Engineering Mathematics

工程数学

线性代数
概 率 论
复变函数
积分变换

■ 周忠荣　等编著

Linear Algebra
Probability Theory
Complex Function
Integral Transformation

化学工业出版社

工 程 数 学

（线性代数 概率论 复变函数 积分变换）

周忠荣　等编著

化学工业出版社

·北 京·

本书是为电子、通信、信号处理、电气、自动化等专业开设“工程数学”课程编写的。本书根据电类各专业和其他相近专业的需要选择内容、把握尺度，尽可能将工程数学知识和相关学科中的实际问题相结合，尤其适合较少学时的教学需要。

本书包括线性代数、概率论、复变函数、积分变换等方面的基本知识。书末列有附录：标准正态分布表、傅里叶变换简表、拉普拉斯变换简表、拉普拉斯变换性质、综合题的答案与提示。本书突出数学概念的准确，运用典型实例和例题说明数学概念和解题方法，尽可能联系工程数学知识在相关学科中的实际应用。

本书既可作为应用型本科和高职高专院校电类各专业和其他相近专业的教材，也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

工程数学（线性代数　概率论　复变函数　积分变换）/
周忠荣等编著. —北京：化学工业出版社，2009.1
ISBN 978-7-122-04071-8

Ⅰ. 工…　Ⅱ. 周…　Ⅲ. 工程数学　Ⅳ. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 176805 号

责任编辑：王听讲　　文字编辑：鲍晓娟
责任校对：宋　玮　　装帧设计：周　遥

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：大厂聚鑫印刷有限责任公司
装　　订：三河市延风装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张 16¼　字数 403 千字　　2009 年 2 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：26.00 元

前　言

应用型本科和高职高专教育着重培养学生解决实际问题的能力，它们在我国的高等教育中占有非常重要的地位。然而，应用型本科和高职高专在我国发展的历史都还不长，有许多问题还在探索之中，课程的优化整合就是其中之一。

应用型本科和高职高专电类各专业培养有关工程技术方面的应用型高级技术人才。这种类型的人才既需要懂得工程数学的基本概念和基本理论，更需要掌握工程数学的基本方法和实际应用。

应用型本科和高职高专电类各专业需要的数学知识比较多，除高等数学外，还需要线性代数、概率论、复变函数、积分变换等内容。但是，不可能安排较多的数学课程的课时。因此，许多学校将这些数学知识整合为一门课程——工程数学。

本书是一本将线性代数、概率论、复变函数、积分变换等内容整合到一起的工程数学教材。不同院校相关专业培养目标不尽相同，对工程数学知识也有不同的要求，为此本书尽可能照顾到各院校的需求选编内容。

本书编者都是长期从事数学课程教学的教师，比较了解电类相关专业对数学知识的要求，还有在企业从事技术工作的经历，这些都是编写本书的基础。为了编写出版有特色的高质量教材，编者多次向电类相关专业方面的专家、学者请教，深入了解电类相关专业所需的工程数学知识。在此基础上确定了本书的下列编写原则。

（1）根据电类相关专业对数学知识的基本要求确定内容以及广度和深度

本书包括线性代数、概率论、复变函数、积分变换四部分。每个部分都严格把握其广度和深度。凡是重要的基本概念、基本方法不惜篇幅讲透彻。为满足部分学生对数学知识的较高要求，本书对绝大部分定理都给出了严格的证明。

丰富的联系实际的实例和例题是本书的最大特色之一。这些内容对学生掌握基本概念和基本方法很有帮助。每章的习题包括单项选择题、填空题、计算题和应用题。针对应用型教育的要求和这类学生的特点，本书习题与例题紧密对应，突出数学概念、计算方法方面的习题，仅选编了难度不大的少量理论证明题。

为了满足不同专业学生的需要，本书涵盖了电类相关专业所需工程数学的多个分支。每个分支都包括其主要内容。不同的专业可能有不同的要求，可以根据实际需要选讲内容。

（2）便于学生阅读理解

针对应用型本科和高职高专学生的实际水平和认知能力，本书力求做到：深入浅出、概念准确、知识结构完整。本书在编写方式上采取了以下一些措施，期望有助于读者阅读理解：①尽可能先通过实例提出问题，再介绍有关定义、定理和概念；或者随后补充实例对有关概念的各个方面进行补充说明。②对较难理解的概念，充分利用图形、图像和通俗的文字予以说明。③基本概念、重要定理、重要公式、解题方法，不惜篇幅，叙述清楚。

