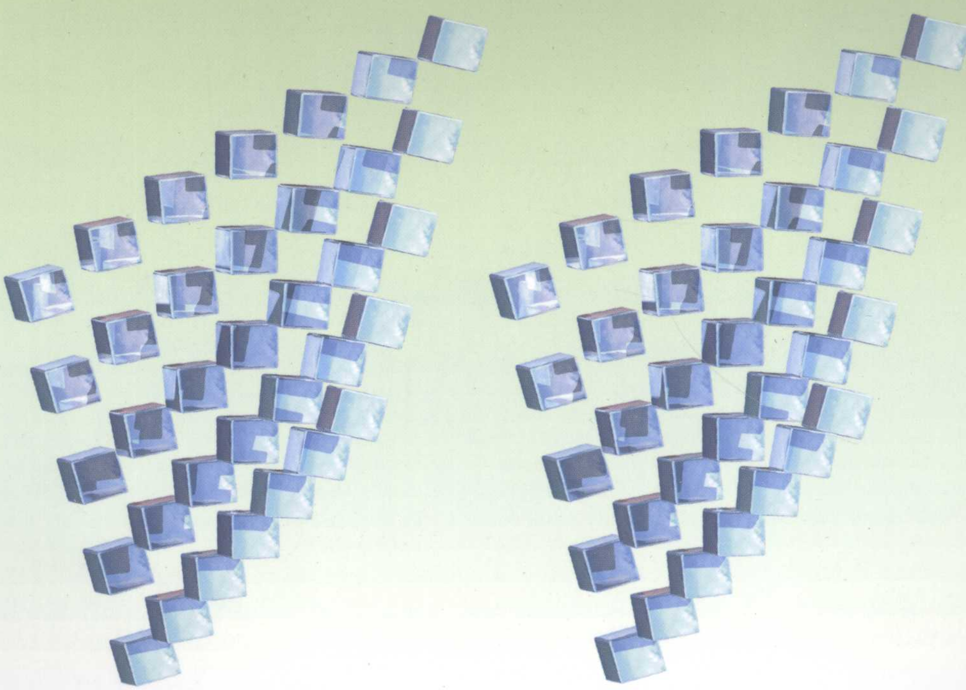
GAODENG SHUXUE TONGBU LIANXI

高等数学

同步练习

第 2 版

安徽工程科技学院数学教研室 编



中国科学技术大学出版社

高等数学同步练习

安徽工程科技学院数学教研室　编

中国科学技术大学出版社

2008 · 合肥

内容简介

本书是编者根据多年的教学实践，按照教育部最新“高等数学课程教学基本要求”，本着题型丰富、题量恰当、难易适中、方便实用的原则，历经七年试用，修订而成。

本书内容分五个模块：同步练习、习题选解、各章自测题、期末考试模拟试题、高等数学及其应用插件。可供高等院校理工类学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步练习/安徽工程科技学院数学教研室编. 2版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2008.9

ISBN 978-7-312-02396-5

Ⅰ. 高… Ⅱ. 安… Ⅲ. 高等数学—高等学校—习题 Ⅳ. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 140947 号

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号，邮政编码：230026)
中国科学技术大学印刷厂印刷
全国新华书店经销

开本：787×1092/16　印张：9.5　字数：240 千
2005 年 8 月第 1 版　2008 年 9 月第 2 版　2008 年 9 月第 3 次印刷
印数：13001—17500
定价：15.00 元

目　　录

同步练习

班级________ 姓名________ 序号________

第一章 函数与极限

第一节 映射与函数

一、选择题

1. 函数 $y=\dfrac{\ln(x+4)}{\sqrt{x-4}}$ 的定义域是( ).

A. $\{x|x>4\}$ B. $\{x|x>-4\}$ C. $\{x|x\geqslant-4\}$ D. $\{x|x\geqslant4\}$

2. 下列各对函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示相同函数的是( ).

A. $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$ B. $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=|x|$

C. $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$ D. $f(x)=\lg\sqrt{x}, g(x)=\dfrac{1}{2}\lg|x|$

二、填空题

1. 设函数 $f(x)=2^x, g(x)=5x+5$,则 $g[f(x)-x]=$________.

2. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,则 $f(x+a)+f(x-a)\ (0<a<\dfrac{1}{2})$ 的定义域为________.

三、求证题

1. 设映射 $f: X\to Y, A\subset X, B\subset X$,则 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

2. 已知 $f(x)=e^{x^2}, f(\varphi(x))=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant0$,求 $\varphi(x)$ 的表达式及定义域.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant1\\ 2-x & 1<x\leqslant2\end{cases}$,求 $f(x-1)$.

