



GAOKAO BEIKAO ZHINAN

新课程 新考纲

2009

高考备考指南

数学(理科) 系统复习用书

广州市教育局教学研究室 编



华南理工大学出版社

2009 高考备考指南

数 学 (理科)

系统复习用书

(第十二版)

广州市教育局教学研究室 编

华南理工大学出版社

·广州·

《2009 高考备考指南》编委会

主 编 黄 宪

副主编 谭国华 张经纬

编 委	语文分册主编	谭健文	李月容
	数学分册主编	曾辛金	陈镇民
	英语分册主编	黄丽燕	何 琳 镇祝桂
	政治分册主编	张云平	胡志桥
	历史分册主编	何 琼	刘金军
	地理分册主编	许少星	
	物理分册主编	刘雄硕	陈信余 符东生
	化学分册主编	李南萍	马文龙
	生物分册主编	麦纪青	钟 阳

图书在版编目(CIP)数据

数学(理科)系统复习用书/广州市教育局教学研究室编. —12 版. —广州:华南理工大学出版社,2008.4

(2009 高考备考指南/黄宪主编)

ISBN 978-7-5623-2906-0

I. 数… II. 广… III. 数学课-高中-升学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 036965 号

总 发 行: 华南理工大学出版社(广州五山华南理工大学 17 号楼,邮编 510640)

营销部电话: 020-22236378 22236185 87111048(传真)

E-mail: z2cb@scut.edu.cn

<http://www.scutpress.com.cn>

出版策划: 范家巧 潘宜玲

责任编辑: 赖淑华 黄丽谊

印 刷 者: 佛山市浩文彩色印刷有限公司

开 本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 26.5 字数: 730 千

版 次: 2008 年 4 月第 12 版 2008 年 4 月第 12 次印刷

定 价: 38.50 元(上下册)

本册定价: 31.30 元

版权所有 盗版必究

前言

新一轮高考改革的重点是考试内容的改革,这是我们在复习备考中应该首先关注的。因此,学生复习资料的编写和使用,就成为备考复习的重要环节之一。

本丛书的前身是《高考备考丛书》,初版于1994年,是根据当时广州市有关领导的指示,为提高广州地区学生系统复习备考的效率,由广州市教育局教研室组织广州市100多名特级教师和骨干高级教师编写的。1997年更名为《高考备考指南》,由华南理工大学出版社出版。出版以来,为适应新的情况,吸收新的经验,每年更新内容,修订改版。经过多年打造,本丛书广受欢迎,成为广州市连续10多年使用的高考备考主流资料。

“应试”和“素质”并不是完全对立的矛盾。目前高三教学还存在诸多弊端,正需要通过教学研究和教学改革去克服和解决。广州市从20世纪80年代开始组建了全市性的高考备考研究队伍,依循现代教学理念,着眼于学生,着眼于效率,探索和研究高考备考的教学规律,积累和形成了丰富的具有广州特色的高考备考经验体系。凭着这些凝聚了广州市20多年来一批又一批优秀高三教师心血结晶的经验,广州的高考已经连续多年在全省显现出高位稳定。《高考备考指南》就是广州多年高考备考研究的成果之一,它全面体现了广州备考理念和备考经验。

《高考备考指南》是为广东学生参加广东高考而编写的,所以,一方面,在内容上紧扣广东高考的考试大纲,力求让师生明确考试大纲规定考点的要求,明确考点对应的课本内容,明确考点对应的试题类型,成为当年考试大纲的“解读”;另一方面,在体例上充分考虑了我省学生的学习基础、学习习惯和心理特点,力求精练,强调实用,重视基础,舍弃繁难,反对题海,针对性强,以便让学生以最少的时间获得最好的复习效果。这些就是本丛书编写的鲜明特点。

2007年,广东开始实施新课程高考方案。《高考备考指南》(第十版)根据新课程高考的要求重新进行了编写,全书的结构、内容、题例和练习都全新改版。经过2007年高考的检验,得到了广大师生的充分肯定。根据使用意见,2008年的第十一版又进行过一次修订。2009年是新课程实施后的第三次高考。在总结前两年新课程高考命题特点的基础上,根据对2009年高考(广东卷)命题趋势的分析,《高考备考指南》(第十二版)又进行了全面的优化。