（3）与专业知识相结合

各章节都编写了工程数学在有关学科中实际应用的例子，突出培养学生运用工程数学知

识解决相关专业实际问题的能力。

为了便于读者阅读理解，本书还使用了一些特殊的表达方式：

（1）重要数学名词都在第一次出现时以黑体字标出，如：**矩阵**。

（2）重要的论点以【**说明**】的方式给出。

（3）定理、推论、说明和重要结论都用楷体字表述。如：*行列式中如果有两行（或两列）的对应元素成比例，则这个行列式等于0。*

为了方便教学，本书还免费提供电子课件，需要者可以到化学工业出版社网站（www.cip.com.cn）下载。

本书由周忠荣主编并统稿，周溱、华敬周参与了本书内容的讨论，并编写了第7、8、9三章，其余由周忠荣编写。莫辉检查了各章初稿并演算了各章例题和习题。

本书采用了周忠荣编著的《计算机数学》中的有关内容，特此说明。本书还采用了部分参考文献中的一些例题和习题，在此向这些编者表示感谢。本书的编写得到了广州大学华软软件学院及教务处、基础部和电子系等各级领导的大力支持和帮助。在此对他们表示感谢。

本书虽经多次修改，但因编写时间紧迫、编者水平有限，书中如有疏漏和差错，恳请读者批评指正。编者将衷心感谢，并在再版时采纳改正。编者的E-mail地址是：zzr@tsinghua.org.cn，也可向编者索取或更新电子课件。

编　者

于广州大学华软软件学院

2008年10月

目录

第1章　行列式

本章主要介绍以下内容。

（1）行列式的概念和特殊的行列式。

（2）行列式的性质和证明。

（3）行列式的计算方法。

（4）解方程组的克拉默法则。

行列式是线性代数中最基本的工具之一。本章首先介绍行列式的概念和性质，再介绍计算阶行列式的几种方法和一些技巧，最后介绍以行列式为基础的求解线性方程组的克拉默法则。

1.1　行列式的概念

初等数学中，在求二元和三元线性方程组的解时引进了二阶和三阶行列式。为了研究一般的 n 元线性方程组，需要把二、三阶行列式加以推广。

1.1.1　二阶和三阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

通常用消元法求解。在方程组（1-1）中消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

同样，在方程组（1-1）中消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

若引用记号

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

则当 $\Delta\neq 0$ 时，线性方程组（1-1）的解是

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1-2}$$

记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

叫做**二阶行列式**。而 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是二阶行列式的**展开式**，Δ、Δ_1 等是本书在解方程组时用来表示行列式的专用记号。二阶行列式中的数 a_{ij}（$i=1,2$；$j=1,2$）称为行列式的**元素**，每个横排称为行列式的**行**，每个竖排称为行列式的**列**。a_{ij} 的第一个下标 i 表示它位于自上而下的第 i 行，第二个下标 j 表示它位于自左到右的第 j 列。

二阶行列式的展开式表明了它是 4 个元素间按上述约定运算得到的数值。

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-3}$$

同样可以用消去法求它的解。为了简单地表达它的解，需要引进三阶行列式的概念。三阶行列式的展开式规定为

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

所以，三阶行列式也是一个数值，它可以通过转化为二阶行列式的计算得到。

三阶行列式可以用来解三元一次方程组。若分别记

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则当 $\Delta\neq0$ 时，线性方程组（1-3）的解是

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta} \tag{1-4}$$

引入行列式的记号，可以简洁地表达二元或三元线性方程组的解。更重要的是：引进行列式的概念可以对 n 元线性方程组进行深入的研究。

二、三阶行列式的计算满足图 1-1 所示的对角线法则：实线上的数相乘之和减去虚线上的数相乘之和。

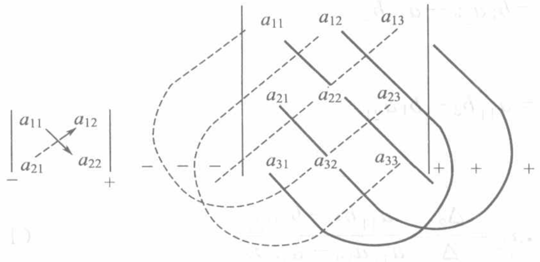

图 1-1

例 1-1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

解 根据三阶行列式的展开式计算，得

$$\begin{aligned} 原式 &= 2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3-2\times1\times3-1\times(-4)\times5-2\times3\times2 \\ &= 30+2-24-6+20+12=10 \end{aligned}$$

