现代数学译丛 8

微分方程的对称与积分方法

〔加〕G.W.布卢曼，S.C.安 科 著

闫振亚 译

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学译丛 8

微分方程的对称与积分方法

〔加〕G. W. 布卢曼，S. C. 安科　著

闫振亚　译

科学出版社

北京

图字: 01-2007-3734 号

内 容 简 介

本书系统地介绍了量纲分析、Lie 无穷小变换以及在常微分方程(组)和偏微分方程(组)中的应用, 全书共分四章. 第 1 章介绍了量纲分析、有关的重要原理及其在偏微分方程不变解中的应用. 第 2 章发展了 Lie 无穷小变换和 Lie 代数, 给出了一些基本定理和性质, 另外, 详细给出了无穷小变换的高阶展开公式. 第 3 章主要讨论 Lie 对称在各种常微分方程(组)中的应用, 包括一阶、二阶和更高阶的方程以及常微分方程的初值问题等. 另外, 还讨论了接触对称、高阶对称和伴随对称. 第 4 章讨论 Lie 对称在各类偏微分方程(组)中的应用. 每节后附有大量经典的例子, 供读者进一步熟练掌握 Lie 对称及其拓展类型的使用方法, 详略得当, 易于读者阅读.

本书可作为高等院校数学、物理、力学、生物学、工程等专业的高年级大学生和研究生教材或参考书. 也可供相关领域的教师和科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

微分方程的对称与积分方法 /〔加〕G.W.布卢曼, S.C.安科著; 闫振亚译.
—北京: 科学出版社, 2009
(现代数学译丛; 8)
ISBN 978-7-03-022453-8

I. 微… II. ① 布… ② 闫… III. 微分方程 IV. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 099657 号

责任编辑: 赵彦超 / 责任校对: 鲁 素
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009 年 1 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2009 年 1 月第一次印刷 印张: 23 1/4
印数: 1—2 500 字数: 452 000

定价: 68.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换〈明辉〉)

中文版序

本中文译本遵循英文原版. 另一本关于偏微分方程的高级对称方法的书, 即本书英文版的第二卷, 即将完成并将于 2009 年由 Springer 出版社出版.

第二卷 (合作者为 Alexei Cheviakov 和 Stephen Anco) 是有关 PDEs 的对称和守恒律的现代发展. 内容包括接触对称和高阶对称; 守恒律的直接计算方法以及这些方法如何取代 Noether 定理并被推广以计算任意 PDEs(无论其是否为变分的) 的守恒律; 有关 PDEs 间映射的构造, 包括利用对称或守恒律的乘法来构造非线性 PDE 到线性 PDE 的映射, 以及变系数线性 PDE 到常系数线性 PDE 的映射; 如何利用给定 PDE 的守恒律构造非局部相关但等价的 PDE, 并在此框架下说明物理方程的 Lagrange 形式和 Euler 形式是如何相关的, 如何利用这样的非局部相关系统来构造给定 PDE 的非局部守恒律和对称; 如何利用这样的非局部相关系统来进一步构造不变解, 寻求非线性系统到线性系统的映射, 寻求能够变为常系数线性 PDE 的变系数线性 PDE 类; 寻求给定 PDE 的扩展的不变解族的非古典方法; 执行运算所需的符号算法.

非常感谢闫振亚承担本书的翻译工作, 希望本书的中文译本能使中国学生和研究者更容易接受和理解对称和微分方程.

