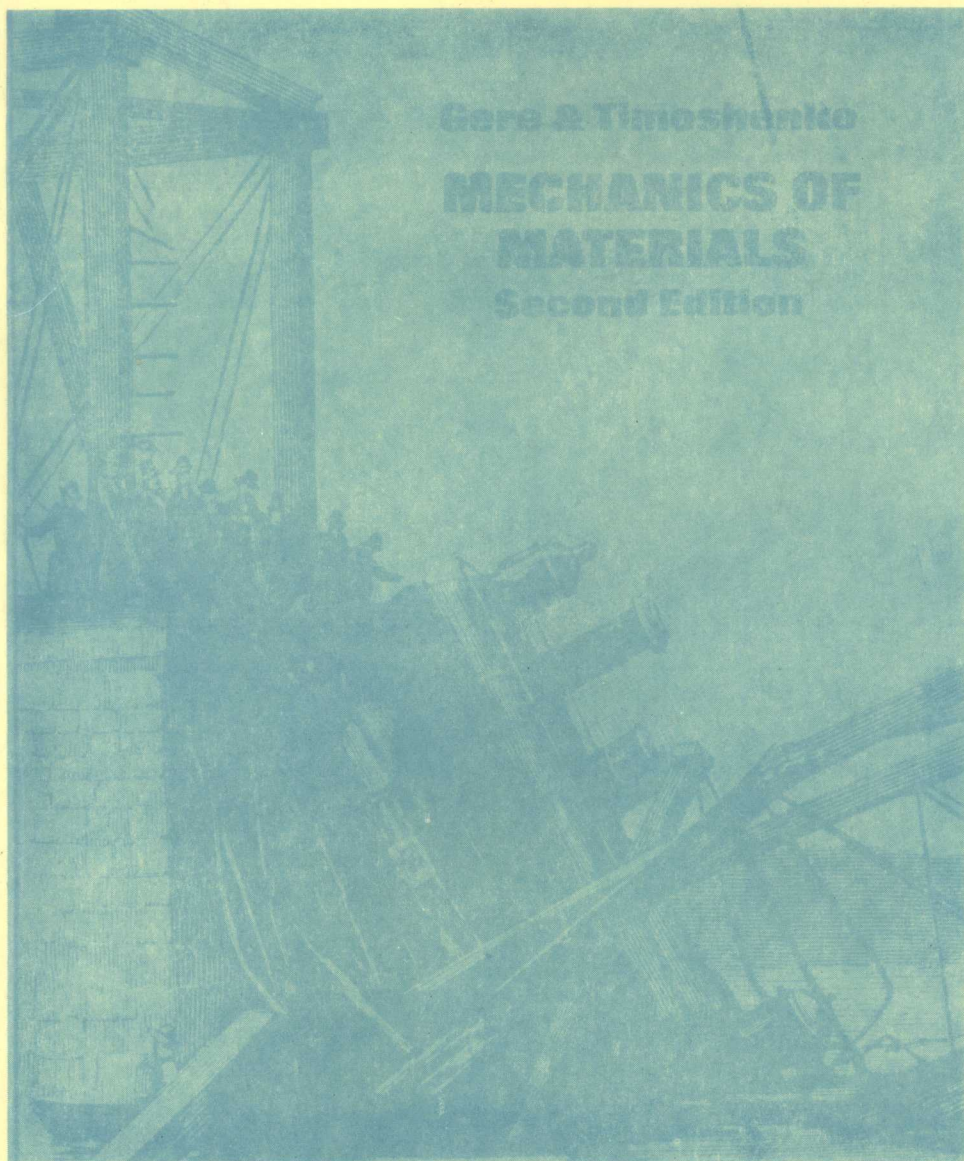


材料力學問題詳解



曉園出版社

版權所有・翻印必究

二

版

1990年8月第二次印刷發行

材料力學問題詳解

定價：新臺幣 200 元 港幣 60 元

原著者：Timoshenko Gere

譯著者：李

廣

齊

發行人：黃

旭

政

發行所：曉園出版社有限公司

臺北市青田街7巷5號

電話：(02) 394-9931 (六線)

