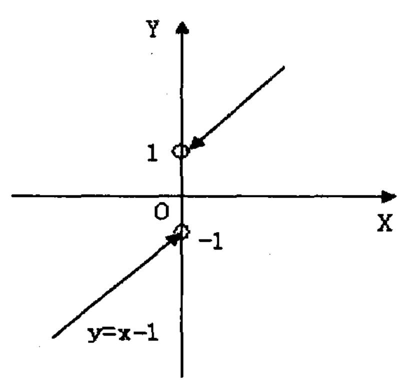

图 1-1

初学者对把分段函数叫做一个函数，往往很不习惯．在他们看来，既然是两个式子，就应算做两个函数，这种“函数就是一个式子”的片面观念必须改变.

例 4　设 $y=f(x)=\begin{cases}x+2 & (0\le x\le 2)\\ x^2 & (x>2)\end{cases}$

求它的定义域和　$f(1), f(3), f(x-1)$.

解 定义域为$[0,2]\bigcup(2,+\infty]=[0,+\infty)$，

$f(1)=1+2=3$

$f(3)=3^2=9$

$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+2 & (0\le x-1\le 2)\\ (x-1)^2 & (x-1>2)\end{cases}$$

即 $$f(x-1)=\begin{cases}x+1 & (1\le x\le 3)\\ (x-1)^2 & x>3\end{cases}$$

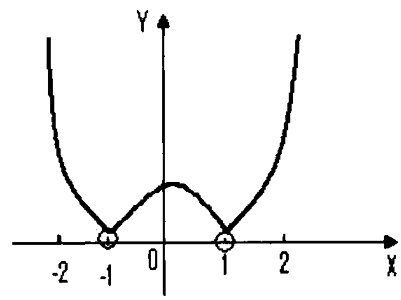

图 1-2

例 5 $$y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & (|x|<1)\\ x^2-1 & (|x|>1)\end{cases}$$

这个函数在$|x|=1$时无定义，它的定义域为$D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$．其图见图 1-2.

例 6 某商店销售一种商品，当销售量x不超过30件时，单价为a元，若超过30件时，其超出部分按原价的90%计算，试求销售价y与销售量x之间的函数关系式.

解 由题意知：销售量为x，销售价为y.

当$0\le x\le 30$时，$y=xa$

当$x>30$时，$y=30a+(x-30)\times 90\%\cdot a$

$$y=\begin{cases}xa & (0\le x\le 30)\\ 0.9ax+3a & (x>30)\end{cases}$$

§1.2 极 限

1.2.1 数列极限

极限概念是由求某些实际问题的精确解答而产生的．例如，圆的面积是怎么求？公元3世纪，我国古代数学家刘徽，就利用圆的内接正多边形来推算圆的面积（这种方法称为割圆术）：设有半径为R的圆，先作圆的内接正六边形，把它的面积记为A_1；再作内接正十二边形，面积记为A_2；再作内接正二十四变形，面积记为A_3；依此类推得到一系列圆内接正多边形的面积：

$$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$$

它们构成一列有次序的数，显然，当n越大，内接正多边形的面积与圆的面积就越接近，因此用A_n作为圆面积近似值的误差就越小．当然，只要取定n，无论它多大，A_n表示的还只是正n多边形的面积，所以，假设n无限增大，内接正多边形就无限接近圆，同时圆内接正多边形的面积$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$将无限接近于某一个确定的数值，即圆的面积$\pi R^2$．这个“无限接近”的过程就是数学上的极限过程.

定义：一个定义在正整数集上的函数$y_n=f(n)$，称为整标函数，当自变量n按正整数 1，2，3，…依次增大的顺序取值时，函数值按相应的顺序排成一列数：

$$f(1), f(2), f(3), \cdots, \ f(n), \ \cdots$$

称为一个**无穷数列**，记为 $\{y_n\}$ 或 $\{f(n)\}$，属于数列中的项数是无穷多项的类型. 其中，数列中的每一个数称为数列的项，y_n 或 $f(n)$ 称为数列的通项或一般项.

对于数列 $\{y_n\}$，主要研究当项数无限增大（记为 $n \to \infty$，读作 n 趋向于无穷大）时，通项 y_n 的变化趋势.

例 1 考察数列 $\{n\}$

这个数列的通项 $y_n = n$，当 $n = 1,2,3,4,\cdots$ 时，该数列为

$$1，2，3，4，\cdots$$

当项数 n 无限增大时，y_n 也无限增大

例 2 考察数列 $\{\dfrac{n}{n+1}\}$

这个数列的通项是 $y_n = \dfrac{n}{n+1}$，当 n =1, 2, 3, 4, $\cdots$, 时，数列为

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$$

当 n 无限增大时，y_n 无限趋近于常数 1.