G.W. 布卢曼

温哥华, 加拿大, 2008

前　言

本书是对 Bluman 和 Kumei 的《对称与微分方程》(1989 年初版, 1996 年重印) 前四章的重要更新. 自从 1989 年以来, 在微分方程的对称方法 (群方法) 方面已经有了相当大的发展, 不少研究论文、著作和新的符号软件都致力于这个课题的研究. 毫无疑问, 这是由于这些方法在非线性微分方程中具有固有的适用性. 微分方程的对称方法最初是由 Lie 于 19 世纪后半叶发展起来的, 具有高度的算法化, 因此适用于符号计算. 这些方法系统地拓展了已知的构造微分方程的显式解的技巧, 特别是非线性微分方程. 求解特殊微分方程独创性的技巧明显源于对称的观点, 因而对称方法并没有被更广泛地接受显得有点令人惊讶. 学习本书中所提出的方法, 进而理解已知的符号操作软件来获得微分方程的解析结果是非常有意义的. 常微分方程 (ODEs) 包括通过群不变性或积分因子实现阶的约化, 偏微分方程 (PDEs) 包含特殊解的构造, 如相似解或非古典解、寻找守恒律、等价映射以及线性化.

本书的大部分内容并没有出现在《对称与微分方程》中, 特别是关于高阶 ODEs 的首次积分, 以及用高阶对称约化 ODE 的阶. 另外, 本书还增加了 ODE 的对称和积分方法之间比较的新内容.

本书包括对量纲分析的综合处理. 对 Lie 点变换 (点对称) 群、接触对称和高阶对称进行了全面讨论, 这对于发现微分方程的解是重要的, 而不需要群理论的知识. 本书重点是利用显式的算法研究给定微分方程的对称和积分因子, 进而由这样的对称和积分因子构造解和首次积分.

本书特别适合于应用数学工作者、工程人员及科学家阅读, 因为他们对如何系统地发现微分方程的显式解很感兴趣. 书中几乎所有的例子都来自物理和工程中的实际应用, 包括与热方程、波传播和流体流动有关的问题.

第 1 章详细讨论了量纲分析. 通过具体介绍不变性概念, 引入了著名的 Buckingham Pi 定理. 变量尺度变换作用下边值问题的不变性自然导致一般化, 这就埋下了伏笔, 因为第 3 章和第 4 章讨论 Lie 变换群作用下微分方程的更广义的不变性. 基本上, 在阅读第 1 章后, 读者会对本书的一些主题有个直观的印象.

第 2 章发展了 Lie 变换群和 Lie 代数的基本概念, 这对下面两章的阅读是必要的. 从函数映成函数且其自变量不变的观点, 通过无穷小生成元来考虑 Lie 点变换群, 我们证明如何自然地考虑其他的局部变换, 如接触变换和高阶变换. 而且, 这为研究微分方程的积分因子打下了基础.

第 3 章研究 ODEs. 我们提出了一个约化算法, 若 n 阶 ODE 拥有一个可解的

r 参数 Lie 点变换 (点对称) 群, 则该算法将这个 ODE 约化为 $n-r$ 阶微分方程和 r 个求积分. 我们将说明如何发现所拥有的点、接触以及高阶对称, 也将说明如何推广约化算法来合并那样的对称. 我们证明了如何通过相应的积分因子发现首次积分, 进而用首次积分实现阶的约化. 我们说明如何简化以及将发现守恒律 (首次积分) 的古典 Noether 定理有意义地推广到任意 ODE (并不拥有一个变分原理). 特别地, 我们说明了如何用各种算法程序计算积分因子, 这些程序类似于计算具有特征形式的对称, 这里, 因变量仅仅发生一个变换. 通过所拥有的局部对称和积分因子, 我们也对不同的约化阶方法进行了比较, 说明了如何用点对称作用下的不变性来解边值问题, 推导出了一个算法来构造源于对称的特解 (不变解). 通过研究它们的拓扑本性, 说明不变解包括分界线和奇异包络解.

第 4 章研究 PDEs. 我们证明了如何发现所拥有的对称和构造有关的不变解. 用许多包括标量 PDEs 和偏微分方程组的例子, 讨论了边值问题的适应性.

第 2～4 章可独立于第 1 章阅读. 而且, 对 PDEs 有兴趣的读者可以跳过第 3 章.

