复变函数论习题

解答

八

第一部分

习题一

1．计算：

(1) $(1+i)\pm(1-2i)$；

(2) $\dfrac{i}{(i-1)(i-2)(i-3)}$；

(3) $\sqrt{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$，其中

$0<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\alpha=\operatorname{arctg}2$，$\beta=\operatorname{arctg}3$。

解：(1) 值为 $2-i$ 及 $3i$；

(2) 值为$\dfrac{1}{10}$；

(3) 由 $\operatorname{tg}\alpha=2$，$\operatorname{tg}\beta=3$，

则 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-1$，

从而 $(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{4}\pi$，

$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得

原式$=\sqrt{2}[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]=-1+i$

2．证明

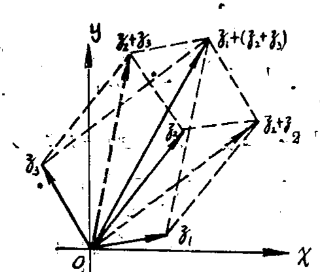
(1) $z_1+(z_2+z_3)$

$=(z_1+z_2)+z_3$

并作图；

(2) $z_1(z_2+z_3)$

$=z_1z_2+z_1z_3$



图(I 1.1)

证明：(1) 设$z_k=x_k+$

$+iy_k(k=1,2,3)$，则

原式左边 $=x_1+iy_1+[(x_2+x_3)+i(y_2+y_3)]=(x_1+x_2+x_3)+i(y_1+y_2+y_3)$

原式右边 $=[(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)]+x_3+iy_3=(x_1+x_2+x_3)+i(y_1+y_2+y_3)$。

则等式成立。

(2) 同上所设

$$(x_1+iy_1)[(x_2+x_3)+i(y_2+y_3)]=x_1x_2+x_1x_3-(y_1y_2+y_1y_3)+i(y_1x_2+y_1x_3+x_1y_2+x_1y_3)$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(y_1x_2+x_1y_2)+(x_1x_3-y_1y_3)+i(y_1x_3+x_1y_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

3．证明：

(1) 当且仅当 $z=\bar{z}$ 时，复数 z 为实数；

(2) 设 z_1 及 z_2 是两复数，如果 z_1+z_2 和 z_1z_2 都是实数，那么 z_1 和 z_2 或者都是实数，或者是一对共轭复数。

证明：

(1) 若 $z=\bar{z}$，设 $z=x+iy$，则 $x+iy=x-iy$，有 $y=-y$，即 $y=0$，$\therefore$ z 为实数。

若 z 为实数，即 $y=0$，显然 $x+iy=x-iy$ $\therefore$ $z=\bar{z}$。

(2) 设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，由于 z_1+z_2 与 z_1z_2 都为实数，$\therefore$ $y_1+y_2=0$，$y_1x_2+x_1y_2=0$，

即 $y_1=-y_2$，$\dfrac{x_2}{x_1}=-\dfrac{y_1}{y_2}$，若 $y_1\neq0$（或 $y_2\neq0$），得 $x_2=x_1$ $\therefore$ z_1 与 z_2 为共轭复数。若 $y_1=0$（或 $y_2=0$），得 $y_2=0$ （$y_1=0$），$\therefore$ z_1 与 z_2 为实数。

4．求复数 $\dfrac{z-1}{z+1}$ 的实部与虚部

解：设 $z=x+iy$，则

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{(z+1)(\bar{z}+1)}=\frac{x^2+y^2-1+i2y}{(x+1)^2+y^2},$$

$$\therefore\quad Re\frac{z-1}{z+1}=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2},\quad Im\frac{z-1}{z+1}=\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

5．设 z_1 及 z_2 是两复数，求证：

(1) $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$;

(2) $|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$;

(3) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并说明其几何意义。

证明：

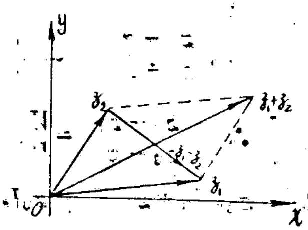
(1) $|z_1-z_2|^2=[z_1+(-z_2)][\bar{z}_1+\overline{(-z_2)}]$ 由教本P.10例3，有 $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2Re[z_1\cdot\overline{(-z_2)}]$ 而 $Re[z_1\cdot\overline{(-z_2)}]=-Re(z_1\cdot\bar{z}_2)$，代入上等式右边，即得所要证之等式。

