

**A Course
in Mathematical Analysis
Volume 1**

数学分析教程

第一册

常庚哲 史济怀

江 苏 教 育 出 版 社

Chang Gengzhe Shi Jihuai

Jiangsu Education Publishing House

封面设计：刘小地

ISBN 7-5343-3380-6



9 787534 333804 >

ISBN 7-5343-3380-6

G · 3084 定价：18.00 元



数学分析教程

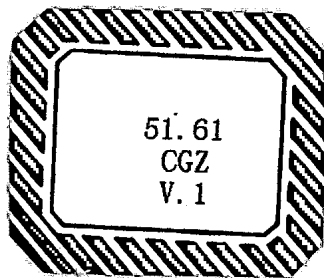
第一册

常庚哲 史济怀

A Course in Mathematical Analysis

Volume 1

Chang Gengzhe Shi Jihuai



江苏教育出版社

Jiangsu Education Publishing House

数学分析教程

第一册

常庚哲 史济怀

责任编辑 喻 纬

出版发行: 江苏教育出版社

(南京马家街 31 号, 邮政编码: 210009)

经 销: 江苏省新华书店

照 排: 南京展望照排印刷有限公司

印 刷: 淮阴新华印刷厂

(地址: 淮阴市淮海北路 44 号, 邮政编码: 223001)

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 14.125 插页 4 字数 353 000

1998 年 10 月第 1 版 1998 年 10 月第 1 次印刷

印数 1—3 000 册

ISBN 7—5343—3380—6

G · 3084

定价: 18.00 元

江苏教育版图书若有印刷装订错误, 可向承印厂调换

序 言

“数学分析”究竟应该包括哪些内容,从西方和东欧各国名为《数学分析》的书籍来看,一直没有十分明确的定义.但是在我国,它作为大学数学系的一门课程的名称,通常包含一元和多元微分学和积分学,以及与之相关的内容.从它的地位和作用,从所占用的学时数来看,说它是数学系最重要的基础课,是当之无愧的.

微积分已有三百多年的历史,经过跨越好几个世纪的数学巨匠们的精雕细琢,千锤百炼,已经形成了一个完整的、精密的庞大知识宝库.随着时代的进步和科学技术的发展,传统数学分析教材的内容显得比较陈旧,只有极少数的几处(例如 Bernstein 多项式)涉及到 20 世纪初的发现.今天,当 21 世纪的朝阳喷薄欲出的时候,这种反差更加强烈,改革数学分析教材的必要性日益显露出来了.在有些新出版的数学分析教科书中,引入了拓扑空间、微分流形,这是朝“现代化”方向走的一种试验.我们的想法则是在保持原有理论水平的基础上,着重于加强数学分析同现代应用数学的其他分支学科的联系.这样做既不会加重学生的负担,又不会挤占后续课程的时间.我们认为,任何积极的改革,都不应该触动其中最基础的理论部分.回顾 20 世纪 50 年代和 70 年代以抛弃这些基本理论为特色的教学改革都未能坚持下来的历史,使我们变得聪明起来,不再干那种蠢事.

何琛、史济怀、徐森林三位教授所著的《数学分析》(共三册)一

书,由高等教育出版社于1985年公开出版.其实,该书早在1985年以前,就以讲义的形式作为中国科学技术大学数学系、少年班和教改试点班的教材.直到今天,这套教材已经为中国科学技术大学的数学教学起过重要的作用,在全国同类教材中也产生了积极的影响.

本书正是以上述《数学分析》一书为基础而写成的.全书仍为三册.这中间融合了19年来使用《数学分析》作为教科书的教学经验,同时也参考了国内外同类书籍中的许多名著.在我们看来,本《教程》有如下特色.

1. 从基本理论上讲,本《教程》不但包含了上述《数学分析》的全部内容,而且在许多地方添加了新的材料.其中值得一提的是,在单变量的积分理论中,我们证明了“Riemann可积的充分必要条件是积函数在积分区间上的不连续点的集合是一零测集”.通常这一定理是“实变数函数”课程中的内容,但是我们用了完全属于数学分析的技巧加以处理.有了这一定理,就可以删去关于可积性的许多讨论,从总体上来看反而缩短了篇幅.其次,增加了二元凸函数的理论和应用;采用了Peter Lax对圆的等周性质的优美证明;收入了能充满整个正方形的Schoenberg的连续曲线.至于更加系统的知识的补充,将在以下的条款中作详细介绍.

