

你缺少的不
是努力，而是
方向

首席教师

专题小课本

- 小方法大智慧
- 小技巧大成效
- 小单元大提升
- 小课本大讲坛

高中数学 数列

总主编/钟山



中国出版集团 现代教育出版社

海阔凭鱼跃

图书在版编目(CIP)数据

首席教师专题小课本. 高中数学. 数列 / 钟山主编.
北京: 现代教育出版社, 2008. 4

ISBN 978-7-80196-650-6

I. 首… II. 钟… III. 代数课—高中—教学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 038468 号

书 名: 首席教师专题小课本·高中数学—数列

出版发行: 现代教育出版社

地 址: 北京市朝阳区安华里 504 号 E 座

邮政编码: 100011

印 刷: 北京市梦宇印务有限公司印刷

发行热线: 010-61743009

开 本: 890×1240 1/32

印 张: 8

字 数: 340 千字

印 次: 2008 年 4 月第 1 版 第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-80196-650-6

定 价: 13.80 元

您需要的不是机会

NINXUYAODEBUSHIJIHUI



而是变换支点

小单元——知识·方法·能力·命题的交汇处

小单元——高效学习·成功备考的新支点

小单元学习法

首席教师的成功经验，优秀学生的学习秘诀

小单元是指在充分研究考纲和课标，透析教材知识结构，按照知识、方法、能力与中高命题的内在联系和系统结构，把教材内容分成若干个相对完整和独立的内容组块。几个小单元又构成相当于教材单元（或章）的内容板块，教材的几个单元又构成了大专题。

课时的基础性学习与单元的提升性学习

各类统考、高考试题命制的立足点、密集区在小单元，其能力要求、难度、综合性、深刻性、创新性往往与课时学习、教材内容严重脱节。在一节教材或一个课时中，对问题、原理及规律往往不能完全清楚认识，也不可能深化拓展，其实这只是基础性学习阶段。真正发展能力和提升成绩的支点是小单元，小单元学习是更高层次的提升性学习，是真正深化、拓展、发展能力的重要阶段，也是行之有效的螺旋式滚动提升的科学学习方法。

主动变换发力点

实际教学中由于课时紧张，大多数师生致力于同步教材的课时学习，习惯于一个个概念孤立记忆，一道道题去解析，往往事倍功半，这也是很多学生平时学习很努力，但考试成绩不理想的重要原因之一。这就要求我们转变观念，在同步学习及备考复习的过程中适时、适度的插入小单元、大单元及专题学习，主动完成提升性学习，对所学内容分级整合深化、各个击破，分级提升学生的知识整合能力、综合运用能力和问题解决能力。