本书通过例子研究每一个主题. 所有章节都配有很多习题, 这对于获得理论的应用知识是重要的. 每一章最后的讨论部分, 通过总结主要的结果和参看有关的文献以及引入相关的资料, 使得每章内容更加深入.

在每章的每一部分和子部分, 我们分别连续地对定义、定理、引理以及推论进行排序. 例如, 定义 2.3.3.1 和定理 2.3.3.1 分别是指 2.3.3 节中的第一个定义和第一个定理. 每一节的最后是习题, 习题 2.4.2 是指习题 2.4 中的第二个问题.

Benny Bluman 为本书制作了插图, Cecile Gauthier 打印了 3.5～3.8 节中的若干草稿, 我们对此表示感谢.

G.W. 布卢曼

温哥华, 不列颠哥伦比亚省, 加拿大

S. C. 安科

圣凯瑟琳, 安大略省, 加拿大

目 录

中文版序

前言

绪论 ······ 1

第 1 章 量纲分析、建模与不变性 ······ 4

1.1 引言 ······ 4

1.2 量纲分析：Buckingham Pi 定理 ······ 4

1.2.1 量纲分析蕴涵的假设 ······ 4

1.2.2 量纲分析的结论 ······ 6

1.2.3 Buckingham Pi 定理的证明 ······ 7

1.2.4 举例 ······ 9

习题 1.2 ······ 13

1.3 量纲分析在 PDEs 中的应用 ······ 14

习题 1.3 ······ 21

1.4 量纲分析的推广：变量尺度作用下 PDEs 的不变性 ······ 22

习题 1.4 ······ 26

1.5 讨论 ······ 28

第 2 章 Lie 变换群与无穷小变换 ······ 29

2.1 简介 ······ 29

2.2 Lie 变换群 ······ 29

2.2.1 群 ······ 30

2.2.2 群的举例 ······ 30

2.2.3 变换群 ······ 31

2.2.4 单参数 Lie 变换群 ······ 31

2.2.5 单参数 Lie 变换群举例 ······ 32

习题 2.2 ······ 33

2.3 无穷小变换群 ······ 33

2.3.1 Lie 第一基本定理 ······ 34

2.3.2 Lie 第一基本定理应用举例 ······ 35

2.3.3 无穷小生成元 ······ 36

2.3.4 不变函数 ······ 39

2.3.5 正则坐标 ······ 40

2.3.6 正则坐标集举例 ······ 42

习题 2.3 ······ 44

2.4 点变换和拓展变换 (延拓) ······ 45

2.4.1 点变换的拓展群：单个因变量和单个自变量 ······ 46

2.4.2 拓展的无穷小变换：单个因变量和单个自变量 ······ 52

2.4.3 拓展变换：单个因变量和 n 个自变量 ······ 54

2.4.4 拓展的无穷小变换：单个因变量和 n 个自变量 ······ 57

2.4.5 拓展的变换与拓展的无穷小变换：m 个因变量和 n 个自变量 ······ 60

习题 2.4 ······ 62

2.5 多参数 Lie 变换群和 Lie 代数 ······ 64

2.5.1 r 参数 Lie 变换群 ······ 64

2.5.2 Lie 代数 ······ 68

2.5.3 Lie 代数举例 ······ 70

2.5.4 可解 Lie 代数 ······ 72

习题 2.5 ······ 73

2.6 曲线和曲面映射 ······ 75

2.6.1 不变曲面、不变曲线、不变点 ······ 75

2.6.2 曲线映射 ······ 78

2.6.3 曲线映射例子 ······ 79

2.6.4 曲面映射 ······ 80

习题 2.6 ······ 81

2.7 局部变换 ······ 81

2.7.1 点变换 ······ 81

2.7.2 接触和高阶变换 ······ 83

2.7.3 局部变换例子 ······ 84

习题 2.7 ······ 85

2.8 讨论 ······ 85

第 3 章 常微分方程 ······ 88

3.1 引言 ······ 88

习题 3.1 ······ 92

3.2 一阶 ODEs ······ 92

3.2.1 正则坐标 ······ 93

3.2.2 积分因子 ······ 95

3.2.3 解曲线的映射 ······ 96

3.2.4 一阶常微分方程组的确定方程 ······ 98