2. 在第2章“函数的连续性”的最后,我们介绍了“混沌现象”,叙述并证明了李天岩和Yorke的“周期3蕴涵混沌”的著名定理(1975).虽然对混沌的研究是当今数学的一个热门分支,但是在它的生长点上,则完全是“微积分的”,更具体地说,只不过是连续函数在闭区间上的性质的巧妙应用.过去,人们热衷于找出函数迭代的表达式,欢喜收敛的迭代.在这里我们告诉读者,研究不收敛的迭代会碰到一些非常奇特的现象,从而生长出新的理论.

3. 本书的第5章,名为“插值与逼近初步”.我们从指出Lagrange插值多项式的弱点入手,介绍了1946年由Schoenberg

提出的“三次插值样条函数”。在传统的观念中,函数是愈光滑愈好,往往忽视了在光滑性上无可挑剔的多项式的毛病。虽然“样条函数”已经成了专门的学问,但是在它的生长点上,却完全是“微积分的”。在传统的微积分中,罗列着勉强编造的“分段函数”、“左、右连续”、“左、右可导”的例子,但是建立三次样条函数连续性方程的时候,这些概念成了自然而然非出现不可的东西。三次样条函数是工程样条的一种非常恰当的数学抽象,读者由此能认识实践对数学的推动,而无须领受生硬的说教。

4. 在第一册的最后一章——第8章“曲线的表示和逼近”中,我们介绍了计算机辅助几何设计(computer aided geometric design, 简称为 CAGD)中广泛使用的 Bézier 曲线。它的数学基础是经典的 Bernstein 多项式(1912 年)。过去,在很多数学分析书中也介绍过 Bernstein 多项式,主要是用来作为用多项式来一致逼近有限闭区间上的连续函数的一个构造性的证明。在逼近论中,研究 Bernstein 多项式的文献浩如烟海,但由于它的收敛速度十分缓慢,直到 20 世纪 60 年代初期,逼近论的专家们还在为它没有任何的实际应用而悲叹。正在那个年代,法国的工程师 Bézier 创造的、后来被人们称为 Bézier 曲线的曲线被成功地运用到汽车设计中来,当今已成了 CAGD 和 CG(计算机图形学)的理论基础。人们发现,所谓 Bézier 曲线(曲面)只不过是向量值形式的一元(二元) Bernstein 多项式,而 Bézier 成功的要点乃是他充分地利用了 Bernstein 多项式的“保形性质”——这正好是传统的数学分析教材中不曾谈到的。

在第三册中介绍了 Bernstein 多项式的一致逼近性质,这是因为它在理论上确实有着重要的地位;同时又在第一册的第 5 章中研究了它的保形性质,而在第 8 章中作为曲线理论的一部分内容,讲述了 Bézier 曲线。这是数学同当代 CAGD 与 CG 的一个接口。根据我们的经验,在课堂上讲述这一部分内容时,气氛最为活跃,

最能激起学生的热情和兴趣.他们在电脑上根据 **Bézier** 的方法,可以随心所欲地设计自己的曲线,亲身感受到数学理论的威力.

5. 在空间解析几何和过去的多变量函数理论中,学生都要学习曲面.但到后来,留在头脑中到底还有多少曲面?无非是椭球面、抛物面、马鞍面……在本书第 11 章中,我们介绍了 **Bernstein-Bézier** 三角曲面,它是当代 **CAGD** 和 **CG** 中生成曲面的重要工具.**B-B** 曲面的控制网的概念的进一步延伸,则是多元逼近理论中行之有效的 **B-网** 方法.

在本《教程》中,学生将学会如何去生成自己所需要的曲线和曲面,也将学到如何去分析“他们自己的曲线和曲面”的几何性质.**Bernstein** 多项式在它诞生半个世纪之后,是工程师而不是职业数学家为它找到了实际的应用;而工程师们提出的“控制多边形”这种非常生动的几何概念,又被数学家发展成为研究多元逼近理论的有力方法.数学理论的深入和工程技术的发展相互促进和推动的例子屡见不鲜,**Bernstein** 多项式和 **CAGD**,**CG** 之间的关系,就是一个有说服力的例证.

6. 在本书的第三册,当我们用 **Van der Waerden** 方法构造处处连续而处处不可微的函数之后,介绍了“分形几何”的大意.传统的数学分析只是把这个例子当成一个“反例”,当作怪物.而我们在这里试图告诉学生:在自然界和社会的现象中,到处存在着这种不规则、不光滑的东西.