例 1-2 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=-1 \\ 3x_1+2x_2+5x_3=2 \\ x_1+3x_2-2x_3=9 \end{cases}$$

解 利用三阶行列式，有

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-42,\ \Delta_1=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-42,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & -2 \end{vmatrix}=-84,\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}=42$$

再根据公式(1-4)，得该方程组的解为

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-42}{-42}=1,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-84}{-42}=2,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{42}{-42}=-1$$

例 1-3 求下列方程的根

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 1 & x-1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

解 按对角线法则将三阶行列式展开，有

$$\begin{aligned} f(x)&=x(x-1)+0+(-3)-0-0-(-3x) \\ &=x^2+2x-3=0 \end{aligned}$$

因此，$f(x)=0$ 的根为 $x_1=-3$ 和 $x_2=1$。

1.1.2 n 阶行列式

为了把二阶和三阶行列式的概念推广到 n 阶，需要先介绍 n 阶排列和排列的逆序数的概念。

1. n 元排列的逆序数

定义 1-1 将 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 按任意次序排成的一个有序组 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 称为一个 **n 元排列**。

根据全排列的公式知，n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 总共有 $n!$ 个 n 元排列。例如，1,2,3,4 这 4 个自然数可以构成 $4!=24$ 个 4 元排列，4,2,3,1 就是其中之一。显然，$1,2,\cdots,n$ 也是一个 n 元排列，并且是惟一一个完全按从小到大的次序排成的有序组，一般称它为 **n 元标准排列**。

定义 1-2 一个 n 元排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中的任意两个数 $i_j,i_k(1\leqslant j<k\leqslant n)$ 都构成一个数

对，记作 (i_j,i_k)；在一个数对中，如果左边的数大于右边的数，即对于数对 (i_j,i_k)，若 $i_j>i_k$，则称 (i_j,i_k) 为该排列的一个**逆序**。排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记为

$$J=J(i_1,i_2,\cdots,i_n)$$

若 J 为偶数，称 i_1，i_2，…，i_n 为**偶排列**，否则称其为**奇排列**。

为了以后叙述方便，若 $i_j<i_k(j<k)$，则称 (i_j,i_k) 为该排列的一个**顺序**。

例 1-4 指出以下排列的逆序数并判断它们的奇偶性：

(1) $3,4,6,2,1,5$ (2) $1,2,\cdots,199,200$ (3) $n,n-1,\cdots,2,1$

解 (1) 根据定义 1-2 知，从左边第一个数开始，其右边每一个比它小的数都与它构成一个逆序。显然，该排列中构成逆序的数对有以下 8 个：

$$(3,2),\ (3,1),\ (4,2),\ (4,1),\ (6,2),\ (6,1),\ (6,5),\ (2,1)$$

所以 $J(3,4,6,2,1,5)=8$，该排列是偶排列。

(2) 在排列 $1,2,\cdots,199,200$ 中的任意两个数都不构成逆序，所以 $J(1,2,\cdots,199,200)=0$，该排列是偶排列。

(3) 在排列 $n,n-1,\cdots,2,1$ 中的任意两个数都构成逆序，故

$$J(n,n-1,\cdots,2,1)=C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$$

易知，当 $n=4k$ 或 $n=4k+1(k\in\mathbf{N})$ 时，$\frac{1}{2}n(n-1)$ 是偶数，$n,n-1,\cdots,2,1$ 是偶排列；否则，$n,n-1,\cdots,2,1$ 是奇排列。

2. *n* 阶行列式的概念

定义 1-3 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成的 ***n* 阶行列式**为

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}(-1)^{J(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-5}$$

其中，数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为第 i 行第 j 列的**元素**（或**元**），而 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任一全排列，$\sum\limits_{j_1,j_2,\cdots,j_n}$ 是对所有不同 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的 n 元排列求和。一般情况下，n 阶行列式用 D 或 D_n 表示，也可以用其他大写英文字母。