《高考备考指南》(第十二版)包括语文、数学(分文科数学和理科数学)、英语、文科基础/理科基础、政治、历史、地理、物理、化学、生物10个学科,除文科基础/理科基础外,其他每个学科分为《系统复习用书》和《专题训练用书》。《系统复习用书》包括学科各必修模块和列进考试范围的选修模块的基础知识的系统梳理和题型示例,既有新教材的改革亮点,又根据新考纲的要求,加强了知识的系统性,每单元(或章节)附有供学生思考与训练的题目(数学另有配套的《习题解答》)。《专题训练用书》提供与系统复习配套使用的单元(或专题)训练和综合训练,可以按照需要随堂测试或课外使用。文科基础/理科基础分别按政治、历史、地理、物理、化学、生物六个分册出版。

《高考备考指南》丛书编写委员会由广州市教育局教研室组建。第十二版由黄宪任主编,谭国华、张经纬任副主编。华南理工大学出版社大力协助并促成本丛书出版,在此谨表谢意。

编者

2008年4月于广州

说 明

《高考备考指南·数学(理科)》包括系统复习用书、专题训练用书和习题解答共三册书,三册书相互配套,构成了一个特别适合数学高考复习特点的内容体系。

其中,系统复习用书包含了高中数学课程标准中必修课程和选修系列2的全部内容。在充分考虑高中数学课程标准各种不同版本实验教科书的基础上,根据2008年新课程标准高考数学考试大纲和对2009年高考数学(广东卷)命题趋势的分析,系统复习用书将高中数学课程标准中的必修内容和选修内容进行了有机的整合,使得知识之间的内在联系更加紧凑、连贯。为方便使用,系统复习用书按课时编写,而且将每课时的配套练习分为基础训练和综合提高两个部分。系统复习用书可供考生作为数学高考第一轮复习使用。

专题训练用书配合系统复习用书,为每章提供了一套测试卷,既可作为班级单元测试用,也可作为考生自行检测用。

习题解答一书给出了系统复习用书中全部习题的详尽解答,以方便考生解题时及时查对答案,比较解法的优劣。

《高考备考指南·数学(理科)》由广州市教育局教研室曾辛金、陈镇民担任主编。参加编写的人员分别是:许建中(第一章),杨仁宽、宋洁云(第二章),肖凌慧(第三章),伍晓焰(第四章),罗华、谭建东(第五章),陈镇民、谭国华、罗晓斌(第六章),周伟锋(第七章),曾辛金、赖青松(第八章),许建中、吴华东(第九章),翁之英、李大伟(第十章),肖勇钢(第十一章),彭雨茂(第十二章),谭曙光(第十三章、第十六章),赵霞(第十四章),严运华(第十五章)。参加编写的人员均为广州市中学数学骨干教师,他们有着丰富的数学高考复习的实践经验,同时又都是高中数学课程标准实验的亲身参与者。

为了保证书稿的质量,《高考备考指南·数学(理科)》还邀请了一批无论在数学专业上、还是在课堂教学上都具有较高造诣的广州市高中数学青年教师参与审校工作。他们是:曹小恩、伍勋、温效良、刘殷、廖秋凡、梁明月、贺小意。

感谢华南理工大学出版社的编辑和校对人员,正是由于他们的帮助,才使本书得以顺利出版。

尽管本书的编写、编辑和校对人员均抱着非常严肃认真的态度对待本书的编写与出版工作,但由于水平有限,或偶有疏忽,本书必定还存在一些不足之处,恳请广大教师和学生提出批评、建议,以便再版时修订。

编 者

2008年3月

目 录

(共 97 课时)

第一章 集合与常用逻辑用语	(1)
1.1 集合(1 课时)	(1)
1.2 充分条件与必要条件(1 课时)	(4)
1.3 常用逻辑用语(1 课时)	(8)
习题一	(12)
第二章 函数概念与幂函数、指数函数、对数函数	(14)
2.1 函数及其表示(2 课时)	(15)
2.2 函数的基本性质(2 课时)	(21)
2.3 二次函数(1 课时)	(26)
2.4 幂函数、指数函数、对数函数(2 课时)	(29)
2.5 函数的图象(1 课时)	(35)
2.6 抽象函数(1 课时)	(40)
2.7 函数与方程(1 课时)	(43)
2.8 函数综合性问题(2 课时)	(46)
2.9 函数应用性问题(1 课时)	(52)
习题二	(56)
第三章 导数及其应用	(58)
3.1 导数的概念及其运算(1 课时)	(58)
3.2 导数在研究函数中的应用(1 课时)	(62)
3.3 导数的综合应用(1 课时)	(65)
3.4 导数的实际应用(1 课时)	(69)
3.5 定积分与微积分基本定理(1 课时)	(73)
习题三	(78)
第四章 平面向量	(81)
4.1 平面向量及其线性运算(1 课时)	(81)
4.2 平面向量的坐标运算(1 课时)	(85)
4.3 平面向量的数量积(1 课时)	(88)
4.4 平面向量的应用(2 课时)	(93)

