高职高专通用教材

GAODENG SHUXUE JICHU

主　编　程正权　贾振东

高等数学基础

安徽科学技术出版社

高职高专通用教材

GAODENG SHUXUE JICHU

高等数学基础

主　编　程正权　贾振东

编　写　安忠猛　马庆礼　胡　勇

徐文静　朱新东　殷方叶

张　震

安徽科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础/程正权,贾振东主编. 一合肥:安徽科学技术出版社,2008.9
ISBN 978-7-5337-4198-3

Ⅰ.高… Ⅱ.①程…②贾… Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 139137 号

内 容 简 介

本书是面向高职高专的一本高等数学通用教材,按照新课改的精神编写。内容包括一元微积分,多元微积分,常微分方程和线性代数初步。本书取材精炼,要言不烦,通俗易懂,并配有足够的练习和习题,可供 72~90 学时教学之用。

高等数学基础　　　　程正权　贾振东　主编

出 版 人:朱智润
责任编辑:何宗华　期源萍
出版发行:安徽科学技术出版社(合肥市政务文化新区圣泉路 1118 号出版传媒广场,邮编:230071)
电　　话:(0551)3533330
网　　址:www.ahstp.net
E - mail:yougoubu@sina.com
经　　销:新华书店
排　　版:安徽事达科技贸易有限公司
印　　刷:合肥锐达印务有限责任公司
开　　本:720×1000　1/16
印　　张:15.5
字　　数:330 千
版　　次:2008 年 9 月第 1 版　2008 年 9 月第 1 次印刷
定　　价:28.00 元

(本书如有印装质量问题,影响阅读,请向本社市场营销部调换)

前　言

为了适应高职高专教学改革的新形式，贯彻工作过程导向、教学做一体化的新课改精神，切实提高高职高专公共基础课——高等数学的教学质量，我们多所院校合作，老中青三结合开展教研，交流心得，经过多次磋商，新编了这本教材.

本书试图用最精简的篇幅，用深入浅出、富有启发性的语言讲述高等数学最基本的内容；注重营造情境，阐述最基本的数学思想和数学方法；对通常教科书中隐含在字里行间的数学思想，我们尽量揭示道明. 对每一章节，精心配置了足够的练习和习题. 总之，先教学生如何去想，再教如何去做，在做中进一步再想再做，最后落实到解题技能的训练上.

这是一本文理通用的高职高专高等数学基础教材，供一学期(72～90 学时)教学之用.

本书由程正权、贾振东主编，参加编写的同志有合肥通用技术学院安忠猛(第三章，第五章)，安徽绿海商务职业学院马庆礼(第一章)，安徽涉外经济学院胡勇(第七章)，安徽绿海商务职业学院徐文静(第六章)，安徽绿海商务职业学院朱新东(第四章)，安徽绿海商务职业学院殷方叶(第二章)，蚌埠坦克学院张震(第七章). 另外，杜习英主任在教改教研活动及编辑工作的策划组织方面做了大量工作.

安徽绿海商务职业学院陈孝云董事长和王端庆院长对本书给予了充分的关注和大力支持，在此表示衷心的感谢！

我们水平有限，错误、疏漏在所难免，敬请采用本书或看到本书的老师和读者批评指正、不吝赐教.

编　者

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　函数、极限与连续

千姿百态的物质世界无不在运动变化之中，为描述这种变化过程以及变化过程中的变量间的依赖关系，我们引进了函数概念. 函数是高等数学的研究对象，是高等数学中最重要的概念之一；极限方法是研究变量的一种基本方法，高等数学中的许多概念、性质、法则都是通过极限方法来建立的，极限是研究高等数学的工具；连续性是自然界中各种物态连续变化的数学体现. 本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

第一节　函　数

一、变量、区间与邻域

(一)变　量

在日常生活和科学技术中，我们常常遇到各种不同的量，其中在某一过程中保持不变，始终取某一固定数值的量称为常量；在某一过程中发生变化，可以取不同数值的量称为变量，例如：圆的面积公式 $S=\pi r^2$，S、r 是变量，π 是常量.