3.2.5 给定群作用下一阶 ODEs 不变量的确定 ······ 100

习题 3.2 ······ 104
3.3 点对称作用下二阶和高阶 ODEs 的不变性 ······ 106
3.3.1 通过正则坐标实现阶的约化 ······ 107
3.3.2 通过微分不变量实现阶的约化 ······ 109
3.3.3 阶的约化举例 ······ 111
3.3.4 n 阶 ODE 的点变换的确定方程 ······ 116
3.3.5 给定群作用下 n 阶 ODEs 的不变量的确定 ······ 120
习题 3.3 ······ 122
3.4 多参数 Lie 点变换群作用下阶的约化 ······ 124
3.4.1 2 参数 Lie 群作用下二阶 ODE 的不变性 ······ 124
3.4.2 2 参数 Lie 群作用下 n 阶 ODE 的不变性 ······ 128
3.4.3 具有可解 Lie 代数的 r 参数 Lie 群作用下 n 阶 ODE 的不变性 ······ 132
3.4.4 具有可解 Lie 代数的 r 参数 Lie 群作用下超定常微分方程组的不变性 ······ 140
习题 3.4 ······ 144
3.5 接触对称和高阶对称 ······ 146
3.5.1 接触对称和高阶对称的确定方程 ······ 147
3.5.2 接触对称和高阶对称举例 ······ 149
3.5.3 利用具有特征形式的点对称实现阶的约化 ······ 155
3.5.4 用接触和高阶对称实现阶的约化 ······ 159
习题 3.5 ······ 163
3.6 通过积分因子获得首次积分和阶的约化 ······ 164
3.6.1 一阶 ODEs ······ 166
3.6.2 二阶 ODEs 的积分因子的确定方程 ······ 169
3.6.3 二阶 ODEs 的首次积分 ······ 173
3.6.4 三阶和高阶 ODEs 的积分因子的确定方程 ······ 185
3.6.5 三阶和高阶 ODEs 的首次积分举例 ······ 197
习题 3.6 ······ 203
3.7 积分因子与对称之间的基本联系 ······ 206
3.7.1 伴随对称 ······ 207
3.7.2 伴随不变性条件和积分因子 ······ 210
3.7.3 发现伴随对称和积分因子举例 ······ 212
3.7.4 Noether 定理、变分对称和积分因子 ······ 219
3.7.5 对称、伴随对称和积分因子计算的比较 ······ 224
习题 3.7 ······ 225
3.8 由对称和伴随对称实现首次积分的直接构造 ······ 227
3.8.1 源于对称和伴随对称的首次积分 ······ 228

3.8.2 用对称或伴随对称从 Wronski 公式获得首次积分 ········ 234
3.8.3 自伴随 ODEs 的首次积分 ········ 242
习题 3.8 ········ 245
3.9 应用于边值问题 ········ 246
习题 3.9 ········ 248
3.10 不变解 ········ 250
习题 3.10 ········ 258
3.11 讨论 ········ 259
第 4 章 偏微分方程 ········ 264
4.1 引言 ········ 264
4.1.1 PDE 的不变性 ········ 264
4.1.2 初等例子 ········ 266
习题 4.1 ········ 268
4.2 标量 PDEs 的不变性 ········ 269
4.2.1 不变解 ········ 269
4.2.2 k 阶 PDE 对称的确定方程 ········ 271
4.2.3 例子 ········ 275
习题 4.2 ········ 288
4.3 偏微分方程组的不变性 ········ 293
4.3.1 不变解 ········ 294
4.3.2 偏微分方程组对称的确定方程 ········ 296
4.3.3 例子 ········ 298
习题 4.3 ········ 308
4.4 应用于边值问题 ········ 312
4.4.1 标量 PDE 的边值问题不变性的公式 ········ 313
4.4.2 一个线性标量 PDE 的不完全不变性 ········ 329
4.4.3 线性偏微分方程组的不完全不变性 ········ 337
习题 4.4 ········ 339
4.5 讨论 ········ 344
参考文献 ········ 347
译后记 ········ 358
《现代数学译丛》已出版书目 ········ 359

