GAOFENJIEJIN

硕士研究生入学考试教程

高分捷进

世纪英才

经济数学

考研命题研究组　审定

蔡晓春　谭德俊　主编

国防大学出版社

硕士研究生入学

考试教程

高 分 捷 进

（经济数学）

考研命题研究组　　审定
主　编　蔡晓春　谭德俊
副主编　彭大衡　胡宗义

国 防 大 学 出 版 社
—北京—

责任编辑:彭呈仓
封面设计:肖　逸

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试教程/王逸梅等编著, - 北京:国防大学出版社
ISBN7 - 5626 - 0918 - 7

Ⅰ.20…　Ⅱ.王…　Ⅲ.研究生 - 入学考试 - 试题 - 学习参考资料　Ⅳ.G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 04243 号

硕士研究生入学考试教程
高　分　捷　进
(经济数学)
蔡晓春　谭德俊　主编

出　版:国防大学出版社(北京市海淀区)
经　销:新华书店
印　刷:铁道部第十六工程局印刷厂
开　本:787×1092 毫米　1/16
印　张:120
字　数:2000 千字
版　次:第 1 版
印　次:2000 年 6 月印刷
印　数:001—5000
书　号:ISBN 7 - 5626 - 0918 - 7/G·29
定　价:全套(五册)共 175.00 元

前　言

经济类硕士研究生入学考试中，数学(三)、(四)是一门难度较大的公共课，许多考生曾因没考好数学(三)、(四)而导致考研失利。为此，本书作者根据多年评阅试卷和辅导考研的经验，参考国内外各种数学典型试题及历年考研试题，精心编写了本书，为考生短期内迅速提高应试能力助一臂之力。

本书特点如下：

一、全书内容**按照最新修订的大纲编写，各个章节按照大纲顺序排列**，使考生避免超纲复习，针对性极强。

二、本书对大纲规定要求考查的公式、定理、概念均进行了详细解析，使读者在理解的基础上加深记忆。

三、本书每个章节均列出了大纲规定的考查要求，使考生复习时目标明确，效率更高。

四、本书每个章节均列出了各种常见典型例题，归纳总结了许多新的快速解题方法与技巧，考生掌握了这些例题，在做其它练习时，便可举一反三，触类旁通。

五、本书每个章节后面均编排了一些专项复习强化练习题，以加强考生对各个章节的专项知识进行重点复习，使考生有学有练，在实践中掌握解题技巧。

六、**本书最后一部分附有20套考研数学(三)、(四)全真模拟试题，这是其他参考书所没有的内容。**其题型、题量、分值、难易程度均与考研真题一致，使考生通过做全真模拟试题在短期内迅速提高应试能力。

本书不仅是报考经济类硕士研究生入学考试的必备辅导用书，而且可作为经济类专业本科生、大专生、电大、夜大学生学习经济数学的有效参考书籍。

本书虽然按照最新修订的大纲编写，但因时间仓促，书中难免有不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编者

目　录

数学(三)、(四)适用专业、试卷结构及考试内容 ………… 1

第一篇　微积分

第一章　函数、极限与连续 ………… 1
一、考试要求 ………… 1
二、基本内容 ………… 1
三、经典例题解析 ………… 5
四、专项复习强化练习题 ………… 14
第二章　一元函数微分学 ………… 17
一、考试要求 ………… 17
二、基本内容 ………… 17
三、经典例题解析 ………… 21
四、专项复习强化练习题 ………… 37
第三章　一元函数积分学 ………… 42
一、考试要求 ………… 42
二、基本内容 ………… 42
三、经典例题解析 ………… 46
四、专项复习强化练习题 ………… 64
第四章　多元函数微分学 ………… 69
一、考试要求 ………… 69
二、基本内容 ………… 69
三、经典例题解析 ………… 72
四、专项复习强化练习题 ………… 80
第五章　多元函数积分学 ………… 83
一、考试要求 ………… 83
二、基本内容 ………… 83
三、经典例题解析 ………… 85
四、专项复习强化练习题 ………… 91
***第六章　无穷级数** ………… 94
一、考试要求 ………… 94
二、基本内容 ………… 94
三、经典例题解析 ………… 96
四、专项复习强化练习题 ………… 108
第七章　常微分方程*与差分方程初步 ………… 112
一、考试要求 ………… 112
二、基本内容 ………… 112
三、经典例题解析 ………… 115