4. 设 $\varphi(x), f(x)$ 及 $g(x)$ 是单调增函数,证明:
若 $\varphi(x)<f(x)<g(x)$,则 $\varphi(\varphi(x))<f(f(x))<g(g(x))$.

班级________________ 姓名________________ 序号________________

第二节 数列的极限

一、选择题

1. 数列 x_n：$0,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},0,-\frac{1}{6},0,\frac{1}{8},0,-\frac{1}{10},\cdots$（　　）.

   A. 发散　　B. 收敛于 0　　C. 收敛于 −1　　D. 收敛于 1

2. 下列数列中收敛的是（　　）.

   A. $\{(-1)^n\}$　　B. $\{n^2+1\}$　　C. $\{(-1)^n\frac{1}{2n}\}$　　D. $\{1+\sin(2n+1)\}$

3. 下列数列中极限不存在的是（　　）.

   A. $10,10,10,\cdots$　　B. $\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{4}{5},\cdots$

   C. $x_n=\begin{cases}\frac{n}{n+1} & n\text{ 为奇数}\\ \frac{n}{1-n} & n\text{ 为偶数}\end{cases}$　　D. $x_n=\begin{cases}1 & n<10^6\\ \frac{1}{n} & n\geqslant 10^6\end{cases}$

二、证明题

1. 根据数列极限定义，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$.

2. 设 $\{x_n\}$ 是数列，证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，并举例说明反过来未必成立.

3. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

班级______________ 姓名______________ 序号______________

第三节 函数的极限

一、选择题

1. 下列说法中正确的是(　　).

   A. 函数在 x_0 处无定义，则在这一点必无极限

   B. 函数在 x_0 处有定义，则在这一点必有极限

   C. 若函数在 x_0 处有定义且有极限，则其极限值必为该点函数值

   D. 在确定函数在点 x_0 处的极限时，对函数在点 x_0 是否有定义不作要求

2. 设 $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$，对于给定正数 ε，则定义中的 δ 必须(　　).

   A. $\delta \geqslant \frac{\varepsilon}{3}$　　B. $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$　　C. $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$　　D. $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$

3. 若 $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=A$，则对于任意给定的小正数 ε，总存在一个正数 δ 使得当满足何条件时恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$(　　).

   A. $0<|x-x_0|<\delta$　　B. $0<x-4<\delta$

   C. $0<4-x<\delta$　　D. $0<|x-4|<\delta$

二、求证题

1. 根据函数极限的定义证明：$\lim\limits_{x\to 2}(3x+5)=11$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & x<0 \\ x & 0\leqslant x<1 \\ 1 & 1\leqslant x<\infty \end{cases}$，试分别讨论 $f(x)$ 在 $x\to 0$，$x\to 1$ 时的极限，并画出函数的图形.

班级____________ 姓名____________ 序号____________

第四节 无穷小与无穷大

一、选择题

1. 当 $x \to x_0$ 时 α 和 β 都是无穷小，下列变量中当 $x \to x_0$ 时可能不是无穷小的是（ ）.

A. $\alpha+\beta$　　B. $\alpha-\beta$　　C. $\alpha \cdot \beta$　　D. $\dfrac{\alpha}{\beta}(\beta \neq 0)$

2. 下列变量在给定的变化过程中为无穷小的是（ ）.

A. $2^x-1(x \to 0)$　　B. $1-\dfrac{|x|}{x}(x \to 0)$

C. $\dfrac{1}{(x-1)^2}(x \to 1)$　　D. $2^{-x}-1(x \to 1)$

3. 下列命题中正确的是（ ）.

A. 无界变量必是无穷大　　B. 无穷大是一个很大的数

C. 无穷大的倒数是无穷小　　D. 无穷小是一个很小的数

4. “当 $x \to x_0$ 时，$f(x)-A$ 是一个无穷小”是“函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处以 A 为极限”的（ ）.

A. 必要而不充分条件　　B. 充分而不必要条件

C. 充分必要条件　　D. 无关条件

二、证明题

1. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，试证明：当 $x \to \infty$ 时它是无穷小，当 $x \to 0$ 时它是无穷大.

班级________________ 姓名________________ 序号________________

第五节　极限运算法则

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^2(3x+1)^3}{(2x+1)^5}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

6. $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}=0\times\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}=0$ 错在何处,请指出.

第六节 极限存在准则 两个重要极限

一、选择题

1. 收敛数列(　　).

A. 必有界　　B. 必无界　　C. 不一定有界　　D. 必单调

2. 下列结论正确的是(　　).

A. 无界数列必发散　　B. 发散数列必无界

C. 有界数列必收敛　　D. 单调数列必收敛

3. 下列等式中成立的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{3x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=1$　　C. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$

4. 下列极限中极限值为 e 的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+2}$　　C. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{-\frac{1}{x}-2}$

二、求证题

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{\frac{x}{2}}$.