常量通常用 a、b、c 等表示，变量通常用 x、y、z 等表示.

(二)区间与邻域

1. 区间

设 a、b 都是实数，且 $a<b$，数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为以 a、b 为端点的开区间，记作 (a,b) 即 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$.

类似

$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，称为以 a、b 为端点的闭区间.

$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，称为以 a、b 为端点的左闭右开区间.

$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，称为以 a、b 为端点的左开右闭区间.

以上这些区间称为有限区间. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度，除此之外还有无限区间

$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$

$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$

$(-\infty,+\infty)=\{x|x \text{ 为任意实数}\}=\mathbf{R}$

其中$-\infty$、$+\infty$是两个记号，不是数，表示数的变化趋势，分别读作负无穷大，正无穷大.

2. 邻域

设a与δ是两个实数，且$\delta>0$，以a为中心，长度为$2\delta(\delta>0)$的对称开区间$(a-\delta,a+\delta)$称为点a的δ邻域，记作$\bigcup(a,\delta)$，如图 1-1 所示.

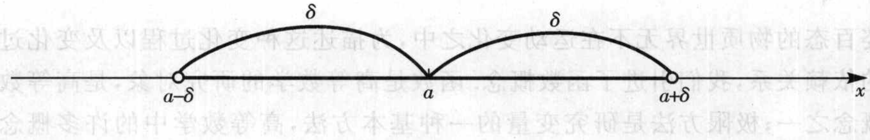


图 1-1

若从$\bigcup(a,\delta)$中去掉中心a点，则称为点a的去心δ邻域，记作$\mathring{\bigcup}(a,\delta)$，即

$$\begin{aligned}\mathring{\bigcup}(x_0,\delta)&=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)\\&=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}\end{aligned}$$

例如，$\bigcup(10,0.5)$表示 10 的 0.5 邻域

$$\begin{aligned}\bigcup(10,0.5)&=\{x\,\|\,x-10|<0.5\}\\&=(9.5,10.5)\end{aligned}$$

$\mathring{\bigcup}(10,0.5)$表示 10 的 0.5 去心邻域

$$\begin{aligned}\mathring{\bigcup}(10,0.5)&=\{x\mid 0<|x-10|<0.5\}\\&=(9.5,10)\cup(10,10.5)\end{aligned}$$

练习 1.1

解下列不等式，并用区间表示

(1)$x^2<9$　　(2)$|x-4|<1$

(3)$0<(x-2)^2<4$　　(4)$|x-a|<\varepsilon$　(a为常数，$\varepsilon>0$)

(5)$|x-4|\geqslant 2$　　(6)$|x-2|<|x+4|$

二、函数的概念

(一)函数的定义

设在某一运动变化过程中，有两个变量x、y，如果对于x在某一范围D内任取一个值，按照某种确定的对应法则f，y总有唯一确定的值与之对应，则称y是x的函数. 记作，$y=f(x)$，$x\in D$.

(二)函数两要素

从上述定义可见，函数有两个要素：定义域D和对应法则f. 这两个要素确定了，函数就确定了，至于自变量和因变量采用什么记号是无关紧要的. 两个函数相同，当且仅当

两个函数的二要素相同.

【例 1-1】 判断下列每组的两个函数是否为同一函数

(1) $y=2\ln x, y=\ln x^2$ (2) $y=|x|, s=\sqrt{t^2}$

解 (1) $y=2\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，而函数 $y=\ln x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，即两个函数的定义域不同，所以它们不是同一个函数.

(2) $y=|x|$ 与 $s=\sqrt{t^2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，并且有相同的对应法则，所以，尽管两个函数的自变量、因变量所用的字母不同，但它们仍表示同一个函数.

(三)定义域的求法

对由解析式给出的函数，其定义域默认为使解析式有意义的自变量的取值范围.

【例 1-2】 求 $f(x)=\dfrac{2}{x-3}+\sqrt{2x-1}$ 的定义域.