(2) 由于 $||z_1|-|z_2||^2=(|z_1|-|z_2|)^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1z_2|=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1\bar{z}_2|\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2-2Re(z_1\bar{z}_2)=|z_1-z_2|^2$，两边开方，即得 (2) 的不等式。

(3) 已证得

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1\bar{z}_2),$$

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2Re(z_1\bar{z}_2).$$



图(1.2)

两式相加，即得所证的等式，几何意义是平行四边形对角线长之平方和等于两邻边长平方和的两倍。

6．设 $z=x+iy$，证明 $\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|$。

证明：由教本P.8的（2.1）式，就得所要证的右边不等式的结果，又由于 $(|x|-|y|)^2\geqslant0$，

$\therefore\quad 2|xy|\leqslant x^2+y^2$，而

$$(|x|+|y|)^2=|x|^2+|y|^2+2|xy|\leqslant2(x^2+y^2)$$
$$=2|z|^2,$$

$$\therefore\quad |z|\geqslant\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}.$$

7．试证：分别以 z_1,z_2,z_3 及 W_1,W_2,W_3 为顶点的两个三角形相似的必要与充分条件是

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\z_1&z_2&z_3\\W_1&W_2&W_3\end{vmatrix}=0 \qquad (1)$$

证明：必要性——由两三角形相似的性质，有

$$\left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right|=\left|\frac{W_2-W_1}{W_3-W_1}\right|$$

$$\arg(z_2-z_1)-\arg(z_3-z_1)=\arg(W_2-W_1)-\arg(W_3-W_1)$$

即 $$\arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\arg\frac{W_2-W_1}{W_3-W_1}$$

$$\therefore\quad \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{W_2-W_1}{W_3-W_1}$$

即 $$z_2W_3+z_1W_2+z_3W_1-(z_2W_1+z_1W_3+z_3W_2)=0 \qquad (2)$$

由行列式运算法则，得所要证的条件（1）

充分性——设等式（1）成立，由行列式运算法则，得等

式(2)，再在(2)左边加，减 z_1W_1，并移项得：

$$z_2W_3 - z_2W_1 - z_1W_3 + z_1W_1 = z_3W_2 - z_1W_2 - z_3W_1 + z_1W_1,$$

即 $(z_2 - z_1)(W_3 - W_1) = (z_3 - z_1)(W_2 - W_1)$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{W_2 - W_1}{W_3 - W_1}$$

对这等式两边分别取模与幅角，就得 $\Delta z_1z_2z_3$ 与 $\Delta W_1W_2W_3$ 的两边之长对应成比例，且夹角相等，

$\therefore$ $\Delta z_1z_2z_3 \backsim \Delta W_1W_2W_3$.

8. 如果 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$，且 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$，证明 z_1、z_2、z_3 是内接于单位圆的一个正三角形的顶点

证：设 $z_k = x_K + iy_K$ $(K = 1、2、3)$

$|z_K| = 1$ $(K = 1、2、3)$ 显然，三点在单位圆上。

$\because$ $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

$\therefore$ $x_1 + x_2 + x_3 = 0$，$y_1 + y_2 + y_3 = 0$，

将 $x_1 = -(x_2 + x_3)$，$y_1 = -(y_2 + y_3)$ 代入

$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2 = 1$ 得

$(x_2 + x_3)^2 + (y_2 + y_3)^2 = 1$ 从而有

$2x_2x_3 + 2y_2y_3 = -1$

同理 $2x_1x_2 + 2y_1y_2 = 2x_1x_3 + 2y_1y_3 = -1$ 于是求得

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2$$

即 $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| = |z_2 - z_3|$，

$\therefore$ 三点是等边三角形的顶点。

9. 求证 $(1 + \cos\theta + i\sin\theta)^n = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}(\cos\frac{n\theta}{2} + \sin\frac{n\theta}{2})$.

证明：$|1+\cos\theta+i\sin\theta|=\sqrt{2(1+\cos\theta)}=2\cos\frac{\theta}{2}$。

$$\arg(1+\cos\theta+i\sin\theta)=\operatorname{arctg}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\alpha。$$

则 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$，$\therefore$ $\alpha=\frac{\theta}{2}$

从而$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$

10. 解方程 $z^2-3iz-(3-i)=0$

解：由解二次方程得 $z=\frac{3i+\sqrt{3-4i}}{2}$

而$\sqrt{3-4i}=2-i$ 及$-2+i$，则方程的解为 $z_1=1+i$，

$\therefore$ $z_2=-1+2i$。

11. 求$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})$的三次方根。

解：由于$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$，而

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}=\cos\frac{\pi/4+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi/4+2k\pi}{3},$$

$$k=0,1,2。$$

$\therefore$ 其三次方根为$W_1=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$，

$$W_2=\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12};$$

$$W_3=\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi。$$

12. 设$|z_0|<1$，证明：如果$|z|=1$，那么$\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}\right|=1$，