绪　论

为了统一和推广求解常微分方程 (ODEs) 的各种特殊方法, Lie 于 19 世纪后期引入连续群的概念, 现在称为 Lie 群. Lie 是受 Sylow 在 Christiania(挪威首都的旧称, 现在叫奥斯陆) 所作的关于 Galois 群和 Abel 有关工作的讲座的启发 (1881 年, Sylow 和 Lie 合作编辑 Abel 的全部工作). Lie 证明, 若单参数 Lie 点变换群作用下 ODE 是不变的, 则该 ODE 可以降低一阶.

Lie 的工作是关于 ODEs 的杂文集, 包括积分因子、可分离方程、齐次方程、阶的约化、线性方程的参数变换和系数的确定方法、Euler 方程的解以及 Laplace 变换的应用. Lie(1881) 也指出, 对于线性偏微分方程 (PDEs), 根据变换, Lie 群作用下的不变性直接导致解的叠加.

微分方程组的对称就是一个变换, 它将方程组的任意解映成该方程组的另一个解. 在 Lie 的框架结构下, 这样的变换是依赖连续参数的群, 且由作用在系统的自变量和因变量空间上的点变换 (点对称), 或更一般地, 由作用在自变量和因变量以及因变量的所有一阶导数的空间上的接触变换 (接触对称) 组成. Lie 群的初等例子包括平移、旋转和尺度变换. 一阶自治的常微分方程组, 即定常流, 实质上定义了一个单参数 Lie 点变换群. Lie 证明, 对于给定的 (线性或非线性) 微分方程, 作用在自变量和因变量空间上的点变换连续群可以通过显式的算法 (Lie 算法) 确定.

本书将连续群应用于微分方程并没有利用 Lie 群的全局性质. 这些应用与局部 Lie 变换群有关. Lie 基本定理表明, 这样的群完全可以用它们的无穷小生成元刻画. 依次, 这些构成了由结构常数确定的 Lie 代数.

Lie 群 (或它们的无穷小生成元) 可以自然地推广或延拓到作用在自变量和因变量以及因变量的直到任意有限阶的导数空间上. 结果, 看起来难处理的给定微分方程组的群不变性的非线性条件, 可以约化为确定该群的无穷小生成元的线性齐次方程. 因为这些确定方程组成一个超定的线性齐次偏微分方程组, 所以通常可以显式地确定无穷小生成元. 对于给定的微分方程组, 建立确定方程完全是程序化的. 用符号操作程序建立确定方程, 在某些情况下可以显式地求解它们 (Schwarz, 1985, 1988; Kersten, 1987; Head, 1992; Champagne, Hereman and Winternitz, 1991; Wolf and Brand, 1992; Hereman, 1996; Reid, 1990, 1991; Mansfield, 1996; Mansfield and Clarkson, 1997; Wolf, 2002a).

可以推广 Lie 的工作以发现和使用微分方程拥有的高阶对称. Noether(1918) 首先考虑了高阶对称存在的可能性问题, 这样的对称是由仅仅作用在因变量上的无

穷小生成元来刻画的, 且生成元的系数依赖自变量、因变量以及它们的直到某有限阶的导数. 特别地, 整体上, 这样的变换作用在自变量、因变量以及它们所有阶导数的无穷维空间上. 但是, 由 Lie 算法的自然推广可以发现给定微分方程的这样的变换.