2. 证明数列 $x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}, \cdots$ 的极限存在并求极限值.

班级________________ 姓名________________ 序号________________

第七节 无穷小的比较

一、选择题

1. 下列函数中当 $x\to0$ 时，与无穷小 x 相比是高阶无穷小的是（　　）.

A. $\sin x$　　B. $x+x^2$　　C. $\sqrt{x}$　　D. $1-\cos x$

2. 当 $x\to0$ 时与 $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ 等价的无穷小是（　　）.

A. x　　B. $2x$　　C. x^2　　D. $2x^2$

3. 函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时，若（　　）.

A. 不是无穷大，则必有界　　B. 极限不存在，则必为无界

C. 是无界，则必为无穷大　　D. 是无穷小，则必存在极限

4. 当 $x\to0$ 时与 $e^{7x}-1$ 等价的无穷小是（　　）.

A. x　　B. $5x$　　C. $7x$　　D. x^3

二、利用等价无穷小的性质求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\arcsin x)^2}{1-\cos x}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

班级＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿＿＿ 序号＿＿＿＿＿＿＿＿

第八节　函数的连续性与间断点

一、选择题

1. 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处左连续且右连续是它在该点连续的(　　).

A. 必要条件　　B. 充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 无关条件

2. 下列函数在 $x=0$ 处不连续的是(　　).

A. $f(x)=\begin{cases} e^x & x\leqslant 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & x>0 \end{cases}$　　B. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^4}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

3. 若函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} & x>0 \\ 0 & x=0 \\ 1+e^x & x<0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

A. 左连续　　B. 右连续　　C. 左极限不存在　　D. 右极限不存在

4. 要使函数 $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 在 $x=0$ 处连续，则要求补充定义 $f(0)=$(　　).

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin x & -3<x<0 \\ L & x=0 \\ x\sin\dfrac{1}{x}+K & 0<x<8 \end{cases}$ 在定义域内连续，则 L,K 的值为(　　).

A. $L=0,K=1$　　B. $L=1,K=0$

C. $L=1,K=1$　　D. $L=0,K=0$

二、填空题

1. $x=2$ 是 $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ 的＿＿＿＿＿＿＿＿间断点.

2. $x=0$ 是 $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 的＿＿＿＿＿＿＿＿间断点.

3. 设 $f(x)=\dfrac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$，则 $f(0^-)=$＿＿＿，$f(0^+)=$＿＿＿，$x=0$ 为＿＿＿间断点.

4. 设 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$，可去间断点 $x=1$，则 $a=$＿＿＿，$b=$＿＿＿.

班级________________ 姓名________________ 序号________________

第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性
第十节 闭区间上连续函数的性质

一、选择题

1. 函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续是它在$[a,b]$上必能取得最大值和最小值的（　　）.

A. 必要条件　B. 充分条件　C. 充分必要条件　D. 无关条件

2. $f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的初等函数，则 $f(x)$在$[a,b]$上（　　）.

A. 有最大值，无最小值　B. 有最小值，无最大值

C. 必有最大值、最小值　D. 无最大值，亦无最小值

二、求证题

1. 利用函数连续性等计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\pi$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}(a>0)$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}$（提示：令 $t=x-x_0$）.

2. 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，若 $f(a)<a$，$f(b)>b$，试证：在开区间(a,b)内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\xi$.（提示：设辅助函数 $g(x)=f(x)-x$）

3. 证明：方程 $x^4-3x^2+7x=10$ 至少有一个实根在 1 与 2 之间.

第二章 导数与微分

第一节 导数概念

一、选择题

1. 设 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，则(　　).

A. $f'(x_0)$ 必存在　　B. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 必存在

C. $f'(x_0)$ 必不存在　　D. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 必不存在

2. 函数 $f(x)=|x|+2$ 在 $x=0$ 处(　　).

A. 不连续，但可导　　B. 不连续，也不可导

C. 连续且可导　　D. 连续但不可导

3. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{3}x^3 & x\leqslant 1 \\ x^2 & x>1 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的(　　).

A. 左、右导数都存在　　B. 左导数存在，但右导数不存在

C. 左导数不存在，右导数存在　　D. 左、右导数都不存在

二、填空题

1. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$，则 $f'(0)=$____________________.

2. 已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h \to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$____________________.

三、计算题

1. 设 $f(x)=\begin{cases} a\sin x+1 & x\leqslant 0 \\ b(1+2x) & x>0 \end{cases}$，试确定常数 a,b，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

2. 设曲线 $y=x^3$ 上点 M 处的切线平行于直线 $3x-y-1=0$，求点 M 的坐标，并写出曲线在该点的切线方程.

3. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，用定义求 $f'(x)$.