由定义 1-3 知，n 阶行列式的展开式共有 $n!$ 项，其中每一项都是由取自不同行、不同列的 n 个元素相乘所得，每一项前的正负号由该项各元素第二个下标构成的 n 元排列的奇偶性确定，而每项各元素第一个下标构成的排列都是 n 元标准排列 $1,2,\cdots,n$。

【说明】 当 $n>3$ 时，行列式 D_n 不能按对角线法则将其展开。

在行列式 D_n 中，从 a_{11} 经 a_{22}、a_{33}，…，直到 a_{nn} 称为行列式的**主对角线**，元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式的**主对角线元素**。

通常将 n 阶行列式简记为 $D=|a_{ij}|$。通常约定，一阶行列式 $|a_{11}|$ 就是数 a_{11}，即 $|a_{11}|=a_{11}$，不要与绝对值符号相混淆。

3. 两种特殊的行列式

主对角线外所有元素都是 0 的行列式称为**主对角行列式**。

主对角线以上（下）的元素都为 0 的行列式称为下（上）三角形行列式。

下面利用行列式的定义 1-3 计算这两种特殊的 n 阶行列式。

例 1-5　证明主对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1-6}$$

证明　由行列式的定义 1-3 知，若式(1-5) 右边各项中某个元素为 0，则该项为 0。因此，式(1-5) 右边肯定为 0 的那些项都不必计及。对行列式(1-6)，第 1 行只有 a_{11} 可能不等于 0，只需取 a_{11}。第 2 行只有 a_{22} 可能不等于 0，且与 a_{11} 不同列，只需取 a_{22}。余类推。因此，行列式(1-6) 按定义 1-3 展开只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项可能不等于 0，并且 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 中第二个下标的排列的逆序数为 0。命题得证。

例 1-6　证明下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1-7}$$

证明　由行列式的定义 1-3 知，若式(1-5) 右边各项中某个元素为 0，则该项为 0。因此，式(1-5) 右边肯定为 0 的那些项都不必计及。对行列式(1-7)，第 1 行只有 a_{11} 可能不等于 0，只需取 a_{11}。第 2 行与 a_{11} 不同列的元素只有 a_{22} 可能不等于 0，只需取 a_{22}。余类推。因此，行列式(1-7) 按定义 1-3 展开只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项可能不等于 0，并且 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 中第二个下标的排列的逆序数为 0。命题得证。

一般的行列式用定义 1-3 计算特别麻烦，需要有比较简便的方法，这将在 1.3 节介绍。

1.2　行列式的性质

对于 4 阶或更高阶的行列式，必须寻找比较简便的计算方法。为此，本节介绍行列式的几个概念和几个基本性质。

定义 1-4　在行列式 D_n 中，去掉第 i 行和第 j 列后余下的元素按原来的相对位置构成的 $n-1$ 阶行列式 M_{ij}，即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为行列式 D_n 中 a_{ij} 的**余子式**，而

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

称为 a_{ij} 的**代数余子式**。

例如，对于行列式 $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}$ 有 $M_{11}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=8$，$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=8$，$M_{12}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-2$ 和 $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=2$。

将行列式 D_n 的行、列互换得到的新行列式 D_n^{T} 称为 D_n 的**转置行列式**。对于行列式(1-5)，其转置行列式是

$$D_n^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

为了介绍行列式的基本性质，并对它们进行证明，需要先引入以下两个结论并予以证明。

(1) n 元排列中，任意调换其中两个数的位置，则排列改变其奇偶性。

证明 设 a 和 b 是参与调换的两个数。下面分两种情况进行证明：①a 和 b 相邻；②a 和 b 不相邻。

① 如果 a 和 b 相邻，可以把这个 n 元排列记为 $PabQ$，其中 P 表示在 a 左边的那些数的全体，Q 表示在 b 右边的那些数的全体。

显然，调换 a 与 b 的位置仅改变这两个数之间序的性质（顺序变逆序或逆序变顺序），并不改变 a 和 b 与 P 和 Q 中那些数之间序的性质；并且，当 $a<b$ 时，$J(PbaQ)=J(PabQ)+1$，当 $a>b$ 时，$J(PbaQ)=J(PabQ)-1$。此时结论成立。