四、专项复习强化练习题 …… 127

第二篇 线性代数

第一章 行列式 …… 129
一、考试要求 …… 129
二、基本内容 …… 129
三、经典例题解析 …… 130
四、专项复习强化练习题 …… 136
第二章 矩阵 …… 140
一、考试要求 …… 140
二、基本内容 …… 140
三、经典例题解析 …… 142
四、专项复习强化练习题 …… 147
第三章 向量 …… 152
一、考试要求 …… 152
二、基本内容 …… 152
三、经典例题解析 …… 153
四、专项复习强化练习题 …… 159
第四章 线性方程组 …… 163
一、考试要求 …… 163
二、基本内容 …… 163
三、经典例题解析 …… 164
四、专项复习强化练习题 …… 173
第五章 矩阵的特征值和特征向量 …… 178
一、考试要求 …… 178
二、基本内容 …… 178
三、经典例题解析 …… 180
四、专项复习强化练习题 …… 186
* ① **第六章 二次型** …… 190
一、考试要求 …… 190
二、基本内容 …… 190
三、经典例题解析 …… 192
四、专项复习强化练习题 …… 196

第三篇 概率论与数理统计初步

第一章 随机事件与概率 …… 200
一、考试要求 …… 200
二、基本内容 …… 200

① 注：带*的章节不属于数学(四)考试范围，考生可不复习。

三、经典例题解析 …… 204
四、专项复习强化练习题 …… 214
第二章　随机变量及其分布 …… 217
一、考试要求 …… 217
二、基本内容 …… 217
三、经典例题解析 …… 225
四、专项复习强化练习题 …… 234
第三章　随机变量的数字特征 …… 240
一、考试要求 …… 240
二、基本内容 …… 240
三、经典例题解析 …… 243
四、专项复习强化练习题 …… 255
第四章　大数定律和中心极限定理 …… 258
一、考试要求 …… 258
二、基本内容 …… 258
三、经典例题解析 …… 259
四、专项复习强化练习题 …… 264
***第五章　数理统计的基本概念** …… 266
一、考试要求 …… 266
二、基本内容 …… 266
三、经典例题解析 …… 268
四、专项复习强化练习题 …… 270
***第六章　参数估计** …… 272
一、考试要求 …… 272
二、基本内容 …… 272
三、经典例题解析 …… 276
四、专项复习强化练习题 …… 279
***第七章　假设检验** …… 281
一、考试要求 …… 281
二、基本内容 …… 281
三、经典例题解析 …… 285
四、专项复习强化练习题 …… 288

第四篇　数学(三)全真模拟试题(10套)及参考答案

硕士研究生入学考试数学(三)全真模拟试题一 …… 290
硕士研究生入学考试数学(三)全真模拟试题二 …… 294
硕士研究生入学考试数学(三)全真模拟试题三 …… 299
硕士研究生入学考试数学(三)全真模拟试题四 …… 303
硕士研究生入学考试数学(三)全真模拟试题五 …… 308
硕士研究生入学考试数学(三)全真模拟试题六 …… 312

硕士研究生入学考试数学(三)全真模拟试题七…… 316
硕士研究生入学考试数学(三)全真模拟试题八…… 320
硕士研究生入学考试数学(三)全真模拟试题九…… 324
硕士研究生入学考试数学(三)全真模拟试题十…… 329

第五篇 数学(四)全真模拟试题(10套)及参考答案

硕士研究生入学考试数学(四)全真模拟试题一…… 333
硕士研究生入学考试数学(四)全真模拟试题二…… 338
硕士研究生入学考试数学(四)全真模拟试题三…… 343
硕士研究生入学考试数学(四)全真模拟试题四…… 348
硕士研究生入学考试数学(四)全真模拟试题五…… 352
硕士研究生入学考试数学(四)全真模拟试题六…… 356
硕士研究生入学考试数学(四)全真模拟试题七…… 360
硕士研究生入学考试数学(四)全真模拟试题八…… 365
硕士研究生入学考试数学(四)全真模拟试题九…… 369
硕士研究生入学考试数学(四)全真模拟试题十…… 373