习题四	(101)
第五章 三角函数、三角恒等变换与解三角形	(104)
5.1 任意角的三角函数(1课时)	(105)
5.2 简单的三角恒等变换(2课时)	(108)
5.3 三角函数的图象(1课时)	(115)
5.4 三角函数的性质(2课时)	(119)
5.5 解三角形(1课时)	(126)
5.6 三角应用问题(1课时)	(130)
习题五	(133)
第六章 数列	(136)
6.1 数列的概念(1课时)	(136)
6.2 等差数列(1课时)	(141)
6.3 等比数列(1课时)	(144)
6.4 数列求和问题(1课时)	(149)
6.5 数列综合问题(2课时)	(153)
6.6 数列应用问题(1课时)	(159)
习题六	(163)
第七章 不等式	(165)
7.1 不等式的基本性质(1课时)	(165)
7.2 一元二次不等式(1课时)	(168)
7.3 二元一次不等式组与简单线性规划问题(2课时)	(171)
7.4 基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a \geq 0, b \geq 0)$ (2课时)	(180)
习题七	(185)
第八章 空间向量与立体几何	(188)
8.1 空间几何体的结构特征(1课时)	(189)
8.2 简单空间图形的三视图和直观图(1课时)	(193)
8.3 平面的性质、异面直线(1课时)	(197)
8.4 空间向量及其运算(2课时)	(200)
8.5 平行问题(1课时)	(206)
8.6 垂直问题(1课时)	(211)
8.7 空间的角(2课时)	(216)
8.8 空间几何体的表面积和体积(1课时)	(224)
8.9 立体几何综合问题(2课时)	(228)

习题八	(237)
第九章 直线和圆的方程	(241)
9.1 直线的方程(1 课时)	(241)
9.2 两条直线的位置关系(1 课时)	(246)
9.3 圆的方程(1 课时)	(250)
9.4 直线与圆、圆与圆的位置关系(2 课时)	(253)
习题九	(260)
第十章 圆锥曲线方程	(262)
10.1 椭圆(1 课时)	(262)
10.2 双曲线(1 课时)	(266)
10.3 抛物线(1 课时)	(269)
10.4 直线与圆锥曲线的位置关系(2 课时)	(272)
10.5 轨迹方程的求法(1 课时)	(278)
10.6 圆锥曲线综合问题(2 课时)	(281)
习题十	(285)
第十一章 算法初步	(288)
11.1 算法与程序框图(1 课时)	(288)
11.2 基本算法语句(1 课时)	(293)
11.3 算法案例(1 课时)	(300)
习题十一	(304)
第十二章 统计	(308)
12.1 随机抽样和用样本估计总体(2 课时)	(309)
12.2 变量的相关性、回归分析和独立性检验(2 课时)	(316)
习题十二	(324)
第十三章 计数原理	(326)
13.1 排列与组合(3 课时)	(326)
13.2 二项式定理(2 课时)	(334)
习题十三	(338)
第十四章 概率	(341)
14.1 随机事件的概率(1 课时)	(341)
14.2 古典概型(1 课时)	(345)
14.3 几何概型(1 课时)	(348)



14.4 条件概率与事件的相互独立性(1课时)	(352)
14.5 离散型随机变量及其分布列(1课时)	(356)
14.6 离散型随机变量的均值与方差(2课时)	(361)
14.7 正态分布(1课时)	(369)
习题十四	(373)
第十五章 推理与证明	(375)
15.1 合情推理与演绎推理(1课时)	(375)
15.2 直接证明与间接证明(1课时)	(379)
15.3 数学归纳法(1课时)	(382)
习题十五	(385)
第十六章 复数	(388)
16.1 复数的概念及其表示法(1课时)	(388)
16.2 复数代数形式的运算(1课时)	(391)
习题十六	(394)
答案或提示	(396)