单元学习五大关键

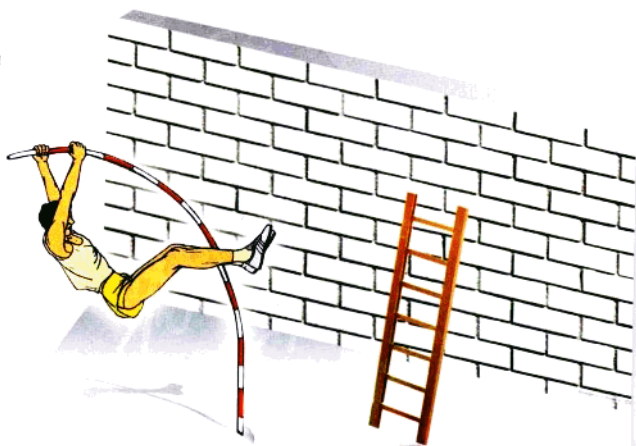
整合深化
形成知识模块

归纳拓展
活化解题方法

系统分层
培养高考能力

居高临下
形成应试策略

题组检测
优化训练方法



首席教师 专题小课本

高中数学

几何初步

总 主 编：钟 山
本册主编：向 宁
李庆阳

本书成立答疑解难工作委员会，如有疑难问题可通过以下方式与我们联系：

企业网站：

<http://www.hjxxy.com>

产品网站：

<http://www.swinnet.net>

服务电话：010-61743009

010-61767818

电子邮箱：

book@hjxxy.com

service@swinnet.net

通信地址：北京市天通苑邮
局 6503 号信箱

邮政编码：102218

专题三
半单元提升

知识网络梳理

ZHISHIJIWANGLIJIOSHULI

综合专题突破

ZONGHEZHUANTETUPU



大单元提升

高考能力培养

命题规律点津

题组优化训练

知识清单精解

方法技巧突破



小单元提升



专题提升

思维方法攻略

SIWEIFANGFAGONGLUE

高考热点突破

GAOKAOREDIANTUPO

专题速记图解

ZHUANTISUJITUTUJIE

高考热点导航

GAOKAUREDIANDAOHANG

高考零距离检测

GAOKAOLINGJULIJIANCE

知识清单精解

单元内知识、方法、公式等学习要点清单化，运用整合、深化、对比、综合、发散等精细化学习方法及口诀、图表、顺口溜等学习技巧，精讲透析，简明快捷，易看、易记、易懂。

方法技巧突破

精心归纳问题及类型，找到最佳解决思想方法、解题技巧，透析方法运用要点，实现有效迁移，举一反三。例题讲解中进一步对疑难点的深化拓展，真正解决知识学习与解题运用的脱节问题。

高考能力培养

透析考纲对单元内容的能力要求，精析高考对知识内容的具体要求，配以典型考例透视能力层次，科学把握学习的难度和综合性，做到有的放矢，达到事半功倍的学习效果。

命题规律点津

从高考要求、命题规律、应试策略三个维度详实讲解单元的高考现状与发展趋势，具体把握应试策略与技巧，真正实现高考备考同步化，科学阐释了零距离高考新概念。

题组优化训练

从误区突破、综合创新两个维度分题组选题，精选高考真题，热点模拟题、创新题、原创题，针对训练，集中突破。同时答案详解，配以题组规律总结，更利于练后反馈，达到训练效益最大化。

知识网络梳理

细致梳理概括大单元或章的知识与方法，达到网络化、图式化、结构化和形象化，利于快捷地由小单元升华为大单元，进一步扩充知识架构。

综合专题突破

在小单元讲练的基础上，整理出综合性、创新性、能力性更强的问题、方法、题型，以小专题形式专项讲解、拓展突破。

前言 Q IANYAN

发现
依靠眼光
行动决定
收获

近年来,我国的基础教育改革的素质教育进程已进入深化实施阶段,中学教材已呈现出“一标多本”的多元化格局,高考更是呈现出“一纲多卷”的地方化特色。为了更好地适应教学考的新趋势、新特色,我们集各省名校的学科首席教师、一线特高级教师和有经验的教育考试专家的聪明智慧和科研成果,精心构思,编写打造了本套丛书。

本套丛书的鲜明特色和深度魅力,主要体现在以下四个方面:

1. 核心单元,提升成绩的真正支点

小单元学习与同步课时学习相比,是更高层次的提升性学习,是真正深化拓展、发展能力、成功应试的重要步骤,也是行之有效的螺旋式滚动提升的科学学习方法。本套丛书以小单元为讲练基点,弥补了同步教学的缺失和薄弱环节,单元内由“知识、方法、能力、应试与训练”五要素构成了最优化学习程序,层次鲜明,通过对重难点、能力点、方法点和考点的精心讲练,有效的为师生最大限度提升成绩,建起了知识、方法和能力提升的新支点。

2. 螺旋提升,提供三级发展平台

专题编写遵循“小单元提升、大单元提升、本专题提升”三个梯度,再加上平时的课时学习,讲练结合、循序渐进、螺旋提升,构成了学科学习、思维发展与能力培养的有机整体。

3. 突出方法,多维度培养能力

无论是疑难讲解,问题解决,还是应试与训练,均以方法归纳、提炼与运用为突破口,力求做到集“学习法、解题法、应试法、训练法”于一身,帮助学生高效构建知识体系和方法体系,使读者在运用本书高效学习的同时收获更多的有效方法,发掘自己的最大学习潜能。

4. 汲取各版本精华,真正的专题教材

在编写过程中,充分汲取各版本教材的特色与精华,选取其中典型素材、典题典例、方法技巧,以师生完成同步教材的课时学习为基础,通过整合、深化、发散、分级,达到高考要求,既是学生完成提升性学习的专题教材,更是教师各类单元、专题教学的必备参考。