解 由 $\begin{cases}x-3\neq 0\\2x-1\geqslant 0\end{cases}$ 解得 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$ 且 $x\neq 3$，即所求定义域为 $\left[\dfrac{1}{2},3\right)\cup(3,+\infty)$.

【例 1-3】 求 $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\arccos(5-2x)$.

解 由 $\begin{cases}x^2-4\geqslant 0\\-1\leqslant 5-2x\leqslant 1\end{cases}$ 解得 $2\leqslant x\leqslant 3$，故定义域为 $[2,3]$.

【例 1-4】 设每本书定价 27 元，有 x 人买书，每人买 1 本，总共花了 y 元，则 y 与 x 的函数关系可以表为 $y=27x, x\in\mathbf{N}$.

这个函数的定义域 x 为正整数集合 $\mathbf{N}$，这是由具体问题确定的.

(四)记号 $f(a)$ 的意义

对函数 $f(x)$，用 $f(a)$ 表示把 $f(x)$ 表达式中的 x 换成 a 所得到的式子.

【例 1-5】 已知函数 $f(x)=x^2+3x+4$，求 $f(0), f(1), f(-1), f(x+1), f(x-1), f\left(\dfrac{1}{x}\right), \dfrac{1}{f(x^2)}$.

解 $f(0)=0^2+3\times 0+4=4$

$f(1)=1^2+3\times 1+4=8$

$f(-1)=(-1)^2+3\times(-1)+4=2$

$f(x+1)=(x+1)^2+3\times(x+1)+4=x^2+5x+8$

$f(x-1)=(x-1)^2+3(x-1)+4=x^2+x+2$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{x}\right)+4=\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}+4$$

$$\frac{1}{f(x^2)}=\frac{1}{(x^2)^2+3(x^2)+4}=\frac{1}{x^4+3x^2+4}.$$

【例 1-6】 设 $f(x+1)=x^2+4x+5$，求 $f(x), f(x-1)$.

解 令 $x+1=t, x=t-1$

$\therefore\ f(t)=(t-1)^2+4(t-1)+5=t^2+2t+2$

即 $f(x)=x^2+2x+2$

$\therefore$ $f(x-1)=(x-1)^2+2(x-1)+2=x^2+1$.

练习 1.2

1. 试求下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{2}{x^2+2x-3}$ (2) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$

(3) $y=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{x+2}$ (4) $y=\dfrac{1}{\lg(x-1)}+\arcsin\dfrac{x-1}{2}$

(5) $y=\lg(\ln x)$ (6) $y=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x-4}-\log_3(5-x)$

2. 求下列各函数值

(1) 若 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(2)$，$f(-2)$，$f(0)$，$f(a)$，$f(a+b)$.

(2) 若 $g(t)=t^2+1$，求 $g(t^2)$，$[g(t)]^2$，$g(t+\Delta t)$.

3. 判断下列每组的两个函数 $f(x)$、$g(x)$ 是否为同一函数？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=1$ (2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

(3) $y=\ln x^5$，$y=5\ln x$ (4) $y=\ln\sqrt{x}$，$y=\dfrac{1}{2}\ln x$

三、函数的几种性质

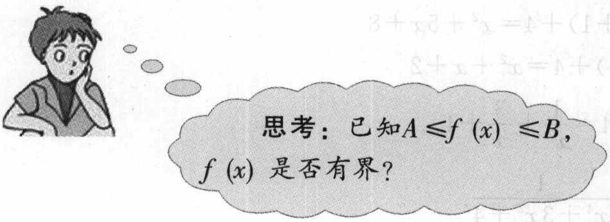
设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$

(一) 有界性

若存在正数 M，对任意 $x\in I$ 有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界，否则称为无界.



【例 1-7】 $f(x)=3\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界，因为 $|3\cos x|\leqslant 3$，而 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上无界，在 $(1,+\infty)$ 上有界.

(二) 单调性

若对于区间 I 内任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时

(1) 若总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加，区间 I 称为 $f(x)$ 的单调增区

间，或称 $f(x)$ 为 I 上的增函数.

(2)若总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少，区间 I 称为 $f(x)$ 的单调减区间，或称 $f(x)$ 为 I 上的减函数.