第一章 集合与常用逻辑用语

集合是数学中不可缺少的基本语言和基本工具，对后面学习数学的一些基本概念可以理解得更深刻，表达得更准确。

常用逻辑用语介绍了数理逻辑中的一些基本内容。数理逻辑是采用数学的方法，研究思维形式及规律的学科，它对后面数学知识的学习，会更有条理、更严谨。

这章内容几乎历届高考中都会考到，但多以选择题的形式考查，主要是容易题。新课程标准数学科高考对本章的考查要求为：

(1) 集合的含义与表示

- ①了解集合的含义、元素与集合的“属于”关系。
- ②能用自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题。

(2) 集合间的基本关系

- ①理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集。
- ②在具体情境中，了解全集与空集的含义。

(3) 集合的基本运算

- ①理解两个集合的并集与交集的含义，会求两个简单集合的并集与交集。
- ②理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集。
- ③能使用韦恩图(Venn)表达集合的关系及运算。

(4) 命题及其关系

- ①了解命题及其逆命题、否命题与逆否命题。
- ②理解必要条件、充分条件与充要条件的意义，会分析四种命题的相互关系。

(5) 简单的逻辑联结词

了解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义。

(6) 全称量词与存在量词

- ①理解全称量词与存在量词的意义。
- ②能正确地对含有一个量词的命题进行否定。

1.1 集合(1课时)

一、内容提要

通过对不同版本数学实验教材的归纳总结，本节的主要内容有：



1. 集合的基本概念

指定的某些对象的全体称为一个集合. 集合中的每个对象叫做这个集合的元素, a 是集合 A 的元素表示成 $a \in A$, a 不是集合 A 的元素表示成 $a \notin A$.

(1) 集合的性质: 对于一个给定的集合, 其元素具有确定性、互异性、无序性.

(2) 集合的表示: 集合的表示方法有列举法、描述法以及图示法.

(3) 常见的数集有: $\mathbf{N}$ (自然数集)、 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ (正整数集)、 $\mathbf{Z}$ (整数集)、 $\mathbf{Q}$ (有理数集)、 $\mathbf{R}$ (实数集)、 $\mathbf{C}$ (复数集).

2. 集合与集合的关系

(1) ① $A \subseteq B$ 定义为: 任一 $a \in A$, 都有 $a \in B$. ② $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

(2) $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

(3) $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

(4) $\complement_U A = \{x | x \notin A \text{ 且 } x \in U\}$ (其中 U 为全集, 以下相同).

3. 集合的交、并、补的性质

(1) $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup \emptyset = A$ $A \cap (\complement_U A) = \emptyset$ $A \cap U = A$ $A \cup U = U$ $A \cup (\complement_U A) = U$
 $\complement_U (\complement_U A) = A$ (其中 $\emptyset$ 为空集).

(2) $A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$.

(3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

(4) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$, $A \cup B = B$.

(5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(6) $\complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ $\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$.

4. 集合的运用

把集合作为工具在其他数学问题中的应用, 即集合语言与集合思想的运用(如函数的定义域、值域, 方程及不等式的解集, 立体几何、解析几何中的问题等).

二、例题分析

本节的主要题型都是围绕集合的基本概念以及交、并、补等运算展开的. 一般有正确使用集合的有关符号, 集合的不同表示, 集合的有关运算及性质等.

例1 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 集合 $A = \{1, a^2 - 1, 4\}$, $\complement_U A = \{2, a + 3\}$, 则实数 a 的值为().

(A) -2

(B) 0

(C) 2

(D) $\sqrt{6}$ 或 $-\sqrt{6}$

解 由题意得

$$\begin{cases} a+3=3 \\ a^2-1=5 \end{cases} \quad \text{①} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a+3=5 \\ a^2-1=3 \end{cases} \quad \text{②}$$

由①无解, 由②得 $a=2$, 因此本题应选(C).

说明 因为 $A \cup \complement_U A = U$. 而对全集中 3 和 5 这两个元素没有确定, 由此得方程组解之.

例2 如图1-1中阴影部分可表示为().