② 如果 a 和 b 不相邻，可以把这个 n 元排列记为 $PaRbQ$，其中 P 表示在 a 左边的那些数的全体，Q 表示在 b 右边的那些数的全体，R 表示在 a 和 b 之间的那些数（共 r 个）的全体。

现在用下面的方法实现这样的调换：先将 a 与其右边相邻的数调换（$r+1$）次，使排列成为 $PRbaQ$；然后将 b 与其左边相邻的数调换 r 次，使排列成为 $PbRaQ$。这样共进行了（$2r+1$）相邻两数的调换，所以 $PbRaQ$ 与 $PaRbQ$ 的奇偶性不同。此时结论成立。

综上所述，结论得证。

(2) n 阶行列式的一般项可表示为

$$(-1)^{J(i_1+i_2+\cdots+i_n)+J(j_1+j_2+\cdots+j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

证明 记 $s=J(i_1,i_2,\cdots,i_n)$，$t=J(j_1,j_2,\cdots,j_n)$，将 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中任意两个数调换位置时，s 和 t 同时改变奇偶性，于是 $s+t$ 不改变奇偶性。

显然，经过有限次两数调换，可以将 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 换成 $1,2,\cdots,n$，同时 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 换成了 $k_1,k_2,\cdots,k_n$。根据前面的证明，有

$$(-1)^{J(i_1+i_2+\cdots+i_n)+J(j_1+j_2+\cdots+j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}=(-1)^{J(k_1+k_2+\cdots+k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$$

上式等号右边恰是式(1-5)中的一般项，故结论成立。

性质 1-1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D_n^{\mathrm{T}}=D_n$。

证明 记 $D=|a_{ij}|_n$，则 $D^{\mathrm{T}}=|b_{ij}|_n$，且 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$。对于 D 的展开式

中的每一项

$$(-1)^{J(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

在 D^{T} 的展开式中都有且仅有一项

$$(-1)^{J(j_1,j_2,\cdots,j_n)}b_{j_1 1}b_{j_2 2}\cdots b_{j_n n}$$

与之对应，并且它们的绝对值与所带的符号都相同。所以，$D^{\mathrm{T}}=D$。

性质 1-1 表明：行列式中行和列的地位是对称的，凡是对行成立的性质对列也成立。

例 1-7 证明上三角形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1-8}$$

证明 由性质 1-1 和例 1-6 的结果，得

$$D_n=D_n^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

式(1-7) 和式(1-8) 表明，上、下三角形行列式都等于主对角线元素的乘积。

性质 1-2 互换行列式的任意两行，行列式仅改变符号。

证明 记 $D=|a_{ij}|_n$，交换 D 中第 s 行与第 t 行（$s<t$）得到 D_1。对于 D 的展开式中的每一项

$$(-1)^{J(j_1,j_2,\cdots,j_s,\cdots,j_t,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{tj_t}\cdots a_{nj_n}$$

在 D_1 的展开式中都有且仅有一项

$$(-1)^{J(j_1,j_2,\cdots,j_t,\cdots,j_s,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n}$$

与之对应，并且它们的绝对值相等，所带的符号相反。所以，$D_1=-D$。

推论 如果行列式有两行（或两列）的对应元素相等，则这个行列式等于 0。

性质 1-3 将行列式某一行（列）所有元素都乘以相同的数 k，其结果就等于用 k 乘这个行列式。换句话说，可以将行列式的某一行（列）中所有各元素有的公因数 k 提到行列式符号前面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 记 $D=|a_{ij}|_n$，将 D 中第 i 行所有元素都乘以相同的数 k 得到 kD。对于 D 的展开式中的每一项

$$(-1)^{J(j_1,j_2,\cdots,j_i,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \tag{a}$$

在 kD 的展开式中都有且仅有一项

$$(-1)^{J(j_1,j_2,\cdots,j_i,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots ka_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \tag{b}$$

与之对应，并且式(b) 恰是式(a) 的 k 倍。所以，原命题得证。

推论 1 行列式中如果有一行（列）的所有元素都是 0，则这个行列式等于 0。

由性质 1-2 的推论和性质 1-3 可以得到如下的推论。

推论 2 行列式中如果有两行（或两列）的对应元素成比例，则这个行列式等于 0。

性质 1-4 如果行列式的某行（列），例如第 i 行中各元素都可以写成两数之和

$$a_{ij}=b_j+c_j\ (j=1,2,\cdots,n)$$

那么这个行列式等于两个行列式之和，这两个行列式的第 i 行，一个是 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，另一个是 c_1，c_2，…，c_n，其他各行都和原来的行列式一样，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 若将上式左右的三个行列式分别记为 D、D_1 和 D_2，对于 D 的展开式中的每一项

$$(-1)^{J(j_1,j_2,\cdots j_i,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \tag{a}$$