阿基米德说:给我一个支点,
我将撬起地球。本套丛书必将成为
您成功的新支点,发展的新平台。



目 录

首席寄语	(1)
单元提升篇	(3)
第一章 数列的有关概念	(3)
第一单元 数 列	(3)
第二单元 数列的递推公式	(20)
章末综合提升	(39)
方法·技巧·策略	
数列中的几个不同(3)/数列的几个常用概念(4)/数列的表示法(4)/待定系数法(6)/检验法求数列通项(8)/利用函数的对应法则,求通项 a_n (9)/利用裂项相消法求数列的前 n 项和 S_n (9)/倒序相加法求数列的前 n 项和(10)/解决数列中最大项、最小项问题的方法(10)/利用数列前 n 项和 S_n 求数列通项 a_n (15)/归纳猜想法(21)/函数思想(22)/分类讨论思想(22)/已知 a_1 及 $a_n=f(a_{n-1})$,求 a_k 的方法(23)/求数列通项的累加法(也叫叠加法)(24)/求数列通项的累乘法(25)/利用数列的周期性求值(26)/由递推公式求数列的某项(32)/构造数列求数列的通项公式(32)/数列中的方程思想(39)/数列中的函数思想(40)	
第二章 等差数列	(46)
第一单元 等差数列	(46)
第二单元 等差数列的前 n 项和	(65)
章末综合提升	(87)
方法·技巧·策略	
等差数列的概念(46)/等差数列的单调性的应用(47)/等差数列的常用性质(47)/等差数列通项公式中的“知三求一”(51)/等差数列中公式 $a_n=a_m+(n-m)d$ 的巧用(52)/等差数列前 n 项和 S_n 的最值问题(65)/等差数列的几个重要结论(66)/整体思想(67)/分类讨论思想(67)/转化思想(69)/等差数列前 n 项和公式中的“知三求二”(70)/倒序相加法求和(71)/等差数列与和有关的几个性质与结论的巧用(73)/等差数列的前 n 项和的最大(小)值(74)/数列求和与向量知识的结合(81)/等差数列的前 n 项和与不等式综合应用(81)/与等差数列的前 n 项和有关的恒成立问题(82)/等差数列中的几个常用结论(87)	
第三章 等比数列	(95)
第一单元 等比数列	(95)
第二单元 等比数列的前 n 项和	(113)



章末综合提升	(133)
--------------	-------

方法·技巧·策略

整体思想(96)/转化与化归思想(98)/等比数列中的“知三求一”(99)/等比中项概念的应用(99)/等比数列性质的应用(99)/等比数列与不等式的综合(107)/等比数列与函数的综合(108)/等比数列中的“知三求二”(115)/错位相减法求和(117)/等比数列的前 n 项和与方程结合(118)/等比数列的前 n 项和(134)

第四章 数列求和	(144)
----------------	-------

第一单元 数列求和	(144)
-----------------	-------

第二单元 数列的应用(I)	(168)
---------------------	-------

第三单元 数列的应用(II)	(192)
----------------------	-------

章末综合提升	(208)
--------------	-------

方法·技巧·策略

数列求和的常用方法(144)/分类思想(145)/转化与化归思想(146)/通项法求和(148)/倒序相加法求和(149)/错位相减法(150)/拆项分组法求和(151)/裂项相消法求和(152)/并项法求和(152)/转化与化归法求和(153)/试值猜想法求和(154)/数列前 n 项和与不等式的综合问题(161)/分类讨论思想(169)/转化与化归思想(170)/等差数列、等比数列的性质应用(171)/等差数列、等比数列与方程的综合(172)/数列与函数的综合(172)/等差数列、等比数列与不等式的综合(173)/数列与解析几何的综合(174)/数列中的新定义(176)/递推数列通项公式问题(184)/等差数列、等比数列与方程的综合问题(184)/数列与函数的综合问题(184)/分类讨论思想(193)/函数思想(194)/用数列知识处理分期付款问题(195)/数列知识在生产、生活中的增减率方面的应用(197)/数列知识在环境治理方面的应用(198)/养老保险问题(201)/住房问题(202)/增效率问题(202)

专题提升篇	(219)
-------------	-------

第一单元 专题思想方法	(219)
-------------------	-------

方法·技巧·策略

分类讨论思想(219)/函数与方程思想(222)/转化与化归思想(226)