- (A) $\complement_U(A \cap B)$ (B) $\complement_U(A \cup B)$
 (C) $\complement_U(A \cup B) \cup (A \cap B)$ (D) $(A \cup B) \cap \complement_U(A \cap B)$

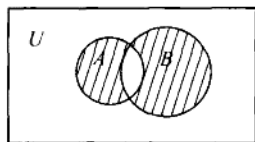


图 1-1

解 阴影部分是 $A \cup B$ 之中非 $A \cap B$, 即 $A \cup B$ 与 $A \cap B$ 的补集的交集, 故 $(A \cup B) \cap \complement_U(A \cap B)$ 为阴影部分的表示形式. 因此本题应选(D).

说明 利用 Venn 图研究集合间的关系比较直观明了, 充分利用数形结合的数学思想方法思考问题和解决问题.

例3 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x - 10 \leq 0\}$.

(1) 若 $B \subseteq A$, $B = \{x \mid m+1 \leq x \leq 2m-1\}$, 求实数 m 的取值范围.

(2) 若 $A \subseteq B$, $B = \{x \mid m-6 \leq x \leq 2m-1\}$, 求实数 m 的取值范围.

解 (1) 由 $A = \{x \mid x^2 - 3x - 10 \leq 0\}$, 得 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 5\}$,

因为 $B \subseteq A$, 所以若 $B = \emptyset$, 则 $m+1 > 2m-1$, 即 $m < 2$, 此时满足 $B \subseteq A$.

$$\text{若 } B \neq \emptyset, \text{ 则 } \begin{cases} m+1 \leq 2m-1 \\ -2 \leq m+1 \\ 2m-1 \leq 5 \end{cases}, \text{ 解得 } 2 \leq m \leq 3.$$

综上所述, m 的取值范围是 $(-\infty, 3]$.

$$(2) \text{ 若 } A \subseteq B, \text{ 则依题意有: } \begin{cases} 2m-1 > m-6 \\ m-6 \leq -2 \\ 2m-1 \geq 5 \end{cases}.$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m > -5 \\ m \leq 4 \\ m \geq 3 \end{cases}, \quad \text{故 } 3 \leq m \leq 4.$$

故 m 的取值范围是 $[3, 4]$.

说明 解决这类问题时要注意空集是一个特殊的集合, 它是任何集合的子集, 解题时不要漏掉这一点. 解决子集之间的关系时, 合理利用数轴, 用数形结合解决这类问题.

三、基础训练

1. 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) = ()$.

- (A) $\{2\}$ (B) $\{2, 3\}$ (C) $\{3\}$ (D) $\{1, 3\}$

2. 设 P, Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $P+Q = \{x \mid x = a+b, a \in P, b \in Q\}$. 若 $P = \{0, 2, 5\}$, $Q = \{1, 2, 6\}$, 则 $P+Q$ 中元素的个数是().

- (A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6



3. 如图1-2所示, U 为全集, M, P, S 是 U 的三个子集, 则阴影部分所表示的集合是().

- (A) $(M \cap P) \cap S$ (B) $(M \cap P) \cup S$
(C) $(M \cap P) \cap (\complement_U S)$ (D) $(M \cap P) \cup (\complement_U S)$

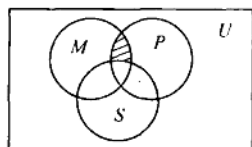


图 1-2

4. 若 A, B, C 为三个集合, $A \cup B = B \cap C$, 则一定有().

- (A) $A \subseteq C$ (B) $C \subseteq A$ (C) $A \neq C$ (D) $A = \emptyset$

5. 若全集 $U = \mathbf{R}$, $f(x), g(x)$ 均为 x 的二次函数. $P = \{x | f(x) < 0\}$, $Q = \{x | g(x) \geq 0\}$, 则不等式组 $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ 的解集用 P, Q 表示为_____.

6. 设集合 $A = \{5, \log_2(a+3)\}$, 集合 $B = \{a, b\}$, 若 $A \cap B = \{2\}$, 则 $A \cup B =$ _____.

7. 已知集合 $A = \{a^2, a+1, -3\}$, $B = \{a-3, 2a-1, a^2+1\}$, 若 $A \cap B = \{-3\}$, 求实数 a 的值.

8. (1) 若 $A = \{x | x^2 + px + q = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $A \cup B = B$, 求 p, q 满足的条件.

(2) 已知 $A = \{x | x^2 + (2+p)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$, 求 p 的取值范围.

四、综合提高

9. 已知集合 $M = \{(x, y) | y = \sqrt{9 - x^2}\}$, $N = \{(x, y) | y = x + b\}$, 且 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 b 应满足的条件是().