如果$|z|<1$，那么$\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|<1$。

证明：设$W=\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$，若$|z|=1$，则$|z|^2=z\bar{z}=1$，从而

$$|W|^2=W\cdot\overline{W}=\frac{z\bar{z}+z_0\bar{z}_0-(z_0\bar{z}+\overline{z_0\bar{z}})}{1+z_0\bar{z}_0 z\bar{z}-(z_0\bar{z}+\overline{z_0\bar{z}})}$$

$$=\frac{1+|z_0|^2-2Re(z_0\bar{z})}{1+|z_0|^2-2Re(z_0\bar{z})}=1$$

$\therefore\quad |W|=1$

若$|z|<1$，由于$z=\frac{W+z_0}{1+\bar{z}_0 W}$，则

$$|z|^2=z\bar{z}=\frac{W\overline{W}+\bar{z}_0 W+z_0\overline{W}+|z_0|^2}{1+|z_0|^2 W\overline{W}+\bar{z}_0 W+z_0\overline{W}}<1$$

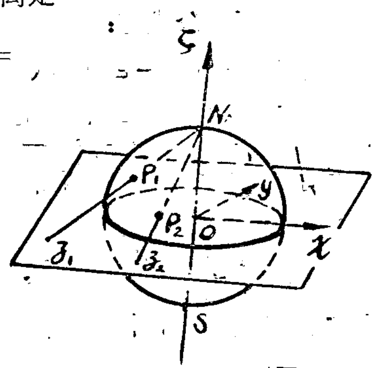
即$(1-|z_0|^2)W\overline{W}-(1-|z_0|^2)<0$，$W\overline{W}-1<0$，

$\therefore\quad |W|<1$。

13。设有限复数z_1及z_2在复球面上表示为P_1与P_2两点，求证P_1及P_2的距离是

$$\frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$$

证明：如右图，设$P_1(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$，$P_2(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)$，球极为$N(0,0,1)$，由球极射影，设复平面上与$P_1,P_2$对应的点分别为$z_1(x_1,y_1,0)$，$z_2(x_2,y_2,0)$，由于$P_1$与$P_2$在球面上，则有



图(I 1.3)

$$\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2=1 \qquad \xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2=1,$$

由于N_1，P_1,z_1在一直线上，则

$$\frac{\xi_1-0}{x_1-0}=\frac{\eta_1-0}{y_1-0}=\frac{\zeta_1-1}{0-1},$$

$$\text{得}\quad x_1=\frac{\xi_1}{1-\zeta_1},\ y_1=\frac{\eta_1}{1-\zeta_1} \tag{1}$$

而 $|z_1|^2=x_1^2+y_1^2=\dfrac{\xi_1^2+\eta_1^2}{(1-\zeta_1)^2}=\dfrac{1-\zeta_1^2}{(1-\zeta_1)^2}=\dfrac{1+\zeta_1}{1-\zeta_1}$,

从而求得：$\zeta_1=\dfrac{|z_1|^2-1}{1+|z_1|^2}$

代入(1)式组中：$\xi_1=\dfrac{2x_1}{1+|z_1|^2}$，$\eta_1=\dfrac{2y_1}{1+|z_1|^2}$,

类似可求得：

$$\xi_2=\frac{2x_2}{1+|z_2|^2},\ \eta_2=\frac{2y_2}{1+|z_2|^2},$$

$$\zeta_2=\frac{|z_2|^2-1}{1+|z_2|^2}$$

由两点距离公式有：

$$\begin{aligned}|P_1P_2|&=\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2+(\zeta_2-\zeta_1)^2}\\&=\sqrt{2(1-\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2-\zeta_1\zeta_2)}\\&=\sqrt{2\left[1-\frac{4x_1x_2+4y_1y_2+(|z_1|^2-1)(|z_2|^2-1)}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}\right]}\\&=\sqrt{4\,\frac{|z_1|^2+|z_2|^2-2(x_1x_2+y_1y_2)}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}\end{aligned}$$

由第5题等式(1)，得

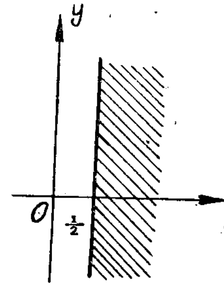
$$|P_1P_2|=\frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$$

