XUESHUXUEJIETIFANGFAWULINGZHAOCONGSHU

中学数学解题方法500招丛书

初中几何

编写组 编

哈尔滨出版社

$$\frac{1}{(R-d)^2}+\frac{1}{(R+d)^2}=\frac{1}{r^2}$$

500

招

· 中学数学解题方法 500 招丛书 ·

初 中 几 何

本书编写组

主编 佩捷

副主编 康明 牛秀君

哈尔滨出版社

（黑）新登字 12 号

书　　名：初中几何
主　　编：佩　捷
选题策划：刘培杰
责任编辑：刘培杰
封面设计：卞秉利
插图绘制：董　欣
版式设计：刘培杰
校　　对：康　明
出版发行：哈尔滨出版社
经　　销：全国各地新华书店
激光照排：哈尔滨出版社排版中心
印　　刷：哈尔滨工业大学印刷厂

开本：850×1168mm　1/32　印张：9　插页：0　字数：220 千字
1994 年 10 月第 1 版　1995 年 5 月第 2 次印刷　印数：0—8000
ISBN7－80557－726－9/G.168　定价：6.80 元

● 《中学数学解题方法500招丛书》 ●

总 序

刘 培 杰

俗话说："自古华山一条路"，如果将学数学比做爬山，那么精通之道也只有一条，那就是作题，作大量的习题。

华罗庚曾将光看书不作习题比做"入宝山而空返"。

著名数学家苏步青教授读书时为学好微积分，光是不定积分题就作了近万道。近年来，参加国际中学生数学奥林匹克的中国选手们，则更是因为遍解难题，才得以屡获金牌。正所谓"踏遍坎坷成大路"。

然而解数学题却不是一件容易的事，世界级解题专家、美国数学教育家波利亚曾不无悲观地说："解题同钓鱼术一样永远不会学会"。但解题作为一项有规则的活动还是有一些方法可学，至少是可模仿的。华侨大学的王志雄教授曾说出这样的体会："相对于问题似欲爆炸，题型不断更新，方法是较少也较稳定，如能较深入地、熟练地、灵活地掌握一些重要的解题方法，将使我们如乘快艇，得以优游

于题海之上，达到数学王国的彼岸”。

近年来，由《美国数学月刊》前主编、美籍加拿大老数学家哈尔莫斯（*Halmos, Paul Richard*）一句“问题是数学的心脏”的惊人之语，将解题运动推向高潮。1987年在上海举行的国际数学教育研讨会上，美国南伊利诺斯大学的 *J. P* 贝克（*Baker*）教授在他的以《解题教学——美国当前数学教学的新动向》为题的报告论文中指出：“如果说确有一股贯穿八十年代初期的潮流的话，那就是强调解题（*Problem Solving*）的潮流”。

为了配合这股潮流，世界各国大量出版数学问题与解题的丛书，真是汗牛充栋，精品纷现。光是著名的斯普林格出版社（*Springer Verlug*）从1981年开始出版的一套高水平的《数学问题丛书》至今就已出版了二十多种。我国教育界及出版界十分重视这类书的出版工作，早在1949年2月，旧中国教育部曾举行会议为补救当时数学教育质量低下提出了四点建议，其中一条是提倡学生自己动手解题并“希各大书局大量编印中学解题参考用书”。最近几年我国各大出版社出版了一些中学数学教育方面的丛书，如江苏教育社的《数学方法论丛书》(13册)，北大出版社的《数学奥林匹克》系列及翻译的美国《新数学丛书》，湖南教育社的《走向数学丛书》，但直至今天似乎还没有迹象表明要推出一套大型解题方法丛书。

哈尔滨出版社做为一“边陲小社”，出版这样一套丛书，尽管深感力所不逮，但总可算做一块引玉之砖。

最后编者有二点忠告：一是本《丛书》是一套入门书，不能包解百题，本《丛书》在编写之初曾以“贪大求全”为原则，试图穷尽一切方法，妄称“解题精技，悉数其间”。然而这实在是不可能的，也是不必要的。正所谓“有法法有尽，无法法无穷”。况且即使是已有的方法也不能生搬硬套。我国继徐光启和李善兰之后的清末第三大数学家华衡芳（1835—1902）曾指出：解题要随

机应变，不能“执一而论”，死记硬背为“呆法”，“题目一变即无所用之矣”，须“兼综各法”以解之，方可有效。数学家惠特霍斯（*Whitworth*）说过“一般的解题之成功，在很大的程度上依赖于选择一种最适宜的方法”。

二是读者读本《丛书》一定要亲自动手解题。正如陕西师大罗增儒副教授所指出：解题具有探索性与实战性的特征，解题策略要在解题中掌握。

最后，我们送给读者一句德国著名数学家普林斯海姆（1850～1941，*Pring sheim*，*Alfred*）的名言

不下苦功是不能获得数学知识的，而下苦功却是每个人自己的事，数学教学方法的逻辑严格性并不能在较大程度上去增强一个人的努力程度。

愿读完本《丛书》后，解题对你不再是难事。

一九九四年夏，序于松花江畔

目　录

怎样用平行线证题

直线与直线平行作为一种特殊的位置关系，在平面几何解题中起着重要作用，我们把这些作用大致分为三个方面.