附 录

1999 年硕士研究生入学考试数学(三)试卷…… 377
1999 年硕士研究生入学考试数学(四)试卷 …… 380
1999 年硕士研究生入学考试数学(三)试卷参考答案 …… 382
1999 年硕士研究生入学考试数学(四)试卷参考答案 …… 386

数学(三)、(四)适用专业、试卷结构及考试内容

一、数学(三)

(一)适用专业

1. 经济学门类的应用经济学一级学科中统计学、数量经济学二级学科、专业。

2. 管理学门类的工商管理一级学科中企业管理、技术经济及管理二级学科、专业。

3. 管理学门类的农林经济管理一级学科中对数学要求较高的二级学科、专业。

(二)试卷结构

1. 内容比例

(1)微积分约 50%;(2)线性代数约 25%;(3)概率论与数理统计约 25%

2. 题型比例

(1)填空题与选择题约 30%;(2)解答题(包括证明题)约 70%

3. 考试时间 3 小时

(三)考试内容

1. **微积分** (1)函数、极限、连续;(2)一元函数微分学;(3)一元函数积分学;(4)多元函数微积分学;(5)无穷级数;(6)常微分方程与差分方程。

2. **线性代数** (1)行列式;(2)矩阵;(3)向量;(4)线性方程组;(5)矩阵的特征值和特征向量;(6)二次型。

3. **概率论与数理统计** (1)随机事件和概率;(2)随机变量及其概率分布;(3)随机变量的数字特征;(4)大数定律和中心极限定理;(5)数理统计的基本概念;(6)参数估计;(7)假设检验。

二、数学(四)

(一)适用专业

1. 经济学门类中除规定必考数学三的二级学科、专业外,其余的二级学科、专业外,其余的二级学科、专业可选用数学三或数学四。

2. 管理学门类的工商管理一级学科中除必考数学三的二级学科、专业外,其余的二级学科专业可选用数学三或数学四。

3. 管理学门类的农林经济管理一级学科中对数学要求较低的二级学科、专业。

(二)试卷结构

1. 内容比例

(1)微积分约 50%;(2)线性代数约 25%;(3)概率论约 25%

2. 题型比例

(1)填空题与选择题约 30%;(2)解答题(包括证明题)约 70%

3. 考试时间 3 小时

三、考试内容

1. **微积分** (1)函数、极限、连续;(2)一元函数微分学;(3)一元函数积分学;(4)多元函数微积分学。

2. **线性代数** (1)行列式;(2)矩阵;(3)向量;(4)线性方程组;(5)矩阵的特征值和特征向量。

3. **概率论** (1)随机事件和概率;(2)随机变量及其概率分布;(3)随机变量的数字特征;(4)中心极限定理。

第一篇 微 积 分

第一章 函数、极限与连续

一、考试要求

1、理解函数的概念，掌握函数的表示法；

2、了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；

3、理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念；

4、掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念；

5、会建立简单应用问题中的函数关系式；

6、了解数列极限和函数极限(包括左、右极限)的概念；

7、了解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的阶的比较方法，了解无穷大的概念及其与无穷小的关系；

8、了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限的四则运算法则，会应用两个重要极限；

9、理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)；

10、了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最值和介值定理)及其简单应用.

二、基本内容

(一) 函数

1、函数的定义：设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集.如果对于每一个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$，数集 D 称为这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 称为因变量.

两个函数的定义域和对应法则完全相同时，表示同一函数.

2、函数的几何特性

(1) 有界性　设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，若存在正数 M，当 $x \in D$ 时，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界，否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

(2) 单调性　设函数 $f(x)$ 在某区间 D 上有定义，若对于任意 $x_1, x_2 \in D$，且 $x_1 < x_2$，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$(或 $f(x_1) > f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 在区间 D 上是单调增加(或减少) 函数.

(3) 奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-a, a)$，若对于任意的 $x \in (-a, a)$，恒有 $f(-x) = f(x)$(或 $f(-x) = -f(x)$)，则称函数 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数).

(4) 周期性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个不为零的数 T，对于任意的 $x \in D$，且 $x \pm T \in D$，恒有 $f(x + T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数.满足上式的最小正数 T_0 称为 $f(x)$ 的周期.