14. 满足下列条件的点 z 组成的点集是什么？如果是区域，是单连通区域还是多连通区域？

(1) $I_m z=3$；

解：是过点(0,3)的平行于实轴的一条直线，不是区域。

(2) $Re z>\frac{1}{2}$；



图(Ⅰ1.4)

解：是以直线 $x=\frac{1}{2}$ 为界的右半平面，是单连通区域。

(3) $|z-i|\leqslant|2+i|$；

解：是以 i 为圆心 $\sqrt{5}$ 为半径的圆内及圆周上的所有点之集，是闭区域，如图(Ⅰ1.5)。

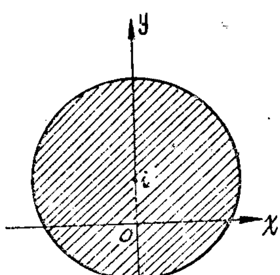
(4) $|z-2|+|z+2|=5$；

解：即 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=5-\sqrt{(x+2)^2+y^2}$，

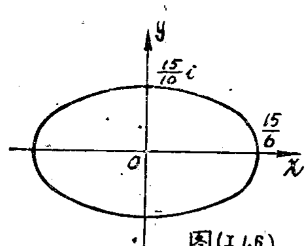
运算化简得：$36x^2+100y^2=225$

即 $\dfrac{x^2}{\left(\frac{15}{6}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{15}{10}\right)^2}=1$，是一椭圆，不是区域。

(见图(Ⅰ1.6)



图(Ⅰ1.5)



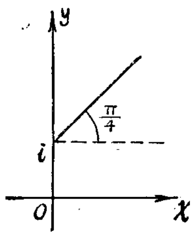
图(Ⅰ1.6)

(5) $\arg(z-i)=\frac{\pi}{4}$;

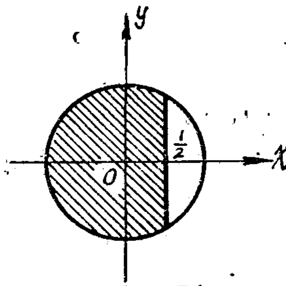
解：是 i 为始点，对正实轴倾角为 $\frac{\pi}{4}$ 的半射线，不是区域。见图（Ⅰ1.7）

(6) $|z|<1$ $Re z\leqslant\frac{1}{2}$，

解：是图（Ⅰ1.8）阴影部分及直线 $x=\frac{1}{2}$ 落在单位圆内的线段上所有点之集，不是区域，因线段上的点不是内点。



图（Ⅰ1.7）



图（Ⅰ1.8）

(7) $0<|z+1+i|<2$；

解：是以 $-(1+i)$ 为圆心，2为半径的圆内除开圆心外所有的点之集，是双连通区域。（见图Ⅰ1.9）

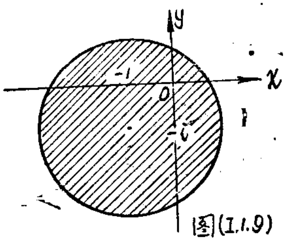
(8) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 2$；

解：即 $(x-1)^2+y^2\leqslant 4[(x+1)^2+y^2]$，运算整理得：

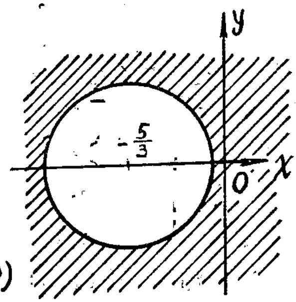
$$\left(x+\frac{5}{3}\right)^2+y^2\geqslant\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

即为以点 $\left(-\frac{5}{3},0\right)$ 为圆心，$\frac{4}{3}$ 为半径的圆外及圆周上所有

点之集，是闭区域。（见图Ⅰ1.10）



图(I.1.9)



图(I1.10)

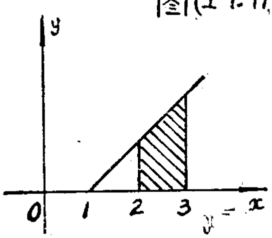
(9) $0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4}$　$2<Re z<3$;