- (A) $|b| \geq 3\sqrt{2}$ (B) $0 < b < \sqrt{2}$ (C) $-3 \leq b \leq 3\sqrt{2}$ (D) $b < -3$ 或 $b > 3\sqrt{2}$

10. 已知 $A = \{x | y = \lg(4x^2 - 4)\}$, $B = \{y | y = 2x^2 - 3\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

11. 已知集合 $A = \{(x, y) | \begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}, \theta \in [0, \pi]\}$, $B = \{(x, y) | y = kx + k + 1\}$, 若 $A \cap B$ 含有两个元素, 则 $k \in$ _____.

12. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 6x + 8 < 0\}$, $B = \{x | (x-a)(x-3a) < 0\}$:

(1) 若 $A \subsetneq B$, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围.

1.2 充分条件与必要条件(1课时)

一、内容提要

通过对不同版本数学实验教材的归纳总结, 本节的主要内容有:

1. 命题的概念

(1) 命题: 用语言、符号或式子表达的可以判断真假的陈述句.

(2) 真命题: 判断为真的语句.

(3) 假命题: 判断为假的语句.

2. 四种命题的形式

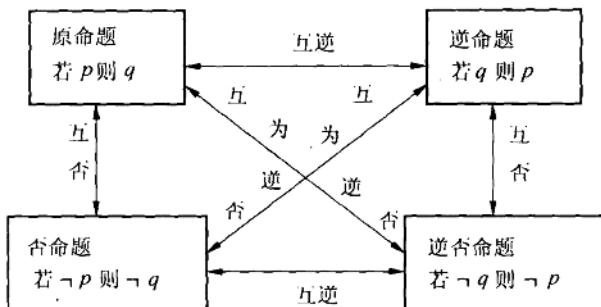
原命题: 若 p , 则 q (p 为命题的条件, q 为命题的结论).

逆命题: 若 q , 则 p . 即交换原命题的条件和结论.

否命题: 若 $\neg p$, 则 $\neg q$. 即同时否定原命题的条件和结论.

逆否命题: 若 $\neg q$, 则 $\neg p$. 即交换原命题的条件、结论之后同时否定它们.

3. 四种命题的关系



(1) 互逆、互否命题之间无法判断其真假.

(2) 互为逆否命题同真同假.

4. 用推出符号“ $\Rightarrow$ ”概括充分、必要、充要条件

(1) 若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充分且不必要条件.

(2) 若 $p \not\Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的必要且不充分条件.

(3) 若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充要条件.

(4) 若 $p \Rightarrow q$ 且 $\neg p \Rightarrow \neg q$, 则 p 是 q 的充要条件(此时 q 也是 p 的充要条件).

5. 用集合的观点概括充分必要条件

若集合 $A = \{x | x \text{ 满足条件 } p\}$, $B = \{x | x \text{ 满足条件 } q\}$, 则有:

(1) 若 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 的充分条件; 若 $A \subsetneq B$, 则 p 是 q 的充分且不必要条件.

(2) 若 $B \subseteq A$, 则 p 是 q 的必要条件; 若 $B \subsetneq A$, 则 p 是 q 的必要且不充分条件.

(3) 若 $A = B$, (即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$), 则 p 是 q 的充要条件.

6. 用反证法证明命题的一般步骤

欲证“若 p , 则 q ”为真命题, 从否定其结论, 即“ $\neg q$ ”出发, 经过正确的逻辑推理导出矛盾, 从而证明“ $\neg q$ ”为假, 即原命题为真. 这种方法称为反证法. 其证明步骤为:

(1) 假设命题的结论不成立, 即假设结论的反面成立.

(2) 从这个假设出发, 经过推理论证得出矛盾.

(3) 由矛盾判定假设不成立, 从而肯定命题结论成立.

反证法出现什么样的矛盾, 事先无法预料, 因此用反证法时应注意推理的结论是否与题设、定义、公理、定理、公式、法则等矛盾, 甚至自相矛盾等.

二、例题分析

本节的主要题型都是围绕命题的真假判定, 四种命题的表述, 充分条件、必要条件、

充要条件判定及证明.

例1 若 $m \leq 0$ 或 $n \leq 0$, 则 $m+n \leq 0$. 写出其逆命题、否命题、逆否命题, 同时分别指出它们的真假.