郵撥：1075734-4號

FAX：3417931

門市部：臺北市新生南路三段96號之三

電話：(02) 3637012・3627375

FAX：3637012

香港所：九龍又一村達之路30號地下後座

電話：3-805807 3-805705

印刷所：復

大

印

刷

廠

臺北市武成街36巷16弄15號

出版登記：局版臺業字第 1244 號

著作執照：臺內著字第

號

前 言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

目 錄

第一章 張力、壓力和剪力·····	1
第二章 軸向荷重元件·····	33
第三章 扭 轉·····	125
第四章 剪力和彎矩·····	187
第五章 梁之應力·····	225
第六章 應力、應變分析·····	319
第七章 梁之撓度·····	413
第八章 靜不定梁·····	523
第九章 不對稱彎曲·····	595
第十章 非彈性彎曲·····	659
第十一章 柱·····	711
第十二章 能 量 法·····	775
附 錄·····	833

第一章 張力、壓力和剪力

- 1.2-1 桿 ABC 有兩種不同截面積，且承受一軸向力 $P = 95$ kips (見圖)，桿之兩種截面均為圓形， AB 及 BC 之直徑分別為 4.0 in 及 2.5 in，試求桿上每一部份的正應力 σ_{ab} 及 σ_{bc} 。

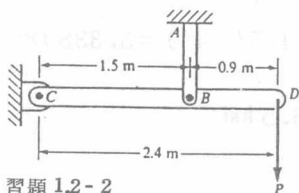


習題 1.2-1

解 $\sigma = D/A$

$$\sigma_{ab} = \frac{95}{\frac{\pi}{4} \cdot 4^2} = 7.56 \text{ ksi} \quad \sigma_{bc} = \frac{95}{\frac{\pi}{4} (2.5)^2} = 19.35 \text{ ksi}$$

- 1.2-2 一垂直桿 CBD 之長為 2.4 m，承受一如圖所示的負荷，垂直元件 AB 之截面積為 550 mm^2 ，試求負荷 P 之大小，以使 AB 元件中的正應力等於 40 MPa 。



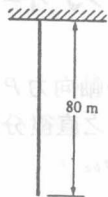
習題 1.2-2

解 $F = \sigma_{ab} \cdot A = 40 \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right) \cdot 550 \text{ mm}^2 = 2.2 \times 10^4 \text{ N}$

$$P \times 2.4 = F \times 1.5 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1.5 F}{2.4} = 13750 \text{ N}$$

- 1.2-3 一長 80 m 的鋁線靠本身重量自由垂懸 (見圖)，假如鋁之比重 $\gamma = 26.6 \text{ kN/m}^3$ ，試求線中的最大正應力 σ_{max} 。

2 材料力學問題詳解



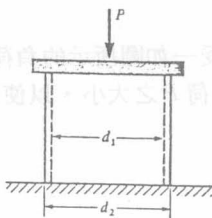
習題 1.2-3

解

$$\sigma_{max} = \frac{r \cdot A \cdot \ell}{A} = r\ell = 26.6 \times 80 \frac{KN}{m^2}$$

$$= 2.128 MPa$$

- 1.2-4 內徑 $d_1 = 4.0 \text{ in}$ 及外徑 $d_2 = 4.5 \text{ in}$ 之空心管被一軸向力 $P = 55 \text{ kips}$ (見圖) 壓縮, 求管中之平均壓應力 σ_c 。

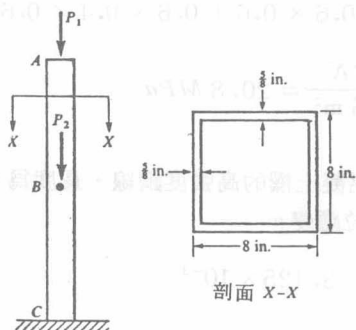


習題 1.2-4

解 $A = \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) = \frac{\pi}{4} (4.5^2 - 4^2) = 3.338 \text{ in}^2$

$$\sigma_c = \frac{P}{A} = \frac{55}{3.338} = 16.5 \text{ ksi}$$

- 1.2-5 一建築物的兩層柱 ABC 是以空心、方盒形截面材料做成(見圖), 其外尺寸為 $8 \text{ in} \times 8 \text{ in}$, 壁厚為 $\frac{5}{8} \text{ in}$, 柱頂端之屋頂負荷為 $P_1 = 80 \text{ k}$, 而在半高處的地板負荷為 $P_2 = 100 \text{ k}$, 由這些負荷求出此柱兩部份中的壓應力 σ_{ab} 及 σ_{bc} 。