第二单元 专题高考热点	(238)
-------------------	-------

方法·技巧·策略

数列的通项 a_n 与前 n 项和 S_n 关系的利用(238)/数列的递推关系(239)

附录	(251)
----------	-------



首席寄语

■专题导引

本专题主要包括数列、等差数列、等比数列及数列的应用。

数列是高中数学的重点内容之一,也是初等数学与高等数学衔接最密切的内容之一,是进一步学习高等数学的基础,数列的题目形态多变,蕴涵丰富的数学思想和方法,是高考的热点之一。

■高考命题规律

1. 数列的概念,数列的通项公式及前 n 项和的关系 $a_n = \begin{cases} S_1 (n=1), \\ S_n - S_{n-1} (n \geq 2), \end{cases}$ 此关系式应用非常广泛。

2. 两个基本数列——等差数列与等比数列,等差数列、等比数列的定义、通项公式及性质与前 n 项和公式一直是高考考查的重点,主要以选择题、填空题的形式出现,解题方法灵活多样,技巧性较强。

3. 等差数列与等比数列前 n 项和公式的推导方法、倒序相加法及错位相减法是数列求和的重要方法,数列求和还有其他几种常用方法:裂项相消法、拆项分组法、转化法,这些方法在高考中常常作为一个小题出现在解答題中。

4. 递推数列的通项公式问题久考不衰,在高考中备受青睐,递推公式多种多样,解法灵活多变,适当转化可化归为等差数列或等比数列问题。

5. 数列与函数、不等式、方程、解析几何等知识的综合问题在高考试卷中频频出现,以解答题为主。

在数列与其他知识的交汇点设计题目成为高考对能力和素质考查的重要方面。

6. 数列应用问题在高考试卷中也占有一席之地,这类问题涉及到工农业生产现实生活的方方面面,常见题型有:银行信贷、生产产品的增长率、分期付款、养老保险、纳税问题、获取利润、银行储蓄等,借助数列知识将实际问题转化为数学问题,建立起有关等差数列或等比数列及递推数列的模型,利用相关知识来解决问题。

7. 以数列为载体的探索性问题与开放性问题为高考命题改革的一个亮点。

■学习应试策略

纵观近几年各省市的高考试题,本专题内容的考查规律是:小题考性质,大题考能力,体现“小而巧”、“大而全”的特点,一般有一至两个客观题,一个主观题,比例约占总分 9%~15%。

根据近几年的数列部分的命题特点,学习数列时宜采取以下策略。



1. 立足课本, 狠抓基础, 要正确理解数列的递推公式、等差数列、等比数列的意义, 掌握其通项公式和前 n 项和公式及其联系和内在规律, 在等比数列求前 n 项和时要按 $q \neq 1$ 和 $q = 1$ 两种情况分类讨论.

2. 数列的通项 a_n 和前 n 项和 S_n 有密切关系, 但要注意 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 中的 $n \geq 2$, 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1$, 若 a_1 满足 $n \geq 2$ 时 a_n 的表达式, 则统一成一个表达式; 若 a_1 不满足 $n \geq 2$ 时 a_n 的表达式, 则 a_n 分段表示. a_n 与 S_n 的关系问题历来是高考考查的热点.

3. 等差数列、等比数列的性质要类比理解、记忆, 巧用等差数列、等比数列的性质, 可达到减少运算量, 提高解题速度和准确率的目的.

4. 注意等差数列、等比数列的工具作用, 要利用好这两个工具, 把非等差数列、非等比数列转化为等差数列、等比数列问题来进行解决. 深刻领悟蕴藏在其中的转化与化归思想.

5. 重视数列的综合性问题, 尤其是数列与函数、不等式、方程、解析几何等知识的综合应用.

6. 一般数列求和的思维方法, 首先要考虑是否能转化为等比数列、等差数列求和, 再考虑能否转化为常用的求和方法: 裂项相消、错位相减、倒序相加、拆项分组等方法.

7. 对于数列应用题充分运用观察、归纳、猜想的手段建立出有关等差数列、等比数列及递推关系的数列模型, 再结合相关知识加以解决.

8. 善于总结规律, 归纳方法.