3、(1) 复合函数　设函数 $y = f(u)$，定义域为 D 和函数 $u = g(x)$，值域为 W，若 $D \cap W \neq \varnothing$(空集)，则称函数 $y = f[g(x)]$，$x \in \{x \mid g(x) \in D\}$ 为由函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 复合而成的复合函数.

(2) 反函数　设函数 $y = f(x)$ 的定义域、值域分别为 D 与 W，若对于变量 y 在 W 中的每一个值，都有 D 中唯一确定的 x 满足 $f(x) = y$，则称 x 是 y 的函数，记为 $x = f^{-1}(y)$，并称 $x = f^{-1}(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数.按习惯，将 $x = f^{-1}(y)$ 记为 $y = f^{-1}(x)$.

(3) 隐函数　如果在方程 $F(x, y) = 0$ 中，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x, y) = 0$ 在该区间内确定了一个隐函数.形如 $y = f(x)$ 的函数称为显函数.

(4) 分段函数　在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同解析式子来表示的函数称为分段函数.

4、(1) 常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称基本初等函数.

(2) 基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合而得到的函数称为初等函数.

5、简单的经济函数

(1) 在经济活动中，总成本、总收益、总利润关于产品的产量或销量 x 的函数关系分别称为总成本函数 $C(x)$、总收益函数 $R(x)$ 和总利润函数 $L(x)$. 三者的关系：

$L(x) = R(x) - C(x)$，其中 $C(x) =$ 固定成本 + 可变成本，$C(0) =$ 固定成本；$R(x) = px$，p 为产品的价格，x 为销量.

(2) 商品的市场需求量 Q_d 关于价格 p 的函数 $Q_d = f(p)$ 称为商品的需求函数；市场供给量 Qs 关于价格 p 的函数 $Qs = g(p)$ 称为供给函数.

（二）极限

1、数列的极限 设有数列 $\{x_n\}$ 和常数 a 满足：对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 N，使得对于 $n > N$ 时的一切 x_n，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a \quad (n \to \infty)$$

如果数列没有极限，就说数列是发散的.

2、函数的极限

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ 和常数 A，使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (当\ x \to x_0)$$

(2) 如果自变量 x 仅从 x_0 右侧（或左侧）趋向 x_0 时，$f(x) \to A$，则称 A 为 $f(x)$ 在 $x \to x_0^+$（或 $x \to x_0^-$）时的右极限（或左极限），记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \quad (或 \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A)$$

$$或\ f(x_0 + 0) = A \quad (或\ f(x_0 - 0) = A)$$

类似地，可定义 $x \to +\infty$，$x \to -\infty$ 时 $f(x) \to A$ 的极限概念.

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (或 x\to\infty)}} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0^+ \\ (或 x\to+\infty)}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0^- \\ (或 x\to-\infty)}} f(x) = A$

充要

3、无穷小与无穷大

(1) 极限为零的变量称为无穷小量. 有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小；无穷小与有界变量之积仍为无穷小；无穷小除以极限不为零的变量，其商仍为无穷小.

(2) 若在自变量的某变化过程中，函数 $f(x)$ 的绝对值无限地增大，则称 $f(x)$ 为该过程中的无穷大量. 有限个无穷大量的积仍是无穷大量；无穷大与有界变量的和仍为无穷大.

(3) 无穷小的比较 设 $\lim\alpha = 0$，$\lim\beta = 0$（α、β 是 x 的函数）

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta = 0(\alpha)$；

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小；

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c(\neq 0)$，则称 β 与 α 是同阶无穷小，特别地，当 $c = 1$ 时，称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\beta \sim \alpha$.

(4) 在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

4、极限的性质

(1) 唯一性 若函数极限存在，则极限值唯一.

(2) 有界性 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域内有界.