单调减区间和单调增区间统称为单调区间.

例如，$f(x)=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数，在 $(-\infty,0)$ 为减函数，在 $(-\infty,+\infty)$ 不是单调函数.

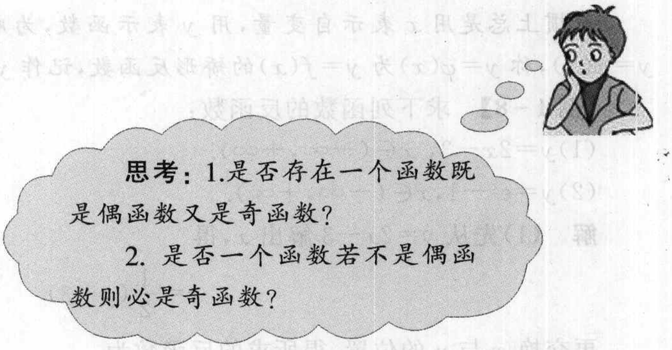
$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 为减函数，在 $(0,+\infty)$ 为减函数，但在 $(-\infty,+\infty)$ 不是单调函数.

(三)奇偶性

若 $f(x)$ 的定义域关于原点对称

(1)恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

(2)恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.



(四)周期性

若存在一个非零常数 T，使得对于任意 $x\in I$，$x+T\in I$，有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的一个周期，显然 $2T,3T,4T$……都是它的一个周期，通常函数的周期是指它的最小正周期，例 $f(x)=6\sin 2x$ 的周期为 π.

练习 1.3

1. 证明下列函数是有界函数

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$　　(2) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$

2. 判断下列函数的单调性

(1) $f(x)=2x+1$　　(2) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

(3) $f(x)=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$　　(4) $f(x)=x+\lg x$

3. 判断下列函数的奇偶性(其中 $a>0$)

(1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$　　(2) $f(x)=xa^{x^2}$

(3) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$　　(4) $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(5) $f(x)=x^2\cos x$ (6) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$

(7) $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$ (8) $f(x)=\sin(\cos x)$

4. 求 $y=\cos^4 x-\sin^4 x+3$ 函数的周期.

四、反函数

定义 设给定函数 $y=f(x)$，如果把 $y=f(x)$ 看成关于未知数 x 的一个方程，欲求 $x=?$，即已知 y 要反解出 x，如果能反解出 $x=\varphi(y)$，则称之为 $y=f(x)$ 的直接反函数.

习惯上总是用 x 表示自变量，用 y 表示函数，为顺应习惯，往往把 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$，称 $y=\varphi(x)$ 为 $y=f(x)$ 的矫形反函数，记作 $y=f^{-1}(x)$.

【例 1-8】 求下列函数的反函数：

(1) $y=2x-3$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) $y=e^x-1$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

解 (1)先从 $y=2x-3$ 解出 x，得

$$x=\frac{1}{2}(y+3)$$

再交换 x 与 y 的位置，得所求的反函数为

$$y=\frac{1}{2}(x+3),x\in(-\infty,+\infty)$$

(2)先从 $y=e^x-1,x\in(-\infty,+\infty)$ 解出 x，得

$$x=\ln(1+y)$$

再交换 x 与 y 的位置，得所求的反函数为

$$y=\ln(1+x),x\in(-1,+\infty)$$

练习 1.4

求下列函数的反函数

(1) $y=2x+1$ (2) $y=\dfrac{x+2}{x-2}$

(3) $y=x^3+2$ (4) $y=1+\lg(x+2)$

(5) $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+2}$

五、初等函数

高等数学中所研究的函数，主要是初等函数，而初等函数是由基本初等函数组成的.