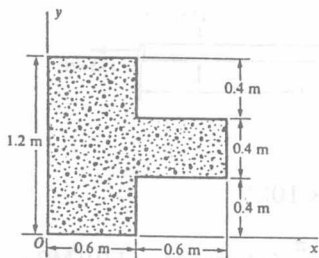
習題 1.2-5

$$\text{解 } A = 8^2 - \left(8 - 2 \times \frac{5}{8}\right)^2 = 18.438 \text{ in}^2$$

$$\sigma_{ab} = \frac{P_1}{A} = \frac{80}{18.438} = 4.34 \text{ ksi}$$

$$\sigma_{bc} = \frac{P_1 + P_2}{A} = \frac{180}{18.438} = 9.76 \text{ ksi}$$

- 1.2-6 圖示為一混凝土基座之截面，(a)若一集中力作用在某點會造成均佈正應力，求此點座標 $\bar{x}$ 及 $\bar{y}$ 。(b)若此集中力為 20 MN ，求其造成的壓應力 σ_c 大小。



習題 1.2-6

$$\text{解 } A = 1.2 \times 0.6 + 0.6 \times 0.4 = 0.96 \text{ m}^2$$

$$(a) \quad \bar{x} = \frac{1}{A} (1.2 \times 0.6 \times 0.3 + 0.6 \times 0.4 \times 0.9) = 0.45 \text{ m}$$

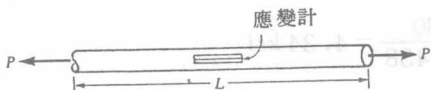
$$\bar{y} = \frac{1}{A} (1.2 \times 0.6 \times 0.6 + 0.6 \times 0.4 \times 0.6) = 0.6 \text{ m}$$

$$(b) \quad \sigma_c = \frac{P}{A} = \frac{20 \text{ MN}}{0.96 \text{ m}^2} = 20.8 \text{ MPa}$$

- 1.2-7 用以加預應力於一混凝土樑的高強度鋼線，長度為 80ft，且被拉長 3.0in，求線中的拉應變。

$$\text{解} \quad \epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{3}{80 \times 12} = 3.125 \times 10^{-3}$$

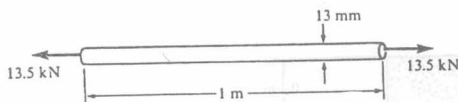
- 1.2-8 長 $L = 1.5 \text{ m}$ 之圓桿承受拉張力如圖，在桿上裝一應變規量出其正應變 $\epsilon = 2 \times 10^{-3}$ ，則在此負荷下全桿之拉伸量為何？



習題 1.2-8

$$\text{解} \quad \delta = \epsilon \cdot L = 2 \times 10^{-3} \times 1.5 = 3 \text{ mm}$$

- 1.2-9 1 m 長，13 mm 直徑的鋼桿承受拉力 13.5 kN (見圖)，當力加上時，桿之長度增長 0.5 mm，求桿中之正應力及應變。

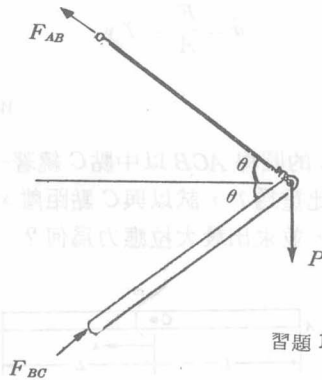
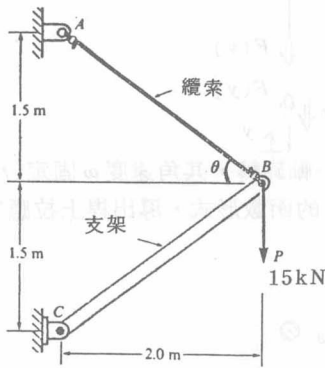


習題 1.2-9

$$\text{解} \quad \epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{0.5}{1 \times 10^3} = 5 \times 10^{-4}$$

$$\sigma = P/A = 13.5 \text{ kN} / \frac{\pi}{4} (13 \text{ mm})^2 = 102 \text{ MPa}$$