7. 样条函数、混沌理论、**CAGD** 和 **CG** 技术、分形几何等都是当代应用数学的十分活跃的分支,都已形成了各自的完整体系.这些材料是如何选择的呢?我们的原则是:

(1) 只在这些学科的“生长点”上进行讨论,“点到为止”;

(2) 不作一般的空泛的叙述和议论,必须让学生从中学到实质性的数学思想和技巧;

(3) 所涉及的数学必须是“纯微积分的”,不能再牵扯任何其

他的高深知识；

(4) 所涉及的数学推导必须是简洁的和优美的。

要做到以上的几条，特别是后三条，我们必须去搜寻那些初等和简洁的证明。其中有一些是经过我们自己再次加工的。例如，三次样条函数连续性方程的推导，就是我们自己的改进；反映 Bernstein 算子“磨光性质”的 Kelisky-Rivlin 定理 (Pacific J. of Math., 1976)，原先的证明用到了矩阵的特征值和特征向量，而我们的初等证明，只有短短的几行。至于三角域上 Bernstein-Bézier 曲面的凸性，更是我们自己的研究工作。

8. 对于经典的定理和理论，我们也做了一些新的处理。利用 CAGD 中的“混合函数”(blending functions)方法，把微分学的 Lagrange 中值定理、Cauchy 定理一直到 Taylor 公式的证明，统一在一种风格之下，变得较为简洁。在证明 Van der Waerden 函数处处连续而处处不可导的时候，我们采用几何方法，这种方法既是非常严格的，同时又免去了传统的证明中那一系列烦琐的区间表示。

9. 精选了例题和习题。我们更换了不少例题，对于保留下来的例题，也尽量寻找比较简单的解法。凡是一个例题也能用初等方法来解决的，同时也列出了初等的解法，以引导和鼓励读者尽可能用最少的知识来解决问题。特别应当提到的是：我们补充了大量的习题，其中一部分有一定的难度。我们把习题分作两大类：练习题和问题，前者是基本的定理和理论的直接应用，一般不需要太多的技巧，而后者则有相当的挑战性。也许我们认为较难的题目，一些聪明的学生，可能给出很简单的解法。有的习题也是正文的扩充，是本书的一个有机组成部分。一套与本《教程》相配合的教学指导书正在编写之中。

10. 在写作风格上，我们很不赞成一些数学书中的所谓“标准写法”，那些语言像是一封电码，没有任何感情色彩。我们力图把读者当成自己的朋友，平等对话，娓娓谈心。

本书与过去已有的同类教材相比,有着较大的差别,内容有不少更新,篇幅也随之加大.究竟该讲授些什么,不讲什么,一个有经验的教师完全可以针对受教育者的情况和允许的教学时数作出取舍.文字可以多写,讲课可以少讲,给学生留有自己阅读的余地.

习题的分量是过多了一些,这也要请任课的老师们根据学生的情况适当地选择.初学者应当在教师的指导下做练习,不必题题都做;更不要因为有几个题目做不出来而失去信心.

本书的初稿曾经以讲义的形式,在中国科学技术大学数学系、少年班和教改试验班 1996 和 1997 两届学生中试用,收到了比较满意的效果.

在写作本书的时候,我们参考了国内外与数学分析相关的许多优秀著作,在此恕不一一列名致谢.

在写作本书的时候,得到了中国科学技术大学主管教学的负责同志和数学系负责同志的热情鼓励和大力支持,作者们谨在此对他们表示诚挚的感谢.有着数学分析课程多年辅导经验的王建伟同志,对本书的写作提出了许多宝贵的意见,并为本书的第一册增添了许多习题,使本书增色不少.

囿于作者们的水平和经验,缺点和错误在所难免.本书出版后,将会有怎样的反映?当前很难预料.好在这是一次教学改革,要改革就不能怕失败.只要多少还有一些积极的东西,我们就不会灰心和失望.

常庚哲 史济怀

1998 年 10 月 1 日

目 录

序 言	1
第 1 章 实数	1
§ 1.1 数轴	1
§ 1.2 无尽小数	6
§ 1.3 数列和收敛数列	9
§ 1.4 收敛数列的性质	15
§ 1.5 单调数列	28
§ 1.6 自然对数底 e	34
§ 1.7 基本列和收敛原理	39
§ 1.8 上确界和下确界	45
§ 1.9 有限覆盖定理	48
§ 1.10 数列极限概念的推广	50
§ 1.11 上极限和下极限	52
§ 1.12 数列极限的应用	58
第 2 章 函数的连续性	66
§ 2.1 集合的映射	66
§ 2.2 集合的势	71
§ 2.3 函数	77