例 3 考察数列 $\{1 + (-1)^n \dfrac{1}{n}\}$

这个数列的通项是 $y_n = 1 + (-1)^n \dfrac{1}{n}$, 当 n =1，2，3，4，$\cdots$时，该数列为

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7}, \cdots$$

当 n 无限增大时，$1 + (-1)^n \dfrac{1}{n}$ 将越来越趋于常数 1.

例 4 考察数列 $\{\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}\}$

这个数列的通项是 $y_n = \dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$，当 n =1，2，3，4，$\cdots$时，该数列为

$$1，0，1，0，1，0，1，\cdots$$

当 n 为奇数时，$y_n = 1$，当 n 为偶数时，$y_n = 0$，n 无限增大的过程中，y_n 没有趋于某个固定的常数.

上面 4 个例子说明，当相数 n 无限增大时，数列的变化趋势不尽相同. 如果数列中 y_n 随着数列的无限增大而趋于某个常数，即 y_n 与该常数的距离无限趋于零，我们认为该数列以这个常数为极限.

定义：设数列 $\{y_n\}$，如果当 n 无限增大时，对应的值 y_n 无限地接近于某一个确定的常数 A，则称该常数 A 是数列 $\{y_n\}$ 的**极限**，或称**数列收敛于** A. 记为

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \quad 或 \quad y_n \to A(n\to\infty)$$

如果当n无限增大时，对应的值y_n不能趋于某个确定的常数A，则称当$n\to\infty$时数列$\{y_n\}$发散或极限不存在.

由定义可知，例 2、例 3 中的数列都是收敛的，其极限值都是 1. 可分别表示为

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}[1+(-1)^n\frac{1}{n}] = 1$$

但是，例 4 中的数列，当$n\to\infty$时，$y_n = \dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$ "振荡"的取值 1 或 0，它不能趋于一个确定常数，所以此数列是发散的.

例 5 观察下面两个数列是否有极限，若有极限，指出其极限值；若没有，指出理由.

（1）$0,1,0,\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{4},\cdots,\dfrac{1+(-1)^n}{n},\cdots$

（2）$\{\sqrt{n+1}\}$

解 （1）数列的通项为$y_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$，所以当$n\to\infty$时，数列无限接近于常数 0.

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{n} = 0$$

（2）数列的通项为$y_n = \sqrt{n+1}$将随着n的无限增大而增至任意的大，没有趋近于某一确定的常数，因此，该数列的极限不存在，即数列y_n发散，可表示如下：

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1} = \infty$$

对于数列$\{y_n\}$，当$n\to\infty$时，y_n不趋于一个确定常数，但$|y_n|$有一个确定的变化趋势$|y_n|\to+\infty$。此数列是不符合数列收敛定义的，即

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$$

是数列发散的一种情形.

1.2.2 函数极限

数列是定义于正整数集合上的函数，数列的极限只是一种特殊函数的极限. 根据自变量变化过程，函数有如下两种情形：

1. $x\to\infty$时函数$f(x)$的极限

自变量x趋于无穷大有下面三种方式：

$x\to+\infty$，表示x沿着x轴的正半轴趋于无穷大；

$x\to-\infty$，表示x沿着x轴的负半轴趋于无穷大；

$x\to\infty$， 表示x沿着x轴的任意方向趋于无穷大，即$|x|\to+\infty$. 所以$x\to\infty$包含$x\to+\infty$和$x\to-\infty$这两个过程.

例如函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$，当 $|x|$ 无限增大时，即 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 这两个过程中，都有其对应的函数值 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 无限接近于常数 0.

定义：设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|>M$（M 为某一正数）内有定义，如果当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=f(x)$ 的值无限接近于某一常数 A，则称常数 A 为函数 $y=f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty)$$

例如函数 $y=\frac{1}{x}+1$，当 $x\to\infty$ 时，都有 $\frac{1}{x}$ 无限地接近于 0，所以有

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+1)=1$$

有时我们根据函数本身的特点，只研究当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的变化趋势。

定义：设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|>M$（M 为某一正数）内有定义，如果当 $x\to+\infty$ 时，函数 $y=f(x)$ 的值无限接近于某一常数 A，则称常数 A 为函数 $y=f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to+\infty)$$

定义：设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-M)$（M 为某一正数）内有定义，如果当 $x\to-\infty$ 时，函数 $y=f(x)$ 的值无限接近于某一常数 A，则称常数 A 为函数 $y=f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to-\infty)$$

例　求当 $x\to+\infty$ 时，函数 $y=(\frac{1}{3})^x$ 的极限；若 $x\to-\infty$ 和 $x\to\infty$ 时，函数 $y=(\frac{1}{3})^x$ 的极限又分别是多少？

解　当 $x\to+\infty$ 时，函数 $y=(\frac{1}{3})^x$ 的值无限接近于 0，从而

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{3})^x=0$$

当 $x\to-\infty$ 时，$\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{3})^x=+\infty$；

当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=(\frac{1}{3})^x$ 的值没有无限接近于同一个常数，即 $\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{3})^x$ 的极限不存在.