解 逆命题: 若 $m+n \leq 0$, 则 $m \leq 0$ 或 $n \leq 0$, 逆命题为真.

否命题: 若 $m > 0$ 且 $n > 0$, 则 $m+n > 0$, 否命题为真(逆命题与否命题是等价命题).

逆否命题: 若 $m+n > 0$, 则 $m > 0$ 且 $n > 0$, 逆否命题为假(逆否命题与原命题等价).

说明 四种命题反映出命题之间的内在联系, 注意结合实际问题的产生过程并注意“且”与“或”的转换. 掌握四种命题间的关系是学习充要条件的基础.

例2 命题“ $2x^2 - 5x - 3 < 0$ ”的一个必要不充分条件是().

(A) $-\frac{1}{2} < x < 3$

(B) $-\frac{1}{2} < x < 4$

(C) $-3 < x < \frac{1}{2}$

(D) $1 < x < 3$

解 因为 $2x^2 - 5x - 3 < 0$ 的解集是 $-\frac{1}{2} < x < 3$, 所以当 $-\frac{1}{2} < x < 3$ 时, $2x^2 - 5x - 3 < 0$ 恒成立. 所以 $-\frac{1}{2} < x < 3$ 是 $2x^2 - 5x - 3 < 0$ 的充要条件, 而 $1 < x < 3$ 是 $2x^2 - 5x - 3 < 0$ 的充分非必要条件, $-\frac{1}{2} < x < 4$ 是 $2x^2 - 5x - 3 < 0$ 的必要非充分条件. 而 $-3 < x < \frac{1}{2}$ 是 $2x^2 - 5x - 3 < 0$ 的既不充分也不必要条件. 故应选(B).

说明 由于“充分条件与必要条件”是四种命题的关系的深化, 它们之间存在着密切的联系, 故在判断命题的条件的充要性时, 注意利用集合观点, 也可以考虑“正难则反”的原则, 即在正面判断较难时, 可以转化为应用该命题的逆否命题进行判断. 一个结论成立的充分条件可以不止一个, 必要条件也可以不止一个.

例3 已知 $p: |x+1| > 2$ 和 $q: \frac{1}{x^2+3x-4} > 0$, 试问 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件?

解 方法1 因为由 $p: |x+1| > 2$ 得 $x < -3$ 或 $x > 1$, 所以 $\neg p: -3 \leq x \leq 1$.

由 $q: \frac{1}{x^2+3x-4} > 0$ 得 $x < -4$ 或 $x > 1$, 所以 $\neg q: -4 \leq x \leq 1$.

所以 $[-3, 1] \subsetneq [-4, 1]$, $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件.

方法2 要判断 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件, 只需判定 q 是 p 的什么条件即可.

因为 $p: x < -3$ 或 $x > 1$, $q: x < -4$ 或 $x > 1$, 所以

$$(-\infty, -4) \cup (1, +\infty) \subsetneq (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

所以 q 是 p 的充分不必要条件, $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件.

说明 由 $q: \frac{1}{x^2+3x-4} > 0$ 而直接得 $\neg q: \frac{1}{x^2+3x-4} \leq 0$, 得 $-4 < x < 1$, 不是所求的 $\neg q$

的应有范围, 这里 $\neg q$ 除了 $\frac{1}{x^2+3x-4} \leq 0$ 外, 还有 $x^2+3x-4=0$ 的部分, 而 $\frac{1}{x^2+3x-4} \leq 0$ 隐

含 $x^2 + 3x - 4 \neq 0$. 因此一般不直接求 $\neg p$, $\neg q$, 而是先确定 p , q 之后, 再确定 $\neg p$, $\neg q$.

三、基础训练

1. 已知 a, b, c 为在同一平面内的非零向量. 甲: $a \cdot b = a \cdot c$, 乙: $b = c$, 则().

- (A) 甲是乙的充分但不必要条件 (B) 甲是乙的必要但不充分条件
(C) 甲是乙的充要条件 (D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

2. 下列命题中为真命题的是().

①“若 $\sqrt{x^2} = x$, 则 $x > 1$ ”的逆命题. ②“若 $|a| \neq -a$, 则 $a > 8$ ”的否命题. ③“若 $ab \leq 15$, 则 $a \leq 5$ 且 $b \leq 3$ ”的逆否命题. ④如果命题“若 $\neg p$, 则 q ”为假命题, 那么“若 $\neg q$, 则 p ”为假命题. ⑤“若 $ab = 0$, 则 $a \neq 0$ 或 $b = 0$ ”的否命题.