其中 $a_{ij_i}=b_{j_i}+c_{j_i}$。在 D_1 和 D_2 的展开式中都各有且仅有一项

$$(-1)^{J(j_1,j_2,\cdots j_i,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots b_{j_i}\cdots a_{nj_n} \tag{b}$$

和

$$(-1)^{J(j_1,j_2,\cdots j_i,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots c_{j_i}\cdots a_{nj_n} \tag{c}$$

与式(a) 对应，并且式(b) 与式(c) 之和恰等于式(a)。所以，原命题得证。

性质 1-5 将行列式某一行（列）所有元素都乘以相同的数 k，再加到另一行（列）的对应元素上，得到的新行列式与原行列式相等，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 根据性质 1-4 和性质 1-3 的推论 2，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

性质 1-6　n 阶行列式等于任意一行（列）所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$
D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}\ (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1-9}
$$

$$
D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\ (j = 1,2,\cdots,n) \tag{1-10}
$$

证明　该性质的证明分以下三步进行。

(1) 证明当行列式 D_n 第 1 行元素为 $1,0,0,\cdots,0,0$ 时（并记该行列式为 D_{11}），有

$$
D_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdot & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{a}
$$

因为 D_{11} 中第 1 行的元素只有 $a_{11}=1$，其他元素均为 0，故对于式(a) 有

$$
\begin{aligned}
\text{左边} &= (-1)^{J(1,j_2,j_3,\cdots,j_n)} a_{11}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n} \\
&= (-1)^{J(j_2,j_3,\cdots,j_n)} a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n} = \text{右边}
\end{aligned}
$$

实际上，式(a) 可以表示成

$$
D_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{11} \tag{b}
$$

其中，A_{11} 是 D_{11} 中 a_{11} 的代数余子式。

(2) 证明当行列式 D_n 第 i 行元素仅 $a_{ij}=1$，其他元素均为 0 时（并记该行列式为 D_{ij}），有

$$
D_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{ij} \tag{c}
$$

其中 A_{ij} 是 D_{ij} 中元素 a_{ij} 的代数余子式。

先将 D_{ij} 的第 i 行逐次与其上面相邻的行交换，共进行 $(i-1)$ 次行交换；再将第 j 列逐次与其左面相邻的列交换，共进行 $(j-1)$ 次列交换。这时，矩阵变成了 D_{11} 的形式，这里将其记为 B_{11}。由前面的交换过程知，B_{11} 中 $b_{11}=1$ 的余子式就是 D_{ij} 中 $a_{ij}=1$ 的余子式 M_{ij}。因此，根据 (1) 的结果有

$$D_{ij}=(-1)^{(i-1)+(j-1)}M_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=A_{ij}$$

(3) 将行列式 D 的第 i 行表示为如下形式

$$a_{i1}+0+\cdots+0,0+a_{i2}+\cdots+0,\cdots,0+\cdots+a_{ij}+\cdots+0,\cdots,0+0+\cdots+a_{in}$$

利用性质 1-4，将 D 写成 n 个行列式的和，其中第 j 个行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

再由上面证明了的式(c)，得

$$\begin{aligned} D_n &= a_{i1}D_{i1}+a_{i2}D_{i2}+\cdots+a_{in}D_{in} \\ &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\ (i=1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

证毕

同理可证式(1-10)。

性质 1-6 表明行列式可按任意一行（列）展开。

性质 1-7 n 阶行列式中任意一行（列）的元素与另一行（列）的相应元素代数余子式的乘积之和等于0，即

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=0\ (i\neq j)$$

证明 将 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow 第\ i\ 行 \\ \\ \leftarrow 第\ j\ 行 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

中第 i 行的元素都换成第 $j(i\neq j)$ 行的元素，得到另一个行列式

$$D_0=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow 第\ i\ 行 \\ \\ \leftarrow 第\ j\ 行 \\ \\ \\ \end{matrix}$$