- 1.2-10 一支架及纜索組合 ABC (見圖) 支持一垂直力 $P = 15 \text{ kN}$ ，纜索之有效截面積為 120 mm^2 ，支架的面積為 250 mm^2 ，(a) 求纜索及支架中的正應力 σ_{ab} 及 σ_{bc} ，並指出何為拉力，何為壓力。(b) 若纜索伸長 1.3 mm，則應變為何？(c) 若支架縮短 0.62 mm，則應變為何？



習題 1.2-10

因繩和桿以hinge相連於A、B、C點上，故只承受軸向力

解 (a) $F_{AB} = F_{BC} = F$ $\sin \theta = \frac{1.5}{\sqrt{1.5^2 + 2^2}} = 0.6$

$$(F_{AB} + F_{BC}) \sin \theta = P$$

$$F = \frac{P}{2 \sin \theta} = \frac{15}{2 \times 0.6} = 12.5 \text{ kN}$$

$$\sigma_{ab} = \frac{F}{A} = \frac{12.5 \text{ kN}}{120 \text{ mm}^2} = 104 \text{ MPa} \quad (\text{張力})$$

$$\sigma_{bc} = \frac{F}{A} = \frac{12.5 \text{ kN}}{250 \text{ mm}^2} = 50 \text{ MPa} \quad (\text{壓力})$$

$$(b) \quad \epsilon_{ab} = \frac{\delta}{L} = \frac{1.3 \times 10^{-3}}{\sqrt{1.5^2 + 2^2}} = \frac{1.3 \times 10^{-3}}{2.5} = 5.2 \times 10^{-4}$$

$$(c) \quad \epsilon_{bc} = \frac{\delta}{L} = \frac{0.62 \times 10^{-3}}{2.5} = 2.48 \times 10^{-4}$$

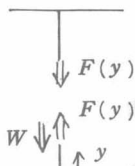
1.2-11 比重 γ 的長索以本身重量自由懸垂，試導出索中拉應力 σ_y 公式，使其為由低端算起之距離 y 的函數。



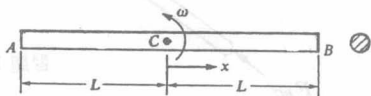
習題 1.2-11

解 $W = F(y) = \gamma \cdot A \cdot y$

$$\sigma = \frac{F}{A} = r y$$

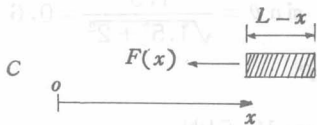


- 1.2-12 總長 $2L$ 的圓桿 ACB 以中點 C 繞著一軸旋轉，其角速度 ω 固定 (rps)，桿之比重為 r ，試以與 C 點距離 x 的函數形式，導出桿上拉應力 σ_x 的公式，並求出最大拉應力為何？



習題 1.2-12

解



$$F(x) = \int_x^L \left(\frac{rA}{g} dx \right) x \omega^2 = \frac{rA\omega^2}{g} \int_x^L x dx = \frac{rA\omega^2}{2g} (L^2 - x^2)$$

$$\sigma_x = \frac{F(x)}{A} = \frac{r\omega^2}{2g} (L^2 - x^2)$$

$$x = 0, \quad \sigma_{max} = \frac{r\omega^2 L^2}{2g}$$

- 1.3-1 一長纜線依其自身重量垂直下垂，若纜之材料為(a)降伏應力為 36,000 psi 的鋼。(b)降伏應力為 18,000 psi 的鋁，試求不斷裂時纜之最大長度如何？(注意：鋼之單位重量為 490 pc/f，鋁為 170 pc/f)。

解 $\sigma_{max} = rL$ (由習題 1.2-11)

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad r L_{max} &= \sigma_y \quad \Rightarrow \quad L_{max} = \frac{36000 \text{ lbf/in}^2}{490 \text{ lb/ft}^3} \\ &= \frac{36000 \times 144}{490} \text{ ft} = 10580 \text{ ft} \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad L_{max} = \frac{18000 \times 144}{170} = 15247 \text{ ft}$$

- 1.3-2 利用直徑 0.505 in 及量規長 2.0 in 之標準試片試驗三種不同材料 A

、B、C，在試片均斷裂後，量規記號間的距離為2.13、2.48及2.78in，其直徑則分別為0.484、0.398及0.253in（斷裂截面上），試求每一試片之拉伸率及面積縮減率，並將之分為脆性或延性材料。