数列题目形态多变, 规律性较强, 记住一些结论大有用处, 这些结论可直接用于选择题及填空题. 对于解答题这些结论可能就是解题的突破口, 既能节省时间, 又能提高做题效率. 因此平时做题要善于总结规律, 归纳解题方法.

[单元提升篇]

第一章 数列的有关概念

课程标准要求

通过日常生活中的实例,了解数列的概念和几种简单的表示方法(列表、图象、通项公式),了解数列是一种特殊的函数.

第一单元

数 列

知识清单精解
 ZHISHIQINGDANJINGJIE

▶ 要点 1 数列中的几个不同

不同	原因
数列与数集不同	集合中的元素有无序性和互异性;数列中的数是按一定顺序排列的,如果组成两个数列的数相同而排列顺序不同,那么它们是不同的数列
数列 $\{a_n\}$ 与 a_n 不同	$\{a_n\}$ 表示数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$; a_n 只表示数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项
数列是特殊的函数	数列是一个特殊的函数,它的定义域是正整数集 $\mathbf{N}^+$ 或它的有限子集 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$,这个特殊函数的图象是以位置序号 n 为横坐标,相应的项为纵坐标描点画图而得到,数列的图象是一系列孤立的点

要点2 数列的几个常用概念

名称	内容
数列的概念	按照一定的次序排列起来的一列数叫做数列,数列中的每一个数叫做这个数列的项,排在第一位的称为这个数列的第一项(也叫首项),往后各项依次叫做这个数列的第2项,……,第 n 项,……
数列的一般形式	$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 或记作 $\{a_n\}$
数列的通项	用一个函数式 $f(n)$ 来表示的公式: $a_n = f(n)$

要点3 数列的表示法

方法	注意事项
列举法	数字可以重复,与顺序有关
图象法	由 (n, a_n) 一些孤立的点构成
解析法	即用通项公式表示,如 $a_n = 2n + 1$

要点4 数列的分类

按项数	有穷数列,无穷数列
按项的大小	递增数列,递减数列,摆动数列,常数列

要点5 数列的前 n 项和 S_n 与通项 a_n 的关系

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1), \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2). \end{cases}$$

当 a_1 满足 $n \geq 2$ 的表达式时可统一写成一个表达式.

要点6 已知数列的前几项求其通项公式的常用方法

观察分析法、逐差法、待定系数法、特殊数列法、转化法、归纳递推法等.

方法技巧突破

数学思想方法

一 观察分析法

根据数列的前几项求数列的通项公式的关键是在认真观察的基础上进行合理的等价变形,以便发现数列的项与序号的对应规律,可分别找出符号规律,分子、分母的规律,体现了分类讨论的数学思想,归纳与类比、分析与综合的数学方法,另外注意所写通项公式并不唯一.

例 1 写出下面数列的一个通项公式,使它的前几项分别是下列各数:

① $\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{32}, \dots$;

② $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 3\frac{1}{4}, 4\frac{1}{5}, \dots$;

$$\textcircled{3} -1, \frac{1}{3}, -\frac{9}{35}, \frac{17}{63}, -\frac{33}{99}, \dots;$$

$$\textcircled{4} 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots;$$

$$\textcircled{5} \frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5}, \dots;$$

$$\textcircled{6} 3, 33, 333, 3\,333, \dots$$

解: ①原数列可变形为 $\frac{3}{2}, \frac{4}{4}, \frac{5}{8}, \frac{6}{16}, \frac{7}{32}, \dots$,

$$\therefore a_n = \frac{n+2}{2^n}.$$

$$\textcircled{2} 1 \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{1+1},$$

$$2 \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{2+1},$$

$$3 \frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{3+1},$$

$$4 \frac{1}{5} = 4 + \frac{1}{5} = 4 + \frac{1}{4+1},$$

...

$$\therefore a_n = n + \frac{1}{n+1}.$$

③数列的前5项可写成

$$-\frac{3}{1 \times 3}, \frac{5}{3 \times 5}, -\frac{9}{5 \times 7}, \frac{17}{7 \times 9}, -\frac{33}{9 \times 11},$$