一、平行线与等角替换

平行线的三条基本性质：

(1) 两条直线平行，则同位角相等；

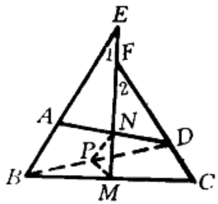
(2) 两条直线平行，则内错角相等；

(3) 两条直线平行，则同旁内角互补.

这几条性质在解题中是进行等角替换的重要依据，这一作用在下题的解法中是很明显的.

例1 已知在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$、$BM=MC$、$AN=ND$，BA、CD 的延长线分别交 MN 的延长线于 E、F，求证：$\angle 1=\angle 2$.

证明 连接对角线 BD，取其中点 P，连接 PM、PN，则 $PM \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CD$，$PN \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB$.



$\because AB=CD$，$\therefore\ PM=PN$.

于是 $\angle PMN=PNM$.

但 $PM \parallel CD$，$PN \parallel AB$；

$\therefore\ \angle 1=\angle PNM$，$\angle 2=\angle PMN$，故 $\angle 1=\angle 2$.

事实上，利用平行线进行等角替换，这在解题中应用是很普遍的.

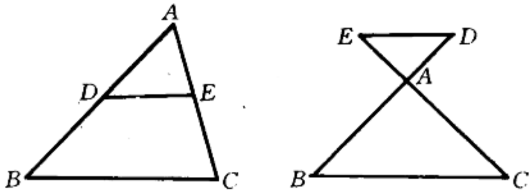
二、平行线与等比替换

结论1 平行于三角形一边并且和其他两边相交的直线所截得的三角形和原三角形相似.

结论2 平行于三角形一边的直线和三角形其他两边的延长线相交,所构成的三角形与原三角形相似.

通过这两个结论再结合相似三角形的性质在我们的思维中就可以形成这样的概念:在题目中有了平行线就会产生相似三角形,从而就会出现成比例的线段.

结论1和结论2给出了由平行线所构成的两个常见图形:



(1)　　　　　　(2)

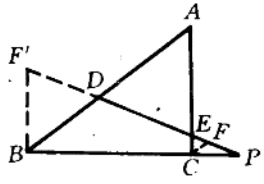
这两种图形给出了同样一组比例式:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

但它们的构图方式有明显区别,我们不妨称第(1)种基本图形为共线共端重合型,第(2)种基本图形为共线共端伸展型.

在解题中,常用添加平行线的方法,使之符合上述两类基本图形,从而证明成比例线段问题.

例2 在$\triangle ABC(AB>AC)$的AB边上取一点D在AC边上

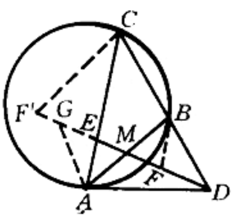


取一点 E，使 $AD=AE$，直线 DE 和 BC 边的延长线交于 P 点，求证：$\frac{BP}{CP}=\frac{BD}{CE}$.

分析 在结论中构成比 $\frac{BP}{CP}$ 的两个线段所在图形上是共线共端重合型，因此应想办法把它放在第一类基本图形中，以便使比 $\frac{BP}{CP}$ 通过等比替换向比 $\frac{BD}{CE}$ 靠拢. 为此可以得到两种添加辅助线的方法即过 C 点作 AB 的平行线或过 B 点作 CA 的平行线，其效果是一样的. 利用第一种方法可得到 $\frac{BP}{CP}=\frac{BD}{CF}=\frac{BD}{CE}$. 利用第二种方法可得到，$\frac{BP}{CP}=\frac{BF'}{CE}=\frac{BD}{CE}$. 其中 $CF=CE$、$BF'=BD$ 则是从第二类基本图形 $\triangle FCE\backsim\triangle DAE$ 和 $BF'D\backsim\triangle AED$ 得到的.

例 3 M 为 $\odot O$ 的弦 AB 的中点、C 为圆上任意一点，切线 AD 交 CB 延长线于 D、延长 DM 交 AC 于 E，求证：$\frac{AD^2}{BD^2}=\frac{CE}{AE}$.