解

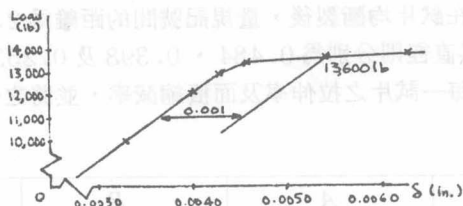
	A	B	C
面積縮減率	$\frac{0.502^2 - 0.484^2}{0.505^2}$	$\frac{0.505^2 - 0.398^2}{0.502^2}$	$\frac{0.505^2 - 0.253^2}{0.505^2}$
$\frac{A_0 - A_f}{A_0}(100\%)$	$\times 100\%$ = 8.14%	$\times 100\%$ = 37.9%	$\times 100\%$ = 74.9%
增長率	$\frac{2.13 - 2}{2} \times 100\%$	$\frac{2.48 - 2}{2} \times 100\%$	$\frac{2.78 - 2}{2} \times 100\%$
$\frac{L_f - L_0}{L_0}(100\%)$	= 6.5%	= 24%	= 39%
	脆性	延性	延性

- 1.3-3 表中所列之數據乃由一高強度鋼的拉力試驗得來，試片直徑為0.505in，量規長為2.00in，破壞時量規記號間的總伸長量為0.42in，而最小直徑為0.370in，繪出此鋼之正應力、應變圖，並求出比例極限、偏移0.0106之降伏應力、極限應力、2.00in中的拉伸率及面積縮減率。

習題 1.3-3 之拉力試驗數據

荷 重 (lb)	拉 伸 量 (in)
1,000	0.0002
2,000	0.0006
6,000	0.0019
10,000	0.0033
12,000	0.0040
12,900	0.0043
13,400	0.0047
13,600	0.0054
13,800	0.0063
14,000	0.0090
14,400	0.0118
15,200	0.0167
16,800	0.0263
18,400	0.0380
20,000	0.0507
22,400	0.1108
25,400	破碎

解



$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} (0.505 \text{ in})^2$$

$$= 0.2 \text{ in}^2$$

$$\sigma_{pt} = \frac{12900 \text{ lb}}{0.200 \text{ in}^2} = 64500 \text{ psi}$$

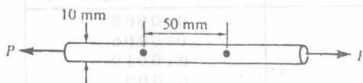
$$\sigma_y = \frac{13600 \text{ lb}}{0.200 \text{ in}^2} = 68000 \text{ psi}$$

$$\sigma_u = \frac{25400 \text{ lb}}{0.2 \text{ in}^2} = 127000 \text{ psi}$$

$$\% \text{ elongation} = \frac{0.42 \text{ in}}{2.0 \text{ in}} \times 100\% = 21\%$$

$$\% \text{ reduction in area} = \frac{(0.505 \text{ in})^2 - (0.370 \text{ in})^2}{(0.505 \text{ in})^2} \times 100\% = 46\%$$

- 1.5-1 一拉力試驗以一青銅試片試驗，試片直徑為 10 mm，量規長為 50 mm（見圖），若施加一力 $P = 25 \text{ kN}$ ，可發現量規記號間距離增加 0.152 mm，求青銅之彈性模數。



習題 1.5-1

解 $\epsilon = \frac{0.152}{50} = 0.00304$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{25 \text{ kN}}{\frac{\pi}{4} (10)^2 \text{ mm}^2} = 318.3 \text{ MPa}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = 1.047 \times 10^5 \text{ MPa} = 105 \text{ GPa}$$

- 1.5-2 在一圓截面直徑為 1 in 的鋼桿 ($E = 30 \times 10^6$ psi) 中，要產生軸向應變 $\epsilon = 0.0007$ 所需的拉力 P 為何？

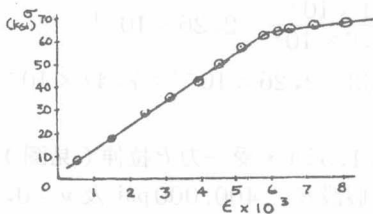
解 $P = \sigma A = E \epsilon A = 30 \times 10^6 \times 7 \times 10^{-4} \times \frac{\pi}{4} \cdot (1)^2 = 16493 \text{ lb}$

- 1.5-3 表格中的數據是由對一鋁合金試片做拉力試驗而得的，繪出數據，並求此合金之彈性模數 E 及比例極限 σ_{pl} 。

習題 1.5-3 之應力應變數據

應 力 (ksi)	應 變
8	0.0006
17	0.0015
27	0.0024
35	0.0032
43	0.0040
50	0.0046
58	0.0052
62	0.0058
64	0.0062
65	0.0065
67	0.0073
68	0.0081

