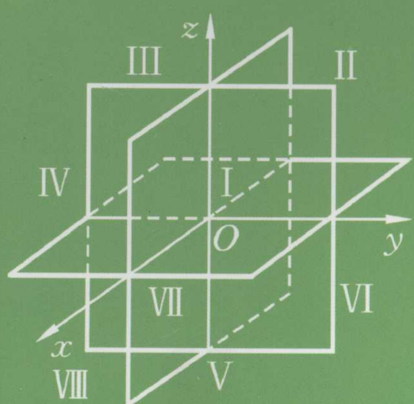
新编高等院校公共基础课系列规划教材

高等数学（下册）

Gaodeng Shuxue

林益　李中林　金丽宏　主编



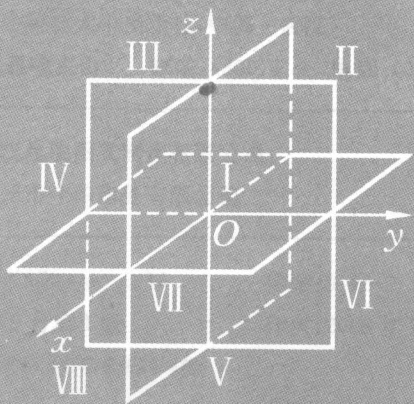
华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

新编高等院校公共基础课系列规划教材

高等数学（下册）

Gaodeng Shuxue

林益　李中林　金丽宏　主编
吴洁　邵琨　涂平　张丹丹　编



华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/林　益　李中林　金丽宏　主编. —武汉:华中科技大学出版社,2008年9月
ISBN 978-7-5609-4525-5

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①林…　②李…　③金…　Ⅲ. 高等数学　Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第135790号

高等数学(下册)　　林　益　李中林　金丽宏　主编

责任编辑:史永霞　　封面设计:杨　玲
责任校对:张　琳　　责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉星明图文制作有限公司
印　刷:荆州市今印印务有限公司

开本:787mm×960mm　1/16　印张:9.25　字数:176 000
版次:2008年9月第1版　印次:2008年9月第1次印刷　定价:34.00元(上、下册)
ISBN 978-7-5609-4525-5/O·462

新编高等院校公共基础课系列规划教材

编委会成员名单

内容简介

本书是为理工类或经管类大专学生编写的基础课教材，分为上、下册. 上册内容包括：函数与极限、导数及其应用、不定积分、定积分及其应用. 下册内容包括：微分方程与差分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、二重积分、无穷级数.

本书以“必需、够用”为度，注重“数学为人人”的理念，努力提高学生学习兴趣，增强应用数学的能力.

对数学要求不高的理工类或经管类本科专业也可使用本书.

前 言

本书是为高等专科学校理工、经管类学生所编写的基础课教材，其内容包括函数与极限、导数及其应用、不定积分、定积分及其应用：微分方程与差分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、二重积分、无穷级数等.

高等数学是重要的基础课程，它不仅为后续的专业课程提供了必要的工具，同时也是专业技术人才素质教育的重要组成部分. 结合大专教育的特点和要求，本书在内容取舍上不追求理论上的完整性和系统性，在取各家之长与精选的基础上，达到"必需、够用"的要求. 编写时作者有意识地引导学生了解数学与社会的关系，注意从学生身边的各种社会、生活及科学的问题出发，展开数学理论和应用的学习. 在教学观念上，不过分强求学生如何去更深刻地理解数学概念、原理及研究的过程，而是注重让学生体会数学的本质以及数学的价值，让学生感受到"数学为人人"的思想.

全书语言流畅，内容深入浅出，通俗易懂，可读性强。特别是书中列举的应用问题新颖、趣味性强，能够激发学生的学习兴趣，亲近数学理论，提高学生应用数学的能力.

本书由林益、李中林、金丽宏主编，吴洁、邵琨、涂平、张丹丹编.

由于作者水平有限，时间也紧迫，因此不可避免地会有不尽人意之处，恳请有关专家、同行和广大读者批评指正.

编 者

2008 年 5 月

目 录

第 5 章　微分方程与差分方程

微分方程研究的对象是函数.许多实际问题所表现出来的量的关系往往不能找到反映某个变化过程或某一系统的函数关系,却能够根据问题的性质及给出条件列出一个含有未知函数导数(或微分)的关系式,这就是我们要介绍的微分方程.它是微积分的自然发展,是数学联系实际最紧密的重要分支之一.本章将介绍微分方程的基本概念,讨论几种常见微分方程的解法以及它们在实际问题中的应用,最后介绍差分方程.