§ 2.4	函数的极限	84
§ 2.5	极限过程的其他形式	96
§ 2.6	无穷小与无穷大	101
§ 2.7	连续函数	108
§ 2.8	连续函数与极限计算	120
§ 2.9	函数的一致连续性	126
§ 2.10	有限闭区间上连续函数的性质	132
§ 2.11	函数的上极限和下极限	138
§ 2.12	混沌现象	142
第 3 章	函数的导数	152
§ 3.1	导数的定义	153
§ 3.2	导数的计算	160
§ 3.3	高阶导数	172
§ 3.4	微分学的中值定理	180
§ 3.5	利用导数研究函数	192
§ 3.6	L'Hospital 法则	217
§ 3.7	函数作图	224
第 4 章	一元微分学的顶峰——Taylor 定理	230
§ 4.1	函数的微分	230
§ 4.2	带 Peano 余项的 Taylor 定理	237
§ 4.3	带 Lagrange 余项和 Cauchy 余项的 Taylor 定理	246
第 5 章	插值与逼近初步	261
§ 5.1	Lagrange 插值公式	262
§ 5.2	多项式的 Bernstein 表示	266
§ 5.3	Bernstein 多项式	276
§ 5.4	三次样条函数插值	282

第 6 章 求导的逆运算	291
§ 6.1 原函数的概念	291
§ 6.2 分部积分和换元法	295
§ 6.3 有理函数的原函数	307
§ 6.4 可有理化函数的原函数	314
第 7 章 函数的积分	320
§ 7.1 积分的概念	320
§ 7.2 可积函数的性质	331
§ 7.3 微积分基本定理	338
§ 7.4 分部积分与换元	344
§ 7.5 可积性理论	357
§ 7.6 Lebesgue 定理	364
§ 7.7 广义积分	372
§ 7.8 面积原理	384
§ 7.9 Wallis 公式和 Stirling 公式	392
§ 7.10 数值积分	397
第 8 章 曲线的表示和逼近	402
§ 8.1 参数曲线	402
§ 8.2 曲线的切向量	407
§ 8.3 光滑曲线的弧长	412
§ 8.4 曲率	420
§ 8.5 Bézier 曲线	426
中文名词索引(汉语拼音字母序)	435
外文名词索引(拉丁字母序)	439

第 1 章

实 数

粗略地说,数学由三个大的分支组成:几何学、代数学和分析学。它们有着各自的研究对象、内容和方法,同时又互相依赖和渗透。分析学是从“微积分”开始的.虽然在古代,已经产生了微积分的朴素的思想,但是作为一门学科,则建立于 17 世纪下半叶.在这一方面,英国、法国和德国的数学家们做出了杰出的贡献.创立微积分的大师们着眼于发展强有力的方法,他们虽然解决了许多过去被认为是无法攻克的难题,却未能为自己的方法奠定无懈可击的理论基础.这就引起了长达一个多世纪的混乱和争论,直到 19 世纪初才玉宇澄清,一切混乱、误解的阴霾才为之一扫.这主要是由于有了严格的极限理论,以及这一理论所依赖的“实数体系的连续性”得以确立.

本书书名为《数学分析教程》,正是研究微积分学的原理和应用,因此我们得从实数理论和数列的极限理论谈起.

§ 1.1 数 轴

数轴是表示实数的一种几何方法.数轴的重要性在于使各数之间的某些关系以及对它们所进行的某些运算变得形象化.

设想在我们面前画着一条水平的直线(图 1-1).我们任意地在这直线上选定一点,记为 O ,称它为原点;在原点的右方的直线

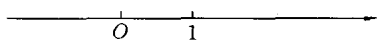


图 1-1

上, 取定一点, 把 O 到这一点的距离定为单位长度, 这一点用数 1 来表示. 这样,

这直线上的每一个点都可以用一个数来表示. 如果这个点在点 O 的右边, 用正数来表示; 这个点若在点 O 的左边, 则用负数来表示; 表示原点 O 的数是数 0. 用这种方法, 就把实数的全体同这条直线上的点一对一地对应了起来. 这条直线称为数轴. 从此以后, 我们将数轴上的点与它所对应的数等同起来, 不加区别.

不等式在数轴上的表示是非常形象的: $a < b$ 意即 a 是在 b 的左边. 设 $a < b$, 所有在 a 与 b 之间的点的集合称为开区间, 我们写为

$$(a, b) = \{x; a < x < b\}.$$

闭区间 $[a, b]$ 是由开区间 (a, b) 添上两个端点 a 与 b 而成的, 即

$$[a, b] = \{x; a \leq x \leq b\}.$$

半开(或半闭)的区间可以类似地定义, 记为 $(a, b]$ 或 $[a, b)$. 实数的全体记为 $\mathbf{R}$, 用 $(-\infty, +\infty)$ 表示, 也称为区间. 此外, 当 $a \in \mathbf{R}$ 时, 定义

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R}; x \leq a\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R}; x > a\},$$

如此等等. 开区间中所有的点, 称为该区间的内点, 对于闭区间 $[a, b]$, 半开半闭的区间 $(a, b]$ 或 $[a, b)$, 点 $x \in (a, b)$ 称为它们的内点.