对于自变量 x 趋于无穷大的不同情形，有下列关系：

定理　$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$.

2. $x \to x_0$时函数$f(x)$的极限

有时我们只需研究x趋于某个常数x_0（记为$x \to x_0$，读作x趋于x_0）时函数$y = f(x)$的变化情况.

例 考察当$x \to 0$时，函数$y = -x^2 + 1$的变化趋势.

解 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$．当x充分靠近0时，x^2就无限地趋近于0，所以当$x \to 0$时，函数$y = -x^2 + 1$的取值无限地趋近于1.

例 考察当$x \to -1$时，函数$y = \dfrac{x^2 - 1}{x+1}$的变化趋势.

解 函数在$x = -1$处无定义. 但是函数$y = \dfrac{x^2 - 1}{x+1}$与函数$y = x - 1$，$(x \neq -1)$相同，所以当x无限接近于-1 时，函数$y = \dfrac{x^2 - 1}{x+1}$的值无限地接近于-2，这时称-2 为当$x \to -1$时的函数$y = \dfrac{x^2 - 1}{x+1}$的极限.

所以，在讨论$x \to x_0$时，函数$f(x)$的变化情况，与函数$f(x)$在x_0处的定义无关.

定义：设函数$f(x)$在x_0的某一领域内有定义，当$x \to x_0$时，如果函数$y = f(x)$的值无限接近于某一常数A，则称常数A为函数$y = f(x)$当$x \to x_0$时的极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to x_0)$$

定义中的$x \to x_0$，是指自变量x的取值以任意方式趋近于x_0（即包括x从x_0的左侧越来越趋近于x_0和x从x_0的右侧越来越趋近于x_0）．但是在研究问题时，有时只需考虑x从x_0的一侧越来越趋近于x_0时的极限.

定义：设函数$f(x)$在x_0的某一左半邻域$(x_0 - \sigma, x_0)(\sigma > 0)$内有定义，当$x$从$x_0$的左侧越来越趋近于$x_0$时，如果函数$y = f(x)$的值无限接近于某一常数 A，则称常数A为函数$y = f(x)$当$x \to x_0$时的左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 - 0) = A$$

定义：设函数$f(x)$在x_0的某一右半邻域$(x_0, x_0 + \sigma)(\sigma > 0)$内有定义，当$x$从$x_0$的右侧越来越趋近于$x_0$时，如果函数$y = f(x)$的值无限接近于某一常数$A$，则称常数$A$为函数$y = f(x)$当$x \to x_0$时的右极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 - 0) = A$$

由$x \to x_0$时函数$f(x)$的极限及左极限、右极限的定义可知：

定理 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$成立的充要条件是$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

例 讨论函数$f(x)=\begin{cases}2x, & x<0\\ 1, & 0\le x\le 1\\ x, & x>1\end{cases}$ 当$x\to 0$和$x\to 1$时的极限.

解 $f(x)$是分段函数，$x=0$和$x=1$它的分点．分点$x=0$和$x=1$的左右两侧函数的表达式不同，所以当$x\to 0$和$x\to 1$时，函数的变化趋势也可能不同，因此，要考虑分点处的左、右极限.

（1）当$x<0$时，有$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}2x=0$

当$0\le x\le 1$时，有$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$

函数的左右极限都存在，但不相等，由定理可知极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

（2）当$0\le x\le 1$时，有$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}1=1$

当$x>1$时，有$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}x=1$

函数的左右极限都存在，且不相等，由定理可知极限$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$存在且值是 1.

§1.3 无穷大与无穷小

在$x\to x_0$（或$x\to\infty$）的变化过程中，有两种特殊的变化过程，一是$|f(x)|$无限变小（无穷小），二是$|f(x)|$无限增大（无穷大）.

1.3.1 无穷小

1．无穷小的概念

定义：如果当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时，函数的极限为 0，则称函数$f(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时为无穷小（量），记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$$

例如，当$x\to 1$时，函数$f(x)=x-1$，$f(x)=\ln x$，$f(x)=\sin(x-1)$等都是无穷小，即 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，$\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$，$\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)=0$.

2．无穷小的性质

性质 1 有限个无穷小的代数和仍是不穷小.

性质 2 有限个无穷小的乘积仍是不穷小.

性质 3 无穷小与有界函数的乘积仍是无穷小.

函数的极限与无穷小的关系如下：

定理 $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$．其中$\alpha(x)$是无穷小.

上式中$\lim$下面没有标明自变量的变化过程是泛指$x\to-\infty$，$x\to+\infty$，$x\to\infty$，