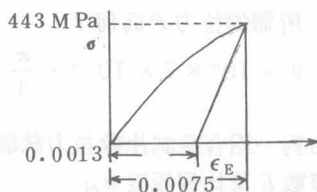
解



$$E = 10700 \text{ ksi}$$

$$\sigma_{pl} = 60 \text{ ksi}$$

- 1.5-4 一鋁合金試樣被用來作拉力試驗，負荷一直加到應變為 0.0075 時，材料中的應力則為 443 MPa，然後卸除負荷，可發現一永久應變 0.0013，求此材料之彈性模數 E 。（提示：見圖 1-6 b）。



解 $\epsilon_E = 0.0075 - 0.0013 = 0.0062$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_E} = \frac{443}{0.0062} \text{ MPa} = 71.5 \text{ GPa}$$

- 1.5-5 一支鋁桿及一支鋼桿，均承受拉力而使得在桿中產生正應力 $\sigma = 24 \text{ ksi}$ ，在鋼及鋁桿中的側向應變 ϵ_s 及 ϵ_a 分別為何？若 $E = 10.6 \times 10^6 \text{ psi}$ ， $\nu = 0.33$ （鋁）及 $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ 、 $\nu = 0.30$ （鋼）。

解 對鋼

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{24 \times 10^3}{30 \times 10^6} = 0.8 \times 10^{-3}$$

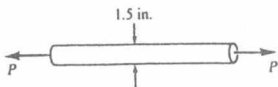
$$\epsilon_s = \nu \epsilon = 0.3 \times 8 \times 10^{-4} = 2.4 \times 10^{-4}$$

對鋁桿

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{24 \times 10^3}{10.6 \times 10^6} = 2.26 \times 10^{-3}$$

$$\epsilon_a = \nu \epsilon = 0.33 \times 2.26 \times 10^{-3} = 7.47 \times 10^{-4}$$

- 1.5-6 一圓桿直徑為 1.5 in，受一力 P 拉伸（見圖），直徑的變化為 0.0031 in，假設 $E = 400,000 \text{ psi}$ 及 $\nu = 0.4$ ，求桿中的軸向力 P 。



習題 1.5-6

解

側向應變

$$\epsilon_t = \frac{0.0031}{1.5} = 2.067 \times 10^{-3}$$

軸向應變

$$\epsilon = \frac{\epsilon_l}{\nu} = \frac{2.067 \times 10^{-3}}{0.4} = 5.167 \times 10^{-3}$$

$$P = \sigma A = E \epsilon A$$

$$= 4 \times 10^5 \times 5.167 \times 10^{-3} \times \frac{\pi}{4} \times (1.5)^2$$

$$= 3652 \text{ lb}$$

- 1.5-7 一壓力元件由外徑 90 mm 且截面積為 1580 mm² 之鋼管 ($E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.30$) 製成, 多大的軸向力會使外徑增加 0.0094 mm?

解 軸向應變

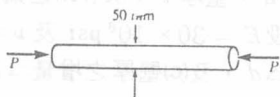
$$\epsilon = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{0.0094}{90} = 3.481 \times 10^{-4}$$

$$P = E \epsilon \cdot A$$

$$= 200 \times 10^9 \times 3.481 \times 10^{-4} \times 1580 \times 10^{-6}$$

$$= 110 \text{ kN (壓力)}$$

- 1.5-8 一高強度鋼桿 ($E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$) 受一軸向力壓縮 (見圖), 若無受軸向力時, 則桿之直徑為 50 mm, 為保持某一裕度, 桿之直徑不可超過 50.02 mm, 求最大允許負荷 P 。



習題 1.5-8

解 最大軸向應變

$$\epsilon_{\max} = \left(\frac{50.02 - 50}{50} \right) \times \frac{1}{\nu} = \frac{4 \times 10^{-4}}{0.3}$$

$$= 1.33 \times 10^{-3}$$

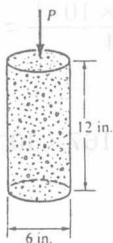
$$\therefore P_{\max} = E \epsilon_{\max} A$$

$$= 200 \times 10^9 \times 1.33 \times 10^{-3} \times \frac{\pi}{4}$$

$$\times (50 \times 10^{-3})^2$$

$$= 524 \text{ kN}$$

- 1.5-9 在試驗一受壓的混凝土圓柱時 (見圖), 初直徑 6 in 增加了 0.0004 in, 初長度 12 in 減少了 0.0065 in, 負荷為壓力 $P = 52,000 \text{ lb}$, 試求彈性模數 E 及包生比 ν 。