(3) 保号性 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则在点 x_0 的某空心邻域内恒有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）；

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且在点 x_0 的某空心邻域内恒有 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$），则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）；

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，且在点 x_0 的某空心邻域内恒有 $f(x) \geqslant g(x)$，则 $A \geqslant B$；

5、极限存在的两个准则与两个重要极限

(1) 两个准则　1° 夹逼定理，设在 x_0 的某空心邻域 $(x_0 - \delta_1, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_1)$ 内恒有

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

且有

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A$$

则极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，且有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

对于数列也有类似的定理：

如果存在正整数 n_0，使当 $n \geqslant n_0$ 时恒有 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

2° 单调有界数列必有极限

6、(1) 极限的运算法则　有限个有极限的变量之和（或积）的极限等于各自极限之和（或积）；两个有极限的变量之差（商）的极限等于各自极限之差（商），但分母的极限为 0 时除外.

(2) 两个重要极限　1°　$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

2°　$\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x = e$，$\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{1}{n})^n = e$

常用变式：$\lim\limits_{\varphi(x)\to 0} \dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$，$\lim\limits_{\varphi(x)\to 0} [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$，$\lim\limits_{f(n)\to 0} [1 + f(n)]^{\frac{1}{f(n)}} = e$

(三) 连续

1、设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\triangle x = x - x_0$ 趋于零时，对应的函数的增量 $\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$ 也趋于零，那么就称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续（x_0 称为 $f(x)$ 的连续点）.

即 $f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\triangle x\to 0} \triangle y = 0$

设 $x \to x_0 + \triangle x$，则 $\triangle x \to 0$ 就是 $x \to x_0$

$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$，故

$f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

类似地，$f(x)$ 在点 x_0 左连续 $\Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0)$

$f(x)$ 在点 x_0 右连续 $\Leftrightarrow f(x_0 + 0) = f(x_0)$

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处，或者无定义，或者无极限，或者极限不等于函数值 $f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

如果函数 $f(x)$ 在某区间内每点都连续，则称 $f(x)$ 在该区间内连续.

2、性质

(1) 运算性质　有限个在某点连续的函数之代数和（或积），仍在该点连续；两个在某点连续的函数之商（分母在该点为零时除外），仍在该点连续.

(2) 反函数、复合函数、初等函数的连续性

1°　如果函数 $y = f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加（或减少）且连续，那么它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y = \{y \mid y = f(x), x \in I_x\}$ 上单调增加（或减少）且连续.

2°　设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 $x = x_0$ 连续，且 $\varphi(x_0) = u_0$，而函数 $y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 连续，那么复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 $x = x_0$ 处也连续.

3°　初等函数在其定义区间内连续.

(3) 闭区间上连续函数的性质

1°　最值定理：在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值.

2°　有界定理：在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数在该区间上一定有界.

3°　介值定理：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$，则对于介于 $f(a)$、$f(b)$ 之间的任

意一个数 c,必有 $\xi \in (a,b)$,使得 $f(\xi) = c$.

特别地,与 ~~$f(a)$ 与 $f(b)$ 异号~~时,有

零点定理　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且有 $f(a)\cdot f(b) < 0$,则必有 $\xi \in (a,b)$,使得 $f(\xi) = 0$.

三、经典例题解析

例 1·1　设 $f(x) = (x-1)(7-x), 0 \leqslant x \leqslant 8$,求 $f[f(x)]$ 的定义域.

解:　求复合函数 $f[f(x)]$ 的定义域,须解下列不等式组:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 8, \\ 0 \leqslant f(x) \leqslant 8 \end{cases}$$

由 $f(x) \geqslant 0$,即$(x-1)(7-x) \geqslant 0$,

得:$1 \leqslant x \leqslant 7$;

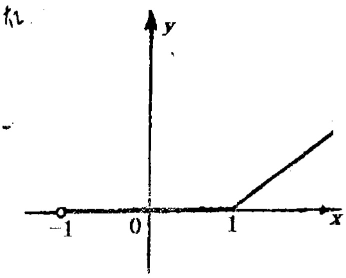
由 $f(x) \leqslant 8$,即　$x^2 - 8x + 15 \geqslant 0$

解得:$x \leqslant 3$ 或 $x \geqslant 5$

故 $f[f(x)]$ 的定义域为:$[1,3] \cup [5,7]$

例 1·2　求函数 $y = f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\arctan x^n$ 的定义域,并描绘该函数的图形.