对于一阶 ODE, Lie 证明了一个点对称作用下 ODE 的不变性等价于它的首次积分的存在性. 这种情况下, 首次积分产生守恒量, 且是 ODE 的每个解的常数. n 阶 ODE 的局部存在性表明, 总存在 n 个函数无关的首次积分, 是关于自变量、因变量以及它的直到 $n-1$ 阶导数的求积分. 相应地, n 阶 ODE 拥有 n 个基本的守恒量. 而且, 任一首次积分源于一个积分因子, 它是由自变量、因变量以及它的直到某阶的导数确定的, 且乘以 ODE 可以将它变换为精确 (全导数) 形式.

对于高阶 ODE, 仅仅当它具有变分原理 (Lagrange 算子) 时, 首次积分和点对称作用下不变性之间的对应才成立. 特别地, Noether 工作表明, 如果对称保持 ODE 的变分原理 (变分对称) 不变, 则点对称、接触对称或高阶对称作用下, 这样 ODE 的不变性等价于它的首次积分的存在性. 这里用特征形式的对称是重要的, 且无穷小生成元的系数仅仅作用在因变量 (和它的导数) 上. 对称确定方程由 ODE 的线性化 (Frechét 导数) 给定, 且对 ODE 的所有解都成立. 通过额外的确定方程, 对称是变分对称的条件可以用 ODE 的线性化表示. 积分因子是所导致的确定方程组的解.

对于不具有变分原理的 ODE, 我们证明, 积分因子与伴随对称 (定义为 ODE 的线性化 (Frechét 导数) 的伴随方程的解) 有关系. 特别地, 若伴随对称是积分因子, 则存在一个充要的额外确定方程. 这就将具有变分原理的 ODE 情况下首次积分和变分对称之间的等价性推广到了不具有变分原理的 ODE 情况下首次积分与满足额外伴随不变性条件的伴随对称之间的等价性.

伴随对称在研究 ODEs 的首次积分中具有中心的角色. 最重要的, 解对称确定方程的算法的扩展可以用于求解伴随对称确定方程以及积分因子的确定方程组.

通过发现首次积分, 积分因子给出了另一个方法来构造性地约化 ODE 的阶. 对于二阶和高阶 ODEs, 这种阶的约化方法是对 Lie 约化方法的补充, 但不依赖于它. 特别地, 与 Lie 算法比较, 积分因子方法仅仅作为算法而没有更多计算复杂性. 而且, 利用积分因子方法, 根据最初 ODE 给定的变量, 可以实现阶的约化, 不像通过点对称的约化, 因为所约化的 ODE 包含推导的自变量和因变量 (如果用最初的变量表示, 通常保留给定 ODE 的同样的阶).

如果偏微分方程组在 Lie 点变换群作用下是不变的, 则可以构造性地发现特解, 称为相似解或不变解, 这个解在该方程组拥有的整个群的子群作用下是不变的. 这些解是通过求解具有更少的自变量的约化的微分方程组得到的. Lie 群的应用是 Lie 发现的, 但是, 首次应用却是 20 世纪 50 年代末 Ovsiannikov(1962,1982) 在新

西伯利亚 (前苏联西西伯利亚东南部城市) 所领导的 Soviet 团体的研究工作. 不变解也可以构造特殊的边值问题. 这里寻找给定 PDE 的完全群的子群保持边界曲线和作用在它们上的条件不变 (Bluman, Cole, 1974). 这样的解包括自相似 (自模拟) 解, 可以通过量纲分析, 或者更一般地, 尺度变换作用下不变性得到. 不变解和变量分离之间的联系已经被 Miller(1977) 及合作者广泛地研究. 对于 ODEs, 不变解具有特别好的几何性质, 包括分界线和包络解 (Bluman, 1990c; Dresner, 1999).