習題 1.5-9

解 側向應變

$$\epsilon_t = \frac{0.0004}{6} = 6.667 \times 10^{-5}$$

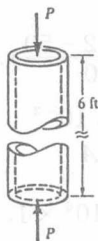
軸向應變

$$\epsilon_a = \frac{0.0065}{12} = 5.417 \times 10^{-4}$$

$$\nu = \frac{\epsilon_t}{\epsilon_a} = 0.12$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_a} = \frac{P}{\epsilon_a \cdot A} = \frac{52000}{5.417 \times 10^{-4} \times \frac{\pi}{4} \times (6)^2} = 3.395 \text{ MPa}$$

- 1.5-10 長 6 ft，外徑 $d = 4.5$ in，壁厚 $t = 0.3$ in 之鋼管受一軸向壓力 $P = 40$ kips（見圖），假設 $E = 30 \times 10^6$ psi 及 $\nu = 0.3$ ，求 (a) 管之縮短量 δ ，(b) 外徑之增量 Δd ，及 (c) 壁厚之增量 Δt 。



習題 1.5-10

解 內徑 $d_i = d - 2t = 4.5 - 2 \times 0.3 = 3.9$

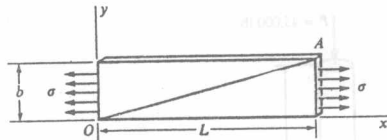
$$A = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_i^2) = \frac{\pi}{4} (4.5^2 - 3.9^2) = 3.958 \text{ in}^2$$

$$(a) \quad \epsilon = \frac{P}{EA} = \frac{40 \times 10^3}{30 \times 10^6 \times 3.958} = 3.368 \times 10^{-4}$$

$$\delta = \epsilon L = 3.368 \times 10^{-4} \times 6 \times 12 = 0.024 \text{ in}$$

- (b) $\epsilon_t = \nu \epsilon = 0.3 \times 3.368 \times 10^{-4} = 1.01 \times 10^{-4}$
 $\Delta d = \epsilon_t \cdot d = 4.547 \times 10^{-4} \text{ in}$
- (c) $\Delta t = t \times \epsilon_t = 0.3 \times \epsilon_t = 0.3 \times 1.01 \times 10^{-4}$
 $= 3.03 \times 10^{-5} \text{ in}$

1.5-11 長 L 及寬 b 的金屬板承受一兩端上施加的均勻拉應力 σ (見圖), 在加負荷之前, 對角線 OA 之斜率為 b/L , 當應力 σ 施加其上時的斜率為何?



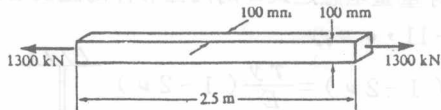
習題 1.5-11

解 $\Delta L = \frac{\sigma}{E} \cdot L$ (增加量)

$\Delta b = \frac{\nu \sigma}{E} \cdot b$ (減少量)

新斜率 $= \frac{b - \Delta b}{L + \Delta L} = \left(\frac{1 - \frac{\nu \sigma}{E}}{1 + \frac{\sigma}{E}} \right) \cdot \frac{b}{L}$

1.5-12 長 2.5 m, 正方截面每邊長 100 mm 之鋼桿承受一軸向拉力 1300 kN (見圖), 假設 $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, 求(a)桿之伸長量(b)截面尺寸之變化, 及(c)體積之變化。



習題 1.5-12

解 $\epsilon = \frac{P}{AE} = \frac{1300 \times 10^3}{100^2 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^9} = 6.5 \times 10^{-4}$

(a) $\delta = \epsilon \cdot L = 6.5 \times 10^{-4} \times 2.5 \times 10^3 = 1.625 \text{ mm}$

(b) 截面邊長減少量

$\Delta = (\nu \cdot \epsilon) \times 100 = 0.3 \times 6.5 \times 10^{-4} \times 100 = 0.0195 \text{ mm}$