解:　定义域为$(-1,+\infty)$　$x<-1$ $x=-1$? 极限不存在



因为　$$\lim_{n\to\infty}\arctan x^n = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \\ \dfrac{\pi}{4}, & x = 1 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x > 1 \end{cases}$$

所以　$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leqslant 1 \\ \dfrac{\pi}{2}(x-1), & x > 1 \end{cases}$$

例 1·3　设函数 $f(x)$ 的定义域和值域均为 $x > 0$,命 $f_0(x) = f(x), f_n(x) = f[f_{n-1}(x)]$, $n \geqslant 1$,若有 $f_{n+1}(x) = [f_n(x)]^2$,求 $f_3(x)$.

f 非 $f_1(x)$

解:　$\because\ f_{n+1}(x) = f[f_n(x)] = [f_n(x)]^2$

$\therefore\ f_0(x) = f(x) = x^2\quad f_1(x) = [f(x)]^2 = x^4\quad f_2(x) = [f_1(x)]^2 = x^8$

$f_3(x) = x^{16}$

例 1·4　设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(1+\sin\pi x)^n + \sin\pi x}{(1+\sin\pi x)^n + 1}$, n 为正整数, $x \in [-1,1]$,求 $f(x)$ 的间断点.

解:　当 $-1 < x < 0$ 时, $0 \leqslant 1 + \sin\pi x < 1$,从而$(1+\sin\pi x)^n \to 0\quad (n\to\infty)$

此时, $f(x) = \sin\pi x$;

当 $0 < x < 1$ 时, $1 + \sin\pi x > 1$,从而$(1+\sin\pi x)^n \to +\infty\quad (n\to\infty)$

此时, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x + \dfrac{\sin\pi x}{(1+\sin\pi x)^n}}{1 + \dfrac{1}{(1+\sin\pi x)^n}} = x$

又　$f(0) = 0, f(-1) = -\dfrac{1}{2}, f(1) = \dfrac{1}{2}$,故

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, x = -1 \\ \sin\pi x, -1 < x < 0 \\ 0, \quad x = 0 \\ x, 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{2}, x = 1 \end{cases}$$

从而　$f(x)$ 在$[-1,1]$上的间断点为 $x_1=-1$ 和 $x_2=1$

例 1·5　设有函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，其中一个是偶函数，一个是奇函数，则必有(　　)

(A) $f(-x)+g(-x)=f(x)-g(x)$　　(B) $f(-x)+g(-x)=-f(x)+g(x)$

(C) $f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)$　　(D) $f(-x)\cdot g(-x)=-f(x)g(x)$

解：　当 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数时，(B)、(C) 不正确；当 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数时，(A) 不正确，综上可知，(D) 正确.

例 1·6　在$(-\infty,+\infty)$内，函数 $f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$ 是(　　)

(A) 奇函数　　(B) 偶函数　　(C) 单调函数　　(D) 有界函数

解：　因为对于任意实数 x，有

$$|f(x)|=\left|\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right|=\left|1+\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 1+\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 2$$　$1+x^2\geqslant 2x$

所以，在$(-\infty,+\infty)$内，函数 $f(x)$ 是有界函数.

例 1·7　已知函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且当 k 为正数时，有 $f(x+k)=-f(x)$，则在$(-\infty,+\infty)$内 $f(x)$ 必是(　　)

(A) 有界函数　　(B) 周期函数　　(C) 奇函数　　(D) 偶函数

解：　由 $f(x+k)=-f(x)$ 知，$f[(x+k)+k]=-f(x+k)$

即　$f(x+2k)=-f(x+k)$，于是　$f(x+2k)=f(x)$

所以，在$(-\infty,+\infty)$内，函数 $f(x)$ 一定是以 $2k$ 为周期的周期函数.