每项符号正、负互相间隔, 可由 $(-1)^n$ 决定,

分子规律: $2+1, 2^2+1, 2^3+1, \dots, 2^n+1, \dots$,

各项分母的第一个因数: $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1$,

各项分母的第二个因数: $3, 5, 7, 9, \dots, 2n+1$,

$$\therefore \text{各项分母规律 } (2n-1)(2n+1), \therefore a_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n+1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

④数列的各项呈周期性变化, 根据项的特点, 联想正弦弦函数值, 可以用 $\sin \frac{n-1}{2}\pi$ 表示, 当然也可以用 $\cos \frac{n-2}{2}\pi$ 表示.

$$\therefore a_n = \sin \frac{n-1}{2}\pi \text{ 或 } a_n = \cos \frac{n-2}{2}\pi.$$

⑤各项中分母出现的数字比项数大1, 分子的规律与分母类似,

$$\therefore a_n = \frac{(n+1)^2-1}{n+1}.$$

⑥联想 $9, 99, 999, 9\,999, \dots$,

$$\because 9=10-1, 99=10^2-1, 999=10^3-1, 9\,999=10^4-1,$$



$$\underbrace{99\cdots 9}_{n\text{个}} = 10^n - 1,$$

∴ 其通项为 $a_n = 10^n - 1$.

观察数列 3, 33, 333, 3 333, ... 与 9, 99, 999, 9 999, ... 的联系.

$$3 = 9 \times \frac{1}{3}, 33 = 99 \times \frac{1}{3}, 333 = 999 \times \frac{1}{3},$$

...

$$\therefore a_n = \frac{1}{3} \times (10^n - 1).$$

解题点拨: 注意抓住其几个方面的特殊性: 分式中分子、分母的独立特征; 相邻项变化特征; 拆项后的特征; 各项符号特征和绝对值特征, 并就此进行化归、归纳、联想等.

二 待定系数法

待定系数法是由通项公式为项数 n 的函数, 设通项并列方程(组)求待定系数, 从而解决问题.

例 2 在数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 2, a_{17} = 66$, 通项公式是项数 n 的一次函数.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 88 是否是数列 $\{a_n\}$ 中的项?

解: (1) 设 $a_n = An + B$, 由 $a_1 = 2, a_{17} = 66$ 得,

$$\begin{cases} A + B = 2, \\ 17A + B = 66. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} A = 4, \\ B = -2. \end{cases} \therefore a_n = 4n - 2.$$

(2) 假设 88 是数列 $\{a_n\}$ 中的项, 则 $88 = 4n - 2$. 解得 $n = \frac{45}{2} \notin \mathbb{N}$.

∴ 88 不是数列 $\{a_n\}$ 的项.

解题点拨: 判断所给数是不是该数列的项时, 可以先假设这个数是该数列的项, 当求的 n 为正整数时, 则所给数是这个数列的项, 否则不是.

三 方程思想和方法

方程思想是通过问题中已知量与未知量之间的数量关系, 运用数学的抽象语言(符号语言)转化为方程(组), 使问题获得解决的一种数学思想.

例 3 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \frac{n^2 - 21n}{2} (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 0 和 1 是不是数列 $\{a_n\}$ 中的项? 如果是, 那么是第几项?

(2) 数列 $\{a_n\}$ 中是否存在连续且相等的两项? 若存在, 分别是第几项?

解: (1) 令 $a_n = 0$, 得 $n^2 - 21n = 0$.

∴ $n = 21$ 或 $n = 0$ (舍去), ∴ 0 是数列 $\{a_n\}$ 的第 21 项.

令 $a_n = 1$, 得 $\frac{n^2 - 21n}{2} = 1$.

$\therefore$ 该方程无正整数解, $\therefore 1$ 不是数列 $\{a_n\}$ 中的项.

(2) 假设存在连续且相等的两项为 $a_n = a_{n+1}$,

$$\text{则有 } \frac{n^2 - 21n}{2} = \frac{(n+1)^2 - 21(n+1)}{2}.$$

解得 $n = 10$.

$\therefore$ 存在连续且相等的两项, 它们分别是第 10 项和第 11 项.

解题点拨: 根据题意列出方程, 若方程的解是正整数, 则有意义, 否则不合题意.

四 分类讨论思想

分类是根据研究对象的相同点和不同点, 在一定的标准下, 把全体对象区分为若干种类的逻辑方法, 运用分类的思想可以帮助人们进行全面严谨的思考、分析、讨论和论证, 从而获得合理的解题途径和方法.