(一)基本初等函数

常数函数：$y=C$（C 为常数）

幂函数：$y=x^{\alpha}$（α 为常数）

指数函数：$y=a^{x}$（$a>0$，$a\neq 1$，a 为常数）

对数函数：$y=\log_{a}x$（$a>0$，$a\neq 1$，a 为常数）

三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$

反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$

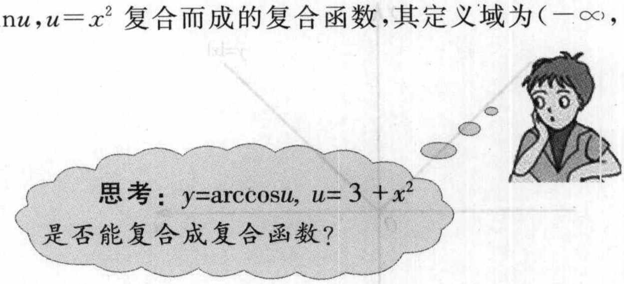
这六类函数统称为基本初等函数，这些函数的性质、图形在中学已经学过，今后经常用到它们.

(二)复合函数

定义　设 $y=f(u)$，其中 $u=\varphi(x)$，且 $u=\varphi(x)$ 的值域落在 $y=f(u)$ 的定义域中，于是，y 经过中间变量 u，归根到底是 x 的函数：$y=f[\varphi(x)]$，称之为 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数.

【例 1-9】　$y=\sin x^{2}$ 是由 $y=\sin u$，$u=x^{2}$ 复合而成的复合函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，也是 $u=x^{2}$ 的定义域.

【例 1-10】　函数 $y=\sqrt{4-x^{2}}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=4-x^{2}$ 复合而成的，定义域为$\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，它是 $u=4-x^{2}$ 的定义域的一部分.



【例 1-11】　分析下列函数的结构：

(1)$y=\sqrt{\cos 3x}$.　　　(2)$y=a^{\sin^{2}\frac{1}{x}}$.

解　(1)$y=\sqrt{u}$，$u=\cos v$，$v=3x$

(2)$y=a^{u}$，$u=v^{2}$，$u=\sin w$，$w=\dfrac{1}{x}$

【例 1-12】　设 $f(x)=x^{3}$，$g(x)=\mathrm{e}^{x}$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解　$f[g(x)]=[g(x)]^{3}=(\mathrm{e}^{x})^{3}=\mathrm{e}^{3x}$

$g[f(x)]=\mathrm{e}^{f(x)}=\mathrm{e}^{x^{3}}$

(三)初等函数

定义　从基本初等函数出发，经过有限次复合及有限次的四则运算生成的且在定义域内有统一解析表达式的函数称为初等函数.

例如，$y=\sqrt{1-x^{3}}$，$y=\mathrm{e}^{x^{2}}-\ln x$，$y=\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}+3\mathrm{e}^{\sin^{2}x}$ 都是初等函数.

(四)分段函数

有些函数的对应法则 f，情况比较复杂，不能在整个定义域内有统一的解析表达式，而是在定义域的不同部分有不同的表达式，这种函数叫做分段函数.

例如寄信时，信重不能超过 20 克付邮费 80 分钱，超过 20 克而不超过 40 克付邮费 160 分钱，于是信重 x 克应付邮费

$$f(x)=\begin{cases}80, & 0<x\leqslant 20\\ 160, & 20<x\leqslant 40\end{cases}$$

这里 $f(x)$ 是一个函数，它的定义域为 $(0,40]$，只是它的对应法则 f 在 $(0,20]$，$(20,40]$ 区间上分别用不同的数学式子来表示，无法统一，这是一个非初等函数.

【例 1-13】 绝对值函数：$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$，如图 1-2 所示.

这个函数也可以表示为 $y=\sqrt{x^2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，显然，它也是初等函数.

【例 1-14】 符号函数：$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$. 如图 1-3 所示.