例 1·8　已知函数　$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$　则 $f[f(x-1)]=$(　　)

(A) $\begin{cases}1+x, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}x, & x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$

(C) $\begin{cases}1+x, & x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}x, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$

解：　因为　$f(x-1)=\begin{cases}1+(x-1), & x-1<0\\ 1, & x-1\geqslant 0\end{cases}$，即　$f(x-1)=\begin{cases}x, & x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$

因此，当 $x<0$ 时，$f(x-1)=x$，此时　$f[f(x-1)]=f(x)=1+x$；

当 $0\leqslant x<1$ 时，$f(x-1)=x$，此时　$f[f(x-1)]=f(x)=1$；

当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x-1)=1$，此时　$f[f(x-1)]=f(1)=1$

所以　$f[f(x-1)]=\begin{cases}1+x, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$

例 1·9　已知　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(3x)}=2$，则　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=$(　　)

(A) $\dfrac{1}{6}$　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{4}{3}$

解：　令 $u=\dfrac{2}{3}x$，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f[3\cdot(\frac{2}{3}x)]}{\frac{3}{2}\cdot(\frac{2}{3}x)}=\lim_{u\to 0}\frac{2f(3u)}{3u}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

例 1·10　设 $f(x+1)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-2}\right)^n$，则　$f(x)=$(　　)

(A) e^{x-1}　　(B) e^x　　(C) e^{x+1}　　(D) e^{-x}

解：　因为　$$f(x+1)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n-2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{n-2}{x+2}}\right]^{\frac{n-2}{x+2}\cdot(x+2)+2}=e^{x+2}$$

令　$x+1=u$，则有　$f(u)=e^{u+1}$，即　$f(x)=e^{x+1}$

注：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-2}\right)^n$ 中的变量是 n，n 取正整数，而 x 为极限过程中的常量.

例 1·11　设 $f(x)$ 除 $x=0$ 与 $x=1$ 两点之外，对其余全体实数都有定义，且满足 $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$，试求 $f(x)$.

解：由于 $x\neq 0$ 与 1，故在所给式子

$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x \qquad ①$$

三个方程三个未知数

中将 x 换作 $\frac{x-1}{x}$ 得　$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{-1}{x-1}\right)=\frac{2x-1}{x}$　　②

若将 ① 式中 x 换作 $-\frac{1}{x-1}$，则得

$$f\left(\frac{-1}{x-1}\right)+f(x)=\frac{x-2}{x-1} \qquad ③$$

将式 ① 加上式 ③ 再减去式 ②，得

$$2f(x)=1+x+\frac{x-2}{x-1}-\frac{2x-1}{x}$$

所以，$f(x)=\dfrac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$　　④

由于 ① 式与 ②、③、④ 式等价，因此 ④ 式即为所求.

例 1·12　(1) 判断函数　$f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$　$(-1<x<1)$ 的奇偶性.

(2) 设　$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), x<0\\ 0, x=0\\ x-\dfrac{1}{x}, x>0\end{cases}$　求使 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的偶函数 $\varphi(x)$.

解：(1) ∵　$f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\left(-\ln\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

$=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}=f(x)$，故为偶函数.

(2) 显然，当 $x<0$ 时，$-x>0$，为使 f 为偶函数，则

$$\varphi(x)=-x-\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}-x$$

例 1·13　已知 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 为等价无穷小，求 a 的值.

解：∵　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+ax^2}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to}\dfrac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{x^2}{2}}=-\dfrac{2}{3}a=1$，∴　$a=-\dfrac{3}{2}$

注：常用等价无穷小(当 $x\to 0$ 时)：

$e^x-1\sim x,(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x,\ln(1+x)\sim x$

$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2},x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{6},\arcsin x\sim x$

$\arctan x\sim x$

在无穷小比较时，分子、分母可用与其等价的无穷小代替.

如，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)-\sin(x^2-1)}{4(x^2-3x+2)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{6}(x^2-1)^2}{4(x^2-3x+2)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)^2}{24(x-2)^2}=\dfrac{1}{6}$

例 1·14　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$

解：分子的最高次方为　$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，它与分母的最高次方相同，所以

原极限 $=n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$

例 1 · 15　求极限　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

解：　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{x}dx=\dfrac{2}{3}$

注：一类和式的极限如存在，可用定积分求之.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot k\right)=\int_a^b f(x)dx \qquad (※)$$

特别当 $a=0, b=1$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

(※) 式可看作，将 $[a,b]$ 分割成 n 个相等子区间，每一小区间的长度为 $\dfrac{b-a}{n}$，第 i 个子区间的左端点 $x_{i-1}=a+\dfrac{b-a}{n}(i-1)$，第 i 个子区间的右端点为 $x_i=a+\dfrac{b-a}{n}\cdot i$，以左端点 x_{i-1}（或右端点 x_i）作为 ξ_i 来计算 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\triangle x_i$.