5.1　微分方程的基本概念

在初等数学中,我们曾讨论过一些方程,如

$$ax^2+bx+c=0,\quad 2^{x+2}+5^x-13x=0.$$

第一个方程只含有未知量 x 的代数运算,称为代数方程;第二个方程含有未知量 x 的超越运算,称为超越方程.它们有一个共同点,即未知量 x 均为数值.在本书中我们又遇到了另一类方程,如

$$x^2-y^2=1,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2\quad 或\quad \mathrm{d}y=x^2\mathrm{d}x.$$

这里作为未知量的 y 已经不是数值,而是关于 x 的函数 $y=y(x)$,我们称这类方程为函数方程;但这两个方程亦有区别,后者含有未知函数的导数(或微分)运算,这种特殊的函数方程,就是微分方程.

定义　含有未知函数的导数(或微分)的方程,称为微分方程.其中,未知函数若是一元函数的,称为常微分方程;未知函数为多元函数的,称为偏微分方程.

本书仅讨论常微分方程.下面通过具体例子来说明有关微分方程的基本概念.

例 1　求过点(1,2)的一条平面曲线,该曲线上任一点(x,y)处的切线斜率为 $2x$.

解　设所求曲线为 $y=y(x)$,由导数的几何意义知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x,$$

即

$$\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x.$$

两边积分得

$$y=x^2+C\quad (C 为任意常数).$$

由已知,曲线过(1,2),即 $y(1)=2$,将其代入上式,定出 $C=1$,故所求曲线为 $y=x^2+1$.

例 2　设函数 $y=y(x)$ 二阶连续可微,且 $y''(x)=6x,y(0)=0,y'(0)=0$,求此函数.

解 由 $y''=6x$，两边积分得

$$y'=3x^2+C_1,$$

再积分得

$$y=x^3+C_1x+C_2.$$

又因为 $y(0)=0, y'(0)=0$，代入上式定出 $C_1=0, C_2=0$，故所求函数为

$$y=x^3.$$

微分方程中所含未知函数的最高阶导数或微分的阶数称为该微分方程的阶.

若微分方程中未知函数及其微商都是一次的，则称该微分方程为线性微分方程，否则称为非线性微分方程.

满足微分方程的函数 $y=y(x)$ 称为微分方程的解；如果微分方程的解中所含相互独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相等，则称这样的解为该方程的通解（常数相互独立，是指它们不能通过运算合并成一个）；确定了任意常数的解称为该方程的特解.

任意的微分方程的一个解，都对应于平面上的一条曲线，称之为该方程的积分曲线；而通解则对应于平面上的无穷多条积分曲线，称之为该方程的积分曲线族.

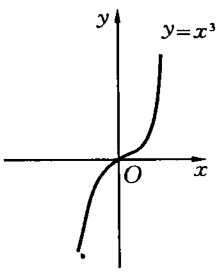


图 5-1

反映曲线在某一点特定状态或某一实际问题初始状态的条件称为初始条件，由初始条件和微分方程构成的问题称为初值问题.

下面以例 2 来说明这些概念.

$y''=6x$ 为二阶微分方程，它是线性的，其解为 $y=x^3+C_1x+C_2$，这是该方程的通解，而 $y=x^3$ 是它的一个特解，其积分曲线如图 5-1 所示. $y(0)=0, y'(0)=0$，即为其初始条件，而 $\begin{cases} y''=6x, \\ y(0)=0, y'(0)=0, \end{cases}$ 构成了一个初值问题.

习题 5.1

1. 指出下列微分方程的阶数、线性与非线性：

(1) $x\dfrac{dy}{dx}+y=\sin x$； (2) $y''+2y=e^x$； (3) $\dfrac{d^2x}{dy^2}+xy=0$.

2. 检验下列各题中所给函数是否为相应微分方程的解：

(1) $\dfrac{dy}{dx}+y=x$， $y=e^x+x-1$；

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4x=0$， $y=\cos 2x+\sin 2x$；

(3) $x\,dx+y\,dy=0$， $x^2+y^2=1$.

5.2　一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y')=0.$$

我们主要讨论如下形式的微分方程

$$y'=f(x,y).$$

5.2.1　变量可分离的方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$$

的微分方程称为变量可分离方程，其中 $f(x)$，$g(y)$ 为连续函数.

此类方程的具体解法如下：

(1) 化为变量分离形式，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x;$$

(2) 两边积分，即

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C.$$

注意：两不定积分均为一个原函数，不加常数.

例 1　解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=ay$.

解　先分离变量 $\qquad \frac{\mathrm{d}y}{y}=a\mathrm{d}x,$

两边积分得 $\qquad \ln|y|=ax+C_1,$

即 $\qquad |y|=\mathrm{e}^{ax+C_1},$

故 $\qquad y=C\mathrm{e}^{ax}$　(C 为任意常数).