分析 由于 $\frac{AD^2}{BD^2}=\frac{BD\cdot DC}{BD^2}=\frac{DC}{BD}$. 于是题目变成了证明 $\frac{DC}{BD}=\frac{CE}{AE}$. 从结论左端看，构成比 $\frac{DC}{BD}$ 的两个线段在图形上属于共线共端重合型，为了能将 $\frac{DC}{BD}$ 进行等比替换，应将其置于第一类基本图形中，这样就产生了两种添加辅助线的方法.



方法1,过 B 点作 CE 的平行线交 DE 于 F;

方法2,过 C 点作 BM 的平行线交 DE 的延长线于 F'.

在方法1中可得 $\frac{DC}{BD}=\frac{CE}{BF}$,而 BF 与 AE 则可通过 $\triangle BMF\cong\triangle AME$ 证明其相等.

在方法2中可得 $\frac{DC}{BD}=\frac{CF'}{BM}=\frac{CF'}{AM}=\frac{CE}{AE}$. 而最后一个等式是在第二类基本图形 $\triangle CEF'\backsim\triangle AEM$ 中得到的.

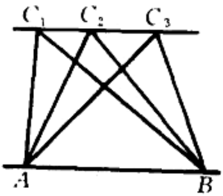
如果从结论的右端入手考虑,那么构成比 $\frac{CE}{AE}$ 的两个线段在图形上属于共线共端伸展型,为了能将 $\frac{CE}{AE}$ 进行等比替换,应将其置于第二类基本图形中,基于这种想法,除方法2的添加辅助线的方法外,还可找到方法3:过 A 点作 DC 的平行线交 DE 的延长线于 G,于是 $\frac{CE}{AE}=\frac{CD}{AG}$ 而 AG 和 DB 可通过 $\triangle AMG\cong\triangle BMD$ 证得相等.

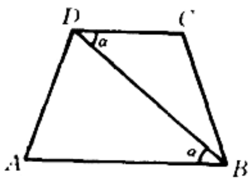
三、平行线与面积问题

结论3 在 AB 的平行线上的各点 C_1、C_2…… 与线段 AB 所构成的各三角形面积均相等.

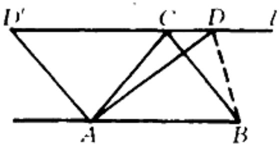
在利用平行线解决面积问题或用面积法解题的过程中常用到下面的结论:

结论4 若 $AB\parallel CD$,则 $\frac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle DBA}}=\frac{CD}{AB}$.





例4 已知等腰直角 $\triangle ABC$、$\angle C=90^\circ$,过 C 点作 $l\parallel AB$,在



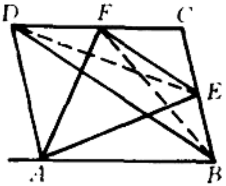
l 上取一点 D 使 $AD = AB$. 求 $\angle BAD$ 的度数.

解 设 $AC = a$,则 $AD = AB = \sqrt{2}a$. 设 $\angle BAD = \theta$, $\because l \parallel AB$, $\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABC}$,

即 $\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}a)^2 \cdot \sin\theta$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2}$,故 $\theta = 30°$ 或 $150°$.

例 5 在 $\square ABCD$ 中 $EF \parallel BD$,求证:$\triangle ABE$ 与 $\triangle ADF$ 等积.



证明 连 BF、DE,

$\because AD \parallel BE$,

$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle DBE}$,

$\because EF \parallel BD$,

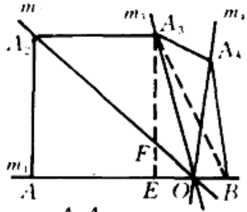
$\therefore S_{\triangle DBE} = S_{\triangle DBF}$,

$\because AB \parallel FD$,

$\therefore S_{\triangle DBF} = S_{\triangle ADF}$.

故 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ADF}$.

例 6 已知四条直线 m_1, m_2, m_3, m_4 依次相交于 O 点,过直线 m_1 上任意一点 A 引平行于 m_4 的直线交直线 m_2 于 A_2、过 A_2 引直线平行于 m_1 交 m_3 于 A_3,过 A_3 引平行于 m_2 的直线交 m_4 于 A_4,过 A_4 引平行于 m_3 的直线交 m_1 于 B 点,求证 $OB \leqslant \frac{OA}{4}$



证明 如图作 $A_3E \parallel A_2A$ 交 A_2O 于 F,交 AO 于 E,

则 $AE \perp\!\!\!\!\!= A_2A_3$, $OF \perp\!\!\!\!\!= A_3A_4$.