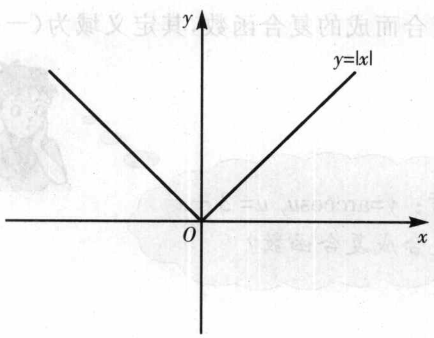


图 1-2

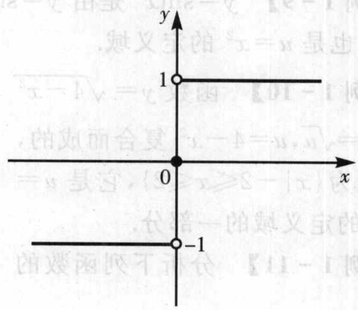


图 1-3

【例 1-15】 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0\\ 1-x^2, & 0<x\leqslant 1,\\ -1, & 1<x\leqslant 4\end{cases}$ 求

(1) $f(x)$ 的定义域.

(2) $f(-2)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(2)$，$f[f(2)]$ 的值.

解 (1)依题意知：函数 $f(x)$ 的定义域为

$$(-\infty,0)\cup(0,1]\cup(1,4]=(-\infty,0)\cup(0,4]$$

所以，函数的 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,4]$

(2)因为 $-2<0$，故求 $f(-2)$ 应把 $x=-2$ 代入 $f(x)$ 第一个表达式得

$$f(-2)=\frac{1}{x}\bigg|_{x=-2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

同理可得：$f\left(\frac{1}{2}\right)=(1-x^2)\Big|_{x=\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$f(2)=-1\Big|_{x=2}=-1$

$f[f(2)]=f(-1)=\frac{1}{x}\Big|_{x=-1}=-1$

练习 1.5

1. 若 $f(x)=(x-1)^2, g(x)=\frac{1}{x+1}$，求

(1)$g(x-1)$　　(2)$f(x^2)$　　(3)$f[g(x)]$　　(4)$g[f(x)]$

2. 若 $f(x)=10^x, g(x)=\lg x$，求

(1)$f[g(100)]$　　(2)$g[f(3)]$　　(3)$f[g(x)]$　　(4)$g[f(x)]$

3. 下列函数有哪些简单函数复合而成的？

(1)$y=\tan^2\sqrt{1+x}$　　(2)$y=\sin(1+2x)$

(3)$y=[\arcsin(1-x^2)]^4$　　(4)$y=3^{\sin 3x}$

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0 \\ x^2+x, & x>0 \end{cases}$，求：(1)$f(x^2)$；(2)$f(-x)$.

第二节　极　限

一、数列的极限

> 一尺之棰，日取其半，万世不竭.
>
> ——《庄子》

依序排列的无穷多个实数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

称为数列，简记作$\{x_n\}$. 其中，x_1 称为数列的第一项，x_2 称为数列的第二项，……，x_n 称为数列的第 n 项，又称通项或一般项.

下面给出几个数列：

(1) $\{(-1)^n\}$：$-1,1,-1,1,\cdots$

(2) $\{\frac{1}{2n}\}$：$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\cdots$

(3) $\{2n\}$：$2,4,6,\cdots,2n,\cdots$

(4) $\{\sin\frac{1}{n}\}$：$\sin 1, \sin\frac{1}{2}, \sin\frac{1}{3}, \cdots$

对于给定的数列，各项的取值由其下标唯一确定，因此数列$\{x_n\}$可以看成是定义在正整数集 N 上的函数.

$$x_n = f(n), n=1,2,3,\cdots$$

显然，数列$\{x_n\}$的自变量 n 只有一种单纯的变化趋势，即 n 无限增大，记为$n\to\infty$，我们就来讨论当 $n\to\infty$时 x_n 的变化趋势.

定义 对于数列$\{x_n\}$，如果 n 无限增大时，通项 x_n 无限趋近于某个确定的常数 a，则称 a 为数列$\{x_n\}$的极限或者称数列$\{x_n\}$收敛于 a，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a(n\to\infty)$$

如果不存在这样的常数 a，就称数列$\{x_n\}$没有极限. 或者称数列$\{x_n\}$是发散的，也称$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的几何意义：在数轴上看点列$\{x_n\}$，随着 n 的增大，x_n 和 a 的距离可达到任意小. 即对任意小的正数 ε 而言，只要 n 大到一定程度，就能使$|x_n - a| < \varepsilon$，即当 n 足够大时所有的点都落在 a 的 ε 邻域内. 也就是说$\bigcup(a,\varepsilon)$外只有有限个点.