例 2　解方程 $y'=\mathrm{e}^{x-y}$.

解　原方程可写成 $\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y},$

分离变量得 $\qquad \mathrm{e}^y\mathrm{d}y=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x,$

两边积分得 $\qquad \mathrm{e}^y=\mathrm{e}^x+C.$

例 3　求初值问题

$$\begin{cases}y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0,\\ y(1)=1,\end{cases}$$

的解.

解 化为变量分离形式,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分得 $$\ln|y|=-\ln|x|+C_1,$$

即

$$xy=C \quad (C\text{ 为任意常数}).$$

由 $y(1)=1$,定出 $C=1$,故所求解为 $xy=1$.

5.2.2 齐次方程

形如 $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$的微分方程称为齐次方程.

此类方程具体解法如下:

(1) 令$\frac{y}{x}=u$,即 $y=ux$;

(2) 对 $y=ux$ 求导得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$;

(3) 将上式代回原方程得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u),$$

即 $$\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad (\text{变量可分离方程});$$

(4) 求出通解后,将 $u=\frac{y}{x}$ 代回.

例 4 解方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}$.

解 原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1},$$

令 $y=ux$,得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2}{u-1},$$

即 $$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{u-1}.$$

于是 $$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u.$$

两边积分得 $$\ln x = u - \ln u + C_1,$$

整理得 $$xu = e^{u+C_1}.$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入得 $$y = Ce^{\frac{y}{x}}.$$

例 5 解方程 $(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0.$

解 原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-x}{y+x}=\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}.$$

令 $\dfrac{y}{x}=u$，则 $$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u-1}{u+1},$$

分离变量，有

$$\frac{u+1}{u^2+1}\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两边积分，有

$$\int\frac{u+1}{u^2+1}\mathrm{d}u=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

因 $$\int\frac{u+1}{u^2+1}\mathrm{d}u=\int\frac{u}{u^2+1}\mathrm{d}u+\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1},$$

故积分得 $$\frac{1}{2}\ln(1+u^2)+\arctan u=-\ln x+C_1.$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入得

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)+\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln x^2=C_1,$$

于是 $$\ln(x^2+y^2)+2\arctan\frac{y}{x}=C_2,$$

即 $$x^2+y^2=Ce^{-2\arctan\frac{y}{x}}.$$

5.2.3 一阶线性微分方程

形如 $y'+p(x)y=q(x)$ 的微分方程称为一阶线性微分方程. 当 $q(x)\equiv 0$ 时，称之为一阶线性齐次微分方程；当 $q(x)\not\equiv 0$ 时，称之为一阶线性非齐次微分方程.

首先讨论一阶线性齐次方程 $y'+p(x)y=0$ 的情形. 这是一个变量可分离方程，解之得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-p(x)y,$$

即 $$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-p(x)\mathrm{d}x,$$

积分得 $$\ln y=-\int p(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

故 $$y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

为一阶线性齐次方程的通解.

下面求解一阶线性非齐次方程

$$y'+p(x)y=q(x).$$

我们采用常数变易法来求此方程的解.所谓常数变易法就是把非齐次方程所对应的齐次方程的通解中的常数 C 变成变量 $C(x)$,然后将其代入原方程定出 $C(x)$,即得所求.

令 $y=C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$,代入原方程得

$$[C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}]'+p(x)[C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}]=q(x),$$

即 $$C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}-C(x)p(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}+C(x)p(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=q(x).$$

于是 $$C'(x)=q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x},$$

因此 $$C(x)=\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C.$$

从而得到一阶非齐次线性微分方程

$$y'+p(x)y=q(x)$$

的解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right].$$

例 6 解方程 $(x^2+1)y'+2xy=4x^2$.

解法一 原方程化为

$$y'+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{4x^2}{1+x^2}.$$

于是 $p(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$, $q(x)=\dfrac{4x^2}{1+x^2}$. 由解的公式得

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{4x^2}{1+x^2}\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=\mathrm{e}^{-\ln(1+x^2)}\left(\int\frac{4x^2}{1+x^2}\mathrm{e}^{\ln(1+x^2)}\mathrm{d}x+C\right)\\&=\frac{1}{1+x^2}\left(\int 4x^2\mathrm{d}x+C\right)\\&=\frac{4x^3}{3(1+x^2)}+\frac{C}{(1+x^2)}.\end{aligned}$$

解法二　有时直接使用公式会比较麻烦，这时我们经常使用常数变易法来求一阶线性方程的解.