设 $\frac{A_3A_4}{OA_2} = x$. 则

$$\frac{A_2A_3}{AO}=\frac{AO-OE}{AO}=1-\frac{OE}{AO}=1-\frac{OF}{OA_2}=1-\frac{A_3A_4}{A_2O}=1-x.$$

于是 $\frac{OB}{OA}=\frac{S_{\triangle A_3BO}}{S_{\triangle A_2AO}}=\frac{S_{\triangle A_3A_4O}}{S_{\triangle A_2AO}}$

$$=\frac{S_{\triangle A_2A_4O}}{S_{\triangle A_2A_3O}}\cdot\frac{S_{\triangle A_2A_3O}}{S_{\triangle A_2AO}}=\frac{A_3A_4}{A_2O}\cdot\frac{A_2A_3}{AO}=x(1-x)$$

$$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}.$$

$\therefore$ $OB\leqslant\frac{OA}{4}$，当且仅当 $x=\frac{1}{2}$ 时等号成立.

所有的权威都赞同这样的观点，即柏拉图研究几何学或某些严密科学对于他研究哲学是必不可少的准备。在柏拉图的学校入口处张榜通告："不熟悉几何学的人请勿入内。"据传，柏拉图确曾拒绝过不通晓几何学的人作为他的学生。

——Ball, W. W. R.

怎样应用三角形内角平分线的性质

$\triangle ABC$ 中,若 AD 为 $\angle A$ 的平分线,则 $\dfrac{2\cos\frac{1}{2}\angle BAC}{AD}=\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}$. （*）

证明 （图略）由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}$ 得 $\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle A=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\frac{1}{2}\angle A$.

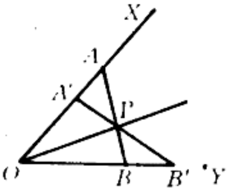
又 $\because\sin\angle A=2\sin\frac{1}{2}\angle A\cdot\cos\frac{1}{2}\angle A$,代入上式即得(*)式.

例 1 从点 O 出发引三条射线 OX、OY、OZ,与一直线相交于 A、B、C,且 $\angle XOY=\angle YOZ=60°$.

求证:$\dfrac{1}{OA}+\dfrac{1}{OC}=\dfrac{1}{OB}$ （Ⅰ）

证明 （图略),由公式及 $\cos60°=\frac{1}{2}$ 即可证得(Ⅰ)式.

例 2 已知 P 为 $\angle XOY$ 的平分线上任意一点,过 P 任作两直线交两边于 A、B、A'、B'. 记 OA、OB、OA'、OB' 分别为 a、b、a'、b'.



求证:$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a'}+\dfrac{1}{b'}$. （Ⅱ）

证明 由公式得:

$$\frac{2\cos\frac{1}{2}\angle AOB}{OP}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},\quad \frac{2\cos\frac{1}{2}\angle AOB}{OP}=\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}.$$

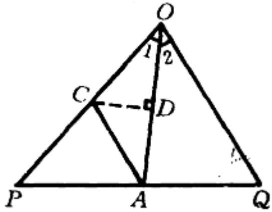
故(Ⅱ)式成立,即 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a'}+\dfrac{1}{b'}$.

例 3 OA 是 $\triangle OPQ$ 的 $\angle POQ$ 的平分线,$AC\parallel QO$ 交 OP 于

C. 求证：$\frac{OC}{OP}+\frac{OC}{OQ}=1.$ （Ⅲ）

证明 过 C 作 OA 垂线，D 为垂足，由公式得：

$$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=\frac{2\cos\frac{1}{2}\angle POQ}{OA} \quad ①$$



$\because AC\ /\!/\ OQ$，$\therefore \angle CAO=\angle 2$；

又 $\because \angle 1=\angle 2$，$\therefore AC=CO$，

D 为 OA 中点，$\cos\frac{1}{2}\angle POQ=\frac{\frac{1}{2}OA}{OC}$，

代入 ① 即得（Ⅲ）式.

例 4 AD 为 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的平分线，D 在 BC 上.

求证 $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC.$ （Ⅳ）

证明 （图略），在 $\triangle ABD$ 中，有 $\cos\frac{1}{2}\angle A=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}$ 代入（*）化简并利用 $DC=BD\cdot\frac{AC}{AB}$ 就得（Ⅳ）式.

例 5 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=36°$，$AB=AC=b$，$BC=a$.

求证 $b^2-a^2=ab.$ （Ⅴ）

证明 作 $\angle B$ 的平分线 BD 交 AC 于 D（图略）.

显然 $\frac{1}{2}\angle B=36°$，$\frac{2\cos 36°}{a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，

又在 $\triangle ABC$ 中，有

$$2\cos 36°=\frac{2b^2-a^2}{b^2},$$

$\therefore\ 1+\frac{a}{b}=\frac{2b^2-a^2}{b^2}$，化简得（Ⅴ）式.