例 1 · 16　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$

解：　$x+x^2+\cdots x^n-n=(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)$

$=(x-1)[1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)]$

$=(x-1)[n+(n-1)x+(n-2)x^2+\cdots+x^{n-1}]$

于是　原极限 $=\lim\limits_{x\to 1}[n+(n-1)x+(n-2)x^2+\cdots+x^{n-1}]$

$$=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$$

例 1 · 17　求　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\dfrac{(n-1)a}{n}\right)\right]$

解：　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[(n-1)x+(1+2+\cdots+(n-1))\cdot\dfrac{a}{n}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n}\left(x+\dfrac{a}{2}\right)=x+\dfrac{a}{2}$

例 1 · 18　设 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 及 $f(x)$ 为单调增函数，证明：

若 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$　(1)，则 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$　(2)

证：　设 x_0 为三个函数公共域内的任一点，则　$\varphi(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant\psi(x_0)$

由 (1) 以及函数 $f(x)$ 的单调递增知

$f[\varphi(x_0)]\leqslant f[f(x_0)]$　　$\varphi[\varphi(x_0)]\leqslant f[\varphi(x_0)]$

从而 $\varphi[\varphi(x_0)]\leqslant f[f(x_0)]$

同理，可证　$f[f(x_0)]\leqslant\psi[\psi(x_0)]$

由 x_0 的任意性，(2) 式得证.

例 1 · 19　设 $f(0)=0$，$f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加，试证函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的.

证明：　对任意的 $x>0$，在 $[0,x]$ 上对 $f(t)$ 用中值定理，有

$$f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi)x<f'(x)x$$

这是因为 $0<\xi<x$ 及 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调增加，故对 $x>0$，有

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x}>0$$

此式说明，$g(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的.

例 1·20 设 $f(x)$ 为连续正值函数，证明当 $x \geqslant 0$ 时，函数 $\varphi(x) = \dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 是增函数.

证： $\lim\limits_{x \to 0}\varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} = \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{xf(x)}{f(x)} = 0$

当 $x > 0$ 时，$\varphi'(x) = \dfrac{\int_0^x f(t)dt(\int_0^x tf(t)dt)' - \int_0^x tf(t)dt(\int_0^x f(t)dt)'}{(\int_0^x f(t)dt)^2}$

$$= \frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt - f(x)\int_0^x tf(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2} = \frac{f(x)}{(\int_0^x f(t)dt)^2} \cdot F(x)$$

其中 $F(x) = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$，而 $F(0) = 0$

$$F'(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)dt > 0$$

故当 $x > 0$ 时，$F(x) > 0$，从而 $\varphi'(x) > 0$. 所以 $\varphi(x)$ 是增函数.

例 1·21 证明：奇函数的一切原函数皆为偶函数，偶函数的原函数中有一个为奇函数.

证： 设 $f(x)$ 为奇函数，令 $\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt$

因 $\varphi'(x) = f(x)$，所以 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，且

$\varphi(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt = -\int_0^x f(-u)du = \int_0^x f(t)dt = \varphi(x)$，

故 $\varphi(x)$ 为偶函数，而 $f(x)$ 的一切原函数为 $\varphi(x) + C$，它们都是偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数，显然 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，且 $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt = -\int_0^x f(t)dt = -F(x)$，故知 $F(x)$ 为奇函数，$f(x)$ 的全体原函数为 $F(x) + C$，而除 $c = 0$ 外，$F(x) + C$ 并非奇函数.

例 1·22 求极限 $\lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{e^n}{n!}$

解： 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n}{n!}$

因为 $\lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{e^n}{n!}} = \lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{e}{n+1} = 0$

由比值判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n}{n!}$ 收敛，由级数收敛的必要条件即得 $\lim\limits_{n \to \infty}u_n = \lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{e^n}{n!} = 0$

例 1·23 求 $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{\int_0^x |\sin t| dt}{x}$

解： 由于 $\int_0^{\pi} |\sin t| dt = 2$，以及充分大的正值 x，均有自然数 k 使 $k\pi \leqslant x < (k+1)\pi$ （※）