先求齐次方程的通解

$$(x^2+1)y'+2xy=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{2xy}{1+x^2},$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{-y}=\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{1+x^2},$$

$$\ln\frac{1}{y}=\ln(1+x^2)+C_1,$$

$$y=\frac{C}{1+x^2}.$$

再令 $y=\dfrac{C(x)}{1+x^2}$，代入原方程得

$$C'(x)=4x^2,$$

于是

$$C(x)=\frac{4}{3}x^3+C_1,$$

故

$$y=\frac{4x^3+C}{3(1+x^2)}$$

为所求的通解.

5.2.4　贝努利方程

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^n\quad(n\neq 0,1)$ 的方程称为贝努利方程.

将此方程变形如下：

$$\frac{1}{y^n}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y^{1-n}=q(x),$$

$$\frac{1}{1-n}\cdot\frac{\mathrm{d}y^{1-n}}{\mathrm{d}x}+p(x)y^{1-n}=q(x).$$

令 $z=y^{1-n}$，则得线性方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x),$$

解之得贝努利方程的通解为

$$y^{1-n}=\mathrm{e}^{-\int(1-n)p(x)\mathrm{d}x}\left[\int(1-n)q(x)\mathrm{e}^{\int(1-n)p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right].$$

例 7　解方程 $y'-\dfrac{6}{x}y=-xy^2$.

解　这是一个 $n=2$ 的贝努利方程.

令 $z=y^{1-2}=y^{-1}$，则 $\dfrac{dz}{dx}=-y^{-2}\dfrac{dy}{dx}$，代入原方程得

$$\frac{dz}{dx}+\frac{6}{x}z=x.$$

其通解为

$$\begin{aligned}z&=e^{-\int\frac{6}{x}dx}\left(\int xe^{\int\frac{6}{x}dx}dx+C\right)\\&=\frac{1}{x^6}\left(\int x^7dx+C\right)=\frac{1}{x^6}\left(\frac{x^8}{8}+C\right)\\&=\frac{x^2}{8}+\frac{C}{x^6}.\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{y}=\frac{x^2}{8}+\frac{C}{x^6}\quad 或\quad \frac{x^6}{y}=\frac{x^8}{8}+C.$$

此题亦可直接求解，即

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}&=e^{-\int(1-2)(-\frac{6}{x})dx}\left(\int(1-2)(-x)e^{\int(1-2)(-\frac{6}{x})dx}dx+C\right)\\&=e^{-\int-\frac{6}{x}dx}(xe^{\int\frac{6}{x}dx}dx+C)=\frac{x^2}{8}+\frac{C}{x^6}.\end{aligned}$$

习题 5.2

1. 求下列微分方程的通解：

(1)$(1+y^2)dx=xdy$；　　(2)$e^y(1+y')=1$；

(3)$e^{2x}ydy-(y+1)dx=0$.

2. 求下列微分方程通解：

(1)$x\dfrac{dy}{dx}=y(\ln y-\ln x)$；　　(2)$(xe^{\frac{y}{x}}+y)dx=xdy$.

3. 解下列初值问题：

(1)$(1+e^x)yy'=e^y$，　$y(0)=0$；

(2)$xy'-y=x\tan\dfrac{y}{x}$，　$y(1)=\dfrac{\pi}{2}$.

4. 解下列微分方程：

(1)$y'-2xy=e^{x^2}\cos x$；　　(2)$y'-y\tan x=\sec x$，　$y(0)=0$；

(3)$y'+y\sin x=\sin^3x$；　　(4)$y'-\dfrac{1}{x}y=-xy^3$.

5.3　可降阶的二阶微分方程

二阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y',y'')=0.$$

本节主要讨论几种可降阶的二阶微分方程.

5.3.1　$y''=f(x)$（$f(x)$ 为连续函数）

对方程

$$y''=f(x)$$

两边积分得
$$y'=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

两边再积分得
$$y=\int\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x+C_1x+C_2,$$

此即为原方程的通解.

例 1　解方程 $y''=\sin x$.

解　对 $y''=\sin x$ 两边积分得

$$y'=-\cos x+C_1,$$

两边再积分得
$$y=-\sin x+C_1x+C_2.$$

5.3.2　$y''=f(x,y')$（方程不含未知函数 y）

令 $y'=p(x)$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，　方程 $y''=f(x,y')$ 可化为一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(x,p),$$

再按一阶方程求解.

例 2　解方程 $y''=y'+2x$.

解　令 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. 原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p+2x,$$

即
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-p=2x.$$

于是
$$p=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left(\int 2x\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right)$$

$$=\mathrm{e}^{x}\left(\int 2x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C_1\right)$$