【例 1-16】 采用极限的定义，讨论下列数列的极限

(1)$x_n = \frac{1}{e^n}$；　　(2)$x_n = \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$；

(3)$x_n = (-1)^{n-1}$；　　(4)$y = n^2 + 3$.

解 (1)∵当 n 无限增大时，e^n 也无限增大，故$\frac{1}{e^n}$无限趋近于 0，∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e^n} = 0$.

(2)∵$x_n = \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1 + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. 因为 n 无限增大时，$(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$无限趋近于 0，故 $1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$无限趋近于 1，∴$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1$.

(3)∵数列 $x_n = (-1)^{n-1}$在 n 趋近于无穷大时，总在-1 和 1 之间振荡，因此不可能无限趋近于任一个常数，∴$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在.

(4)∵当 n 无限增大时，$x_n = n^2 + 3$ 也无限增大，因此不可能趋近于一个常数，∴$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在.

练习 1.6

计算题

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt{n}})$　　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}$

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+3}{n^2+4n-7}$　　(4)$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+2}$　　　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n}$

二、函数的极限

数列的极限是一种特殊函数极限，现在，我们讨论一般情况下定义在实数集 R 上的函数 $y=f(x)$ 的极限，这时，自变量 x 变化趋势可分为六种即：

x 从定点 x_0 的左、右两侧趋向于 x_0，记作 $x\to x_0$；

x 从定点 x_0 的左侧趋向于 x_0，记作 $x\to x_0^-$；

x 从定点 x_0 的右侧趋向于 x_0，记作 $x\to x_0^+$；

x 从数轴正、负两个方向趋向于无穷大，即 $|x|$ 无限增大，记作 $x\to\infty$；

x 从数轴正方向趋向于无穷大，即 x 无限增大，记作 $x\to+\infty$；

x 从数轴负方向趋向于无穷大，即 x 无限减小，记作 $x\to-\infty$；

讨论函数的极限，也就是讨论当自变量 x 按上述各方式变化时，所引起的函数值 $f(x)$ 的变化趋势.

（一）$x\to x_0$ 时函数的极限

【例 1－17】 讨论当 $x\to2$ 时，函数 $y=x+1$ 的变化趋势.

解 作出函数 $y=x+1$ 的图像. 如图 1－4.

不论 x 从小于 2 的方向趋近于 2，还是从大于 2 的方向趋近于 2，函数 $y=x+1$ 的值总是随着自变量 x 的变化从两个不同的方向愈来愈接近于 3，所以说

当 $x\to2$ 时，$y=x+1\to3$.

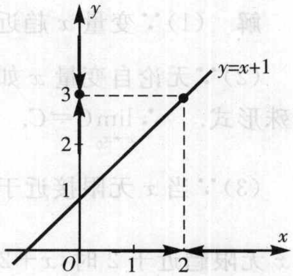


图 1－4

【例 1－18】 讨论当 $x\to1$ 时，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势.

解 作出函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的图像. 如图 1－5 所示.

函数的定义域为 $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ \infty)$，在 $x=1$ 处函数没有定义，x 不论从大于 1 或从小于 1 两个方向趋近于 1 时，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的值是从两个不同方向愈来愈接近于 2 的.

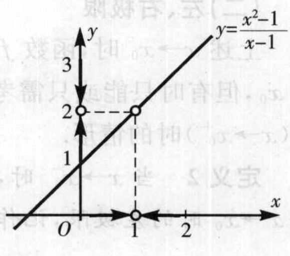


图 1－5

我们研究当 x 趋近于 1 函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势时，并不计较函数在 $x=1$ 处是否有定义，而仅关心函数在 $x=1$ 的邻近的函数值的变化趋势，也即我们认为在 $x\to1$ 时隐含一个要求：$x\neq1$. 因此，当 $x\to1$ 时，$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}\to2$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com