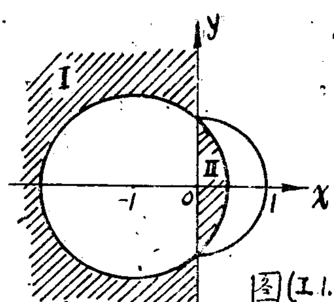
解：如图中阴影部分的梯形内所有点之集，是单 连 通 区 域（见图Ⅰ1.11）。

(10)　$0<\arg\frac{z-i}{z+i}<\frac{\pi}{4}$,

解：由于$\frac{z-i}{z+i}=\frac{x^2+y^2-1-2ix}{x^2+(y+1)^2}$，则：

图(I1.11)





图(I1.12)

$$\arg\frac{z-i}{z+i}=\operatorname{arctg}\frac{-2x}{x^2+y^2-1}<\frac{\pi}{4},$$

由给定的不等式，有 $0<\operatorname{arc\,tg}\dfrac{-2x}{x^2+y-1}<\dfrac{\pi}{4}$，

即 $0<\dfrac{-2x}{x^2+y^2-1}<1$，解此不等式：

$$(\mathrm{I})\begin{cases}-2x>0\\ x^2+y-1>0\\ -2x<x^2+y^2-1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x<0\\ x^2+y^2>1\\ (x+1)^2+y^2>2\end{cases}$$

如上图（I 1.12）中阴影部分（Ⅰ）内所有点之集，是单连通区域。

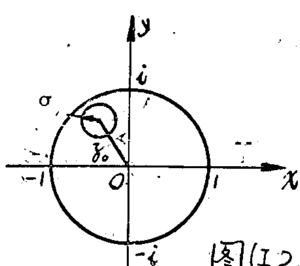
$$(\mathrm{II})\begin{cases}-2x<0\\ x^2+y^2-1<0\\ -2x>x^2+y^2-1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^2+y^2<1\\ (x+1)^2+y^2<2\end{cases}$$

如上图（I 1.12）中阴影部分（Ⅱ）内的所有点之集，是单连通区域。

习　题　二

1．试问函数 $\dfrac{1}{1+z^2}$ 在圆盘 $|z|<1$（称为单位圆盘）内是否连续？是否一致连续？

解： $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 在 $|z|<1$ 内是连续，下面证明之：



图(I 2.1)

设：$z_0\in\{z: |z|<1\}$，考虑 $|z-z_0|<\sigma$ 内的 z，其中适当取 $\sigma>0$，使 $|z-z_0|\leqslant\sigma$ 的 z 全落在单位圆内，而

$$|1+z^2|\geqslant 1-|z|^2=(1-|z|)(1+|z|)\geqslant 1-|z|$$
$$\geqslant 1-(|z_0|+|z-z_0|)>1-(|z_0|+\sigma)>0$$

则 $\dfrac{1}{|1+z^2|}<\dfrac{1}{1-(|z_0|+\sigma)}$

考虑

$$\left|\frac{1}{1+z^2}-\frac{1}{1+z_0^2}\right|=\frac{|z_0^2-z^2|}{|1+z^2||1+z_0^2|}\leqslant\frac{2|z-z_0|}{|1+z^2||1+z_0^2|}$$

$$<\frac{2\sigma}{|1+z_0^2|(1-|z_0|-\sigma)}$$

对于任意$\varepsilon>0$，令$\dfrac{2\sigma}{|1+z_0^2|(1-|z_0|-\sigma)}=\varepsilon$，解出$\sigma$

$$\sigma=\frac{\varepsilon|1+z_0^2|(1-|z_0|)}{2+\varepsilon|1+z_0^2|}$$

因此，只要 σ 取如上之值，对于 $|z-z_0|<\sigma$，就有

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon,$$

$\therefore$ $f(z)$ 在 z_0 连续，由 z_0 的任意性（$|z_0|<1$），从而 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内连续。

但 $f(z)$在 $|z|<1$内不一致连续，例如，取$z_1=\dfrac{n}{n+1}i$，$z_2=\dfrac{n-1}{n}i$。虽然 $|z_1-z_2|=\dfrac{1}{n(n+1)}$当 n 充分大时可变得任意小，但

$$\left|\frac{1}{1+z_1^2}-\frac{1}{1+z_2^2}\right|=\left|\frac{1}{1-\dfrac{n^2}{(n+1)^2}}-\frac{1}{1-\dfrac{(n-1)^2}{n^2}}\right|$$

$$= \frac{1-\frac{1}{2n^2}}{2-\frac{1}{2n^2}},$$

当 $n\to\infty$ 时，趋于 $\frac{1}{2}$。因此对于 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，不论 z_1 与 z_2 接近程度如何小，然而 $\left|\frac{1}{1+z_1^2}-\frac{1}{1+z_2^2}\right|$ 不能小于 ε。