- (A) ①②④ (B) ③④⑤ (C) ①②⑤ (D) ②③④

3. 一元二次方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ ($a \neq 0$) 有一正根和一负根的充分不必要条件是().

- (A) $a < 0$ (B) $a > 0$ (C) $a < -1$ (D) $a > 1$

4. 设 $p: f(x) = e^x + \ln x + 2x^2 + mx + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增, $q: m \geq -5$, 则 p 是 q 的().

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. $ab > 0$ 是 $\frac{a}{b} > 0$ 的_____条件; $ab \geq 0$ 是 $\frac{a}{b} \geq 0$ 的_____条件.

6. 设命题 $p: |4x - 3| \leq 1$, 命题 $q: x^2 - (2a + 1)x + a(a + 1) \leq 0$. 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件, 则实数 a 的取值范围是_____.

7. 设原命题是: “已知 a, b, c, d 是实数, 若 $a > b$ 且 $c > d$, 则 $a + c > b + d$ ”. 写出它的逆命题、否命题和逆否命题, 并分别说明它们的真假.

8. 判断下列命题的真假, 并写出它们的逆命题、否命题、逆否命题, 同时判断这些命题的真假.

(1) 若 $x, y \in \mathbf{R}$ 且 $x^2 + y^2 \neq 0$, 则 x, y 不全为 0.

(2) 若在二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中, $b^2 - 4ac < 0$, 则该二次函数图象与 x 轴有公共点.

四、综合提高

9. 设集合 A, B 是全集 U 的两个子集, 则 $A \subseteq B$ 是 $(\complement_U A) \cup B = U$ 的().

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

10. 已知直线 a, b, c , 平面 α, β , 则直线 a, b 为异面直线的一个充分条件为().

- (A) $a \perp c, b \perp c$ (B) $a \perp \alpha, b \parallel \beta, \alpha \parallel \beta$
(C) $a \perp \alpha, b \perp \beta, \alpha \perp \beta$ (D) $\alpha \cap \beta = a, b \perp \alpha, b \parallel \beta$

11. 已知命题 p : 不等式 $|x| + |x - 1| > m$ 解集为 $\mathbf{R}$, 命题 q : $f(x) = -(5 - 2m)^x$ 是减函数, 若 p, q 中有且只有一个真命题, 则 m 的取值范围为_____.

12. 已知抛物线 $C: y = -x^2 + mx - 1$ 和点 $A(3, 0), B(0, 3)$. 证明: 抛物线 C 与线段 AB 有两个不同交点的充要条件是 $3 < m \leq \frac{10}{3}$.



1.3 常用逻辑用语(1课时)

一、内容提要

通过对不同版本数学实验教材的归纳总结,本节的主要内容有:

1. 逻辑联结词

常用的逻辑联结词有“且”、“或”、“非”.

用联结词“且”把命题 p 和命题 q 联结起来,构成一个新命题,记作 $p \wedge q$,读作“ p 且 q ”,可以理解为命题 p 和命题 q 都要满足.

用联结词“或”把命题 p 和命题 q 联结起来,构成一个新命题,记作 $p \vee q$,读作“ p 或 q ”,可以理解为命题 p 和命题 q 至少取一个.

对一个命题 p 全盘否定,得到一个新命题,记作 $\neg p$,读作“非 p ”或“ p 的否定”,可以理解为不满足命题 p .

2. 简单命题和复合命题

不含逻辑联结词的命题称为简单命题.

由简单命题与逻辑联结词构成的命题称为复合命题,因此就有“ $p \wedge q$ ”、“ $p \vee q$ ”、“ $\neg p$ ”形式的复合命题,其中, p, q 为简单命题.

3. 判断复合命题真假的真值表

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

说明 (1) $\neg p$ 形式复合命题与命题 p 的真假相反.

(2) $p \vee q$ 形式复合命题,当 p 与 q 同为假时为假,其他情况为真.

(3) $p \wedge q$ 形式复合命题,当 p 与 q 同为真时为真,其他情况为假.

复合命题的真假,主要利用真值表来判断,其步骤为:

(1)确定复合命题的构成形式;

(2)判断其中各简单命题的真假;

(3)利用真值表判断复合命题的真假.