第 1 章　量纲分析、建模与不变性

1.1　引　　言

本章基于对量纲分析的全面研究, 介绍不变性蕴涵的一些思想. 我们将说明量纲分析与建模及 PDEs 边值问题的不变性所导致的解的构造之间是如何建立联系的.

对于感兴趣的一个量, 通常人们最多知道它所依赖的自变量 (不妨说共有 n 个) 和所有这 $n+1$ 个量的量纲. 量纲分析通常用于约化基本自变量的个数. 建模的出发点是力求减少必要的试验测量的个数. 下面将要证明, 量纲分析能够约化 PDE 边值问题中自变量的个数. 最重要的是, 对于 PDEs, 基于量纲分析的自变量个数的约化是尺度 (拉伸) 变换群作用下不变性约化的一种特殊情况.

1.2　量纲分析: Buckingham Pi 定理

量纲分析的基本定理为美国工程科学家 Buckingham(1914, 1915a, b) 提出的所谓 Buckingham Pi 定理. 参看文献 (Bridgman, 1931; Barenblatt, 1979, 1987, 1996; Sedov, 1982; Bluman, 1983a). Görtler (1975) 给出了它的历史发展. 详细的数学描述参看文献 (Curtis, Logan and Parker, 1982).

下面关于量纲分析的假设和结论构成了 Buckingham Pi 定理.

1.2.1　量纲分析蕴涵的假设

基本上, 现实中不存在与下面的假设相矛盾的问题:

(1) u 是由 n 个可测的量 (变量和参数)$W_1, W_2, \cdots, W_n$ 确定的:

$$u = f(W_1, W_2, \cdots, W_n), \tag{1.1}$$

其中 f 为 $W_1, W_2, \cdots, W_n$ 的函数.

(2) 量 $u, W_1, W_2, \cdots, W_n$ 是由 m 个基本量纲 (标记为 $L_1, L_2, \cdots, L_m$) 测量得到的. 例如, 通常力学问题中基本量纲为 $L_1=$ 长度, $L_2=$ 质量, $L_3=$ 时间.

(3) 令 Z 代表 $u,W_1, W_2, \cdots, W_n$ 中任一量, 那么, Z 的量纲 (记为 $[Z]$) 是基本量纲幂的乘积, 特别地,

$$[Z] = L_1^{\alpha_1} L_2^{\alpha_2} \cdots L_m^{\alpha_m}, \tag{1.2}$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为实数, 通常是有理数, 称为 Z 的量纲指数. Z 的量纲向量为列向量

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Z 是无量纲的当且仅当 $[Z]=1$, 即当且仅当所有量纲指数都为零. 例如, 根据力学的基本量纲, 能量 E 的量纲向量为

$$\alpha(E) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

令

$$b_i = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{mi} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

为 $W_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 的量纲向量, 并且令

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

为给定问题的 $m \times n$ 维矩阵.

(4) 对于任意基本量纲集合, 可以选择一单元系统用于测量任一量 Z 的值. 从一个到另一个单元系统的变化包含每个基本量的一次正尺度变换, 从而导致每个量Z的一次尺度变换. 例如, 对于力学的基本量纲, 通常的单元系统为mks(米·公里·秒)、cgs (厘米·克·秒) 或英国的英尺·磅. 当 cgs 变为 mks 时, L_1 以 10^{-2} 缩小, L_2 以 10^{-3} 缩小, L_3 保持不变, 因此能量 E 的值以 10^{-7} 缩小. 在单元系统变换作用下, 无量纲的量值不变, 即它的值在任意基本量纲的任意尺度变换作用下都是不变的. 因此, 判断无量纲量的大小是有意义的. 量纲分析的最后一个假设是公式 (1.1), 被看作无量纲方程, 在这个意义下, (1.1) 在任意基本量纲的任意尺度变换作用下是不变的, 即 (1.1) 与单元系统的选择无关.