一个数 x 的绝对值是指它到原点的距离, 记为 $|x|$. 当 $x \neq 0$ 时, 绝对值为 $|x|$ 的点有两个, 即 x 与 $-x$. 点 x 与 y 之间的距离是 $|x - y|$. 因此, 以 a 与 b 为端点的开区间(或闭区间)的长度是 $|a - b|$.

对任何实数 x 与 y , 我们有

$$-|x| \leq x \leq |x|, \quad -|y| \leq y \leq |y|.$$

把这两个不等式相加, 得出:

$$-(|x|+|y|)\leq x+y\leq |x|+|y|.$$

这等价于

$$|x+y|\leq |x|+|y|;$$

最后这个不等式称为**三角形不等式**. 别看它形式简单,但却非常重要,有众多的用处. 容易证明: 式中等号成立的条件是 x 与 y 中至少有一个等于 0, 或者 x 与 y 有相同的正负号.

在中学里,大家已经学习过**有理数**. 任何有理数都可以表示为两个整数之商:

$$r=\frac{p}{q},$$

上式中 p, q 都是整数,且 $q\neq 0$. 大家还知道: 有理数经过加、减、乘、除(除数不能是 0)四则运算之后仍为有理数. 据此,称全体有理数组成一个**数域**. 就是说,仅仅通过四则运算,我们不可能从有理数而得到别样的东西.

在数轴上很容易地表示一个有理数. 设 q 是任意给定的自然数,把单位长度分成 q 等份,找出代表 $\frac{1}{q}$ 的那一点;从而,对任何整数 p ,便不难找出代表 $\frac{p}{q}$ 的那一点. 对于固定的自然数 q ,如今让 p 遍取所有的整数,那么 $\frac{p}{q}$ 这些数把数轴分成一些长度为 $\frac{1}{q}$ 的区间. 每一个实数 x 位于这些区间中的一个区间,这就是说,对于任意固定的实数 x ,一定可找出一个整数 p ,使得

$$\frac{p}{q}\leq x<\frac{p+1}{q},$$

这个不等式等价于

$$0\leq x-\frac{p}{q}<\frac{1}{q}.$$

由此得

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q}.$$

由于 q 是任意取定的自然数, 我们可以事先把 q 取得充分大, 以致使 $\frac{1}{q}$ 小于我们预想的值. 上面那个不等式表明: 每一个实数都能用有理数去逼近到任意精确的程度. 这意味着有理数在数轴上是稠密的.

虽然如此, 可是古代希腊人发现了一个令人惊奇的事实: 数

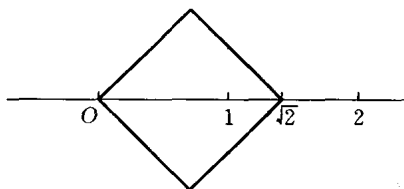


图 1-2

轴上存在着不能被有理数表示的点. 例如说, 边长为 1 的正方形的对角线, 因其平方等于 $1^2 + 1^2 = 2$ 而被记为 $\sqrt{2}$, 就不是有理数 (图 1-2).

从此以后, 我们用 $\mathbf{N}$ 来表示自然数的全体. 不用多少知识便可以证明:

例 1 设 $n \in \mathbf{N}$ 且 n 不是完全平方数, 那么 $\sqrt{n}$ 就不是有理数.

证明 用反证法. 假设 $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, 其中 $p, q \in \mathbf{N}$, 由于 n 不是完全平方数, 故有 $m \in \mathbf{N}$ 使 $m < \frac{p}{q} < m+1$, 由此得到 $0 < p - mq < q$. 在等式 $p^2 = nq^2$ 的双方都减去 mpq , 得到 $p^2 - mpq = nq^2 - mpq$, 这等价于

$$\frac{p}{q} = \frac{nq - mp}{p - mq}.$$

令 $p_1 = nq - mp$, $q_1 = p - mq$, 由 $q_1 \in \mathbf{N}$ 且 $q_1 < q$, 所以 $p_1 \in \mathbf{N}$ 且 $p_1 < p$. 对等式

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$$

反复地进行同样的讨论, 可以得出两串递减的自然数列

$$p > p_1 > p_2 > p_3 > \cdots \text{ 与 } q > q_1 > q_2 > q_3 > \cdots$$