2．证明函数 $f(z)=|z|^2$ 除去在 $z=0$ 外，处处不可微。

证明：设 $z_0=0$。则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2}{z}=\lim_{z\to 0}\bar{z}=0$$

$\therefore$ $f'(0)=0$，即 $f(z)$ 在 $z=0$ 可微。

但在 $z_0\neq 0$ 是不可微的，下面证明此点：

证法之一：令 $z_0=x_0+iy_0$，取 $z=x+iy_0$，则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+y_0^2-x_0^2-y_0^2}{x+iy_0-x_0-iy_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)$$
$$=2x_0$$

取 $z=x_0+iy$，则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{x_0^2+y^2-x_0^2-y_0^2}{x_0+iy-x_0-iy_0}=\lim_{y\to y_0}[-i(y+y_0)]=-2y_0 i$$

上面两个极限结果说明当 z 分别沿平行于 x y 轴两个方向趋于 z_0 时，$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 趋于不同的极限值；

$\therefore$ $f(z)$ 在 $z_0\neq 0$ 是不可微的。

证法之二：设 $f(z)=u+iv=x^2+y^2$，即 $u=x^2+y^2$，$v=0$，则

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \frac{\partial u}{\partial y}=2y, \frac{\partial v}{\partial x}=0, \frac{\partial v}{\partial y}=0$，对于 $z_0 \neq 0$，x_0，y_0 中至少有一个不为 0，因而 $C—R$ 条件不成立，根据定理3.1，$f(z)$ 在 $z_0 \neq 0$ 不可微。

3．设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析．证明：如果对每一点 $z\in D$，有 $f'(z)=0$，那么 $f(z)$ 在 D 内为常数。

证明：由于 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=0$，

$\therefore$ 对于 D 内每一点 z 有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$，又由于 $f(z)$ 在 D 内解析，根据定理3,2有

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0$，$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=0$ 从而在 D 内恒有 $u(x, y)\equiv C_1$，$v(x, y)\equiv C_2$，

$\therefore$ 在 D 内，$f(z)\equiv C_1+iC_2$，

4．设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，证明：如果 $f(z)$ 满足下列条件之一，那么它在 D 内为常数。

（1）$Ref(z)$ 或 $Imf(z)$ 在 D 内为常数；

（2）$|f(z)|$ 在 D 内为常数。

证明：

（1）设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，知在 D 内 $u(x,y)\equiv C_1$，

则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，由于 $f(z)$ 在 D 内解析，有 $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=0, \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=0$。与上题同样理由可证得 $f(z)$ 在 D 内为常数。

若 $Imf(z)=v(x,y)\equiv C_2$，同样可证得 $f(z)$ 在 D 内为常

数。

（2）设 $f(z)=u+iv$，则在 D 内，有 $u^2+v^2\equiv C$，不妨设 $C\neq 0$，若 $C=0$，则 $u\equiv 0$，$v\equiv 0$，从而 $f(z)\equiv 0$，结论显然成立。对 $u^2+v^2=C$ 两边分别求对 x,y 的偏导数：

$$2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0, \qquad ①$$

$$2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=0. \qquad ②$$

由于 $f(z)$ 在 D 内解析，有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，代入面第二个等式中：

$$-2u\frac{\partial v}{\partial x}+2v\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad ③$$

把①与③联立解得：$\frac{\partial u}{\partial x}=0$，$\frac{\partial v}{\partial x}=0$，从而 $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=0$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$，与第三题同样理由可证得 $f(z)$ 在 D 内为常数。

5．证明：若函数 $f(z)$ 在上半平面解析，那么函数 $\overline{f(\bar{z})}$ 在下半平面解析。

证法一：设 $F(z)=\overline{f(\bar{z})}$，在下半平面内任取一点 z_0，z 也是下半平面内异于 z_0 的点，考虑

$$\lim_{z\to z_0}\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{f(\bar{z})-f(\bar{z}_0)}}{z-z_0}$$

$=\lim\limits_{z\to z_0}\left[\overline{\frac{f(\bar{z})-f(\bar{z}_0)}{\bar{z}-\bar{z}_0}}\right]$ 而 $\bar{z}_0$，$\bar{z}$ 在上半平面内，已知 $f(z)$ 在上半平面内解析，因此 $F'(z_0)=\overline{f'(\bar{z}_0)}$，从而 $F(z)=\overline{f(\bar{z})}$ 在下半平面内解析。