1.2.2 量纲分析的结论

1.2.1 节中 Buckingham Pi 定理的假设导致如下结论:

(1) 公式 (1.1) 可以由无量纲的量来表示.

(2) 无量纲的量的数目为 $k+1=n+1-r(B)$, 其中 $r(B)$ 为矩阵 B 的秩. 准确地说, 这些无量纲的量的个数 k 依赖可测量 $W_1, W_2, \cdots, W_n$.

(3) 令

$$x^{(i)}=\begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}, \quad i=1,2,\cdots,k \tag{1.6}$$

表示系统

$$Bx=0 \tag{1.7}$$

的 $k=n-r(B)$ 个线性无关的解 x.

令

$$a=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

为 u 的量纲向量, 且令

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

表示系统

$$By=-a \tag{1.10}$$

的一个解. 那么, 式 (1.1) 简化为

$$\pi=g(\pi_1,\ \pi_2, \cdots,\ \pi_k), \tag{1.11}$$

其中 π, π_i 为如下给出的无量纲的量

$$\pi=uW_1^{y_1}W_2^{y_2}\cdots W_n^{y_n}, \tag{1.12a}$$

$$\pi_i = W_1^{x_{1i}} W_2^{x_{2i}} \cdots W_n^{x_{ni}}, \quad i = 1, 2, \cdots, k, \tag{1.12b}$$

g 为相应变量的函数. 特别地, (1.1) 变为

$$u = W_1^{-y_1} W_2^{-y_2} \cdots W_n^{-y_n} g(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_k). \tag{1.13}$$

根据试验建模, 式 (1.13) 比 (1.1)"便宜" $r(B)$ 阶个数量级.

1.2.3 Buckingham Pi 定理的证明

首先

$$[u] = L_1^{a_1} L_2^{a_2} \cdots L_m^{a_m}, \tag{1.14a}$$

$$[W_i] = L_1^{b_{1i}} L_2^{b_{2i}} \cdots L_m^{b_{mi}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.14b}$$

接着, 利用假设 (4), 依次取每个基本量, 并且考虑在基本量的任意缩放比例作用下 (1.1) 的不变性. 首先缩放 L_1, 即

$$L_1^* = \mathrm{e}^{\varepsilon} L_1, \quad \varepsilon \in R. \tag{1.15}$$

进而导致下面的可测量缩放比例

$$u^* = \mathrm{e}^{\varepsilon a_1} u, \tag{1.16a}$$

$$W_i^* = \mathrm{e}^{\varepsilon b_{1i}} W_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.16b}$$

方程 (1.16a,b) 恰好定义了 $n+1$ 个量 $u, W_1, W_2, \cdots, W_n$ 的一个单参数 (ε) Lie 尺度变换群, $\varepsilon = 0$ 对应恒等变换. 该群是由基本量 L_1 的单参数拉伸群 (1.15) 所诱导的.

本章下面部分并不需要熟悉 Lie 群知识.

根据假设 (4), 式 (1.1) 成立当且仅当

$$u^* = f(W_1^*, W_2^*, \cdots, W_n^*),$$

即对所有 $\varepsilon \in \mathbf{R}$, 有

$$\mathrm{e}^{\varepsilon a_1} u = f(\mathrm{e}^{\varepsilon b_{11}} W_1, \mathrm{e}^{\varepsilon b_{12}} W_2, \cdots, \mathrm{e}^{\varepsilon b_{1n}} W_n). \tag{1.17}$$

分两种情况讨论:

情况 1. $b_{11} = b_{12} = \cdots = b_{1n} = a_1 = 0$. 这里, L_1 不是问题的基本量, 换句话说, 式 (1.1) 关于 L_1 是无量纲的.

情况 2. $b_{11} = b_{12} = \cdots = b_{1n} = 0$, $a_1 \neq 0$. 这种情况下, $u \equiv 0$ 为平凡态.