例 4 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 7n - 8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 T_n .

解: (1) 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = -14$; 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 8$.

$$\therefore a_1 \text{ 不满足 } a_n, \therefore a_n = \begin{cases} -14 & (n=1), \\ 2n-8 & (n \geq 2). \end{cases}$$

(2) 由 $a_n = 2n - 8$ 得,

当 $n \leq 4$ 时, $a_n \leq 0$; 当 $n \geq 5$ 时, $a_n > 0$.

$$\therefore \text{当 } n \leq 4 \text{ 时, } T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = -a_1 - a_2 - \cdots - a_n = -S_n \\ = -n^2 + 7n + 8.$$

$$\text{当 } n \geq 5 \text{ 时, } T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = (-a_1 - a_2 - a_3 - a_4) + (a_5 + a_6 + \cdots + a_n) \\ = -S_4 + (S_n - S_4) = S_n - 2S_4 = n^2 - 7n - 8 - 2 \times (-20) = n^2 - 7n + 32.$$

$$\therefore T_n = \begin{cases} -n^2 + 7n + 8 & (1 \leq n \leq 4), \\ n^2 - 7n + 32 & (n \geq 5). \end{cases}$$

解题点拨: ① 利用 $a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1), \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$ 求通项时检验 a_1 是否适合 $a_n (n \geq 2)$.

② 若适合, 则统一写成 a_n 的表达式.

③ 对于 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和, 要认真分析项的正、负, 先对每项去掉绝对值符号后, 再求和.

五 函数思想

数列是特殊的函数, 数列的通项公式就是相应的函数解析式. 在研究数列的单调性、最值等问题时, 可利用函数的对应性质来解决.

例 5 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 - 5n + 4$, 当 n 为何值时, a_n 有最小值? 并求出最小值.



$$\therefore a_n = n^2 - 5n + 4 = \left(n - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4},$$

对应函数的对称轴方程为 $x = \frac{5}{2}$, 当 $x = \frac{5}{2}$ 时, $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ 有最小值.

$\therefore n \in \mathbb{N}^+$, $\therefore n=2$ 或 $n=3$ 时, a_n 有最小值, 其最小值为 $2^2 - 5 \times 2 + 4 = -2$.

解题点拨: 已知通项公式求最大项、最小项, 类似于已知函数解析式求函数的最值问题, 本题通项公式是关于 n 的二次函数, 利用了二次函数求最值的方法, 求得数列的最小值.

■ 解题技法

一 检验法求数列通项

已知一个数列的前几项, 求这个数列的通项公式. 对于选择题如果各项的规律难寻, 则可将 $n=1, 2, \dots$ 代入各选项中的通项公式求值检验是否是给出的数列的前几项, 对于其他题型由于通项公式未知, 只能寻找规律或利用一些求通项的技巧, 因此此法适用于选择题.

例 1 (1) 若数列的前四项为 2, 0, 2, 0, 则这个数列的通项公式不能是 ()

A. $a_n = 1 + (-1)^{n+1}$

B. $a_n = 1 - \cos n\pi$

C. $a_n = 2\sin^2 \frac{n\pi}{2}$

D. $a_n = 1 + (-1)^{n-1} + (n-1)(n-2)$

(2) 给定数列: 1, 2+3+4, 5+6+7+8+9, 10+11+12+13+14+15+16, $\dots$, 则该数列的一个通项公式是 ()

A. $a_n = 2n^2 + 3n - 1$

B. $a_n = n^2 + 5n - 5$

C. $a_n = 2n^3 - 3n^2 + 3n - 1$

D. $a_n = 2n^3 - n^2 + n - 2$

答案: (1) D (2) C

解析: (1) 将各选项中的通项公式写出前 4 项, 看是否为题干中的数即可, 当 $n=3$ 时不满足 D. $\therefore$ 选 D.

(2) 代入验证, 由于给定的数列的前 4 项分别是 1, 9, 35, 91, 分别代入 A、B、C、D 四个选项进行验证, 可排除 A、B、D. $\therefore$ 选 C.

解题点拨: 此题若根据前四项找规律直接写出通项公式比较困难, 且有些题的通项不唯一. 对于此类选择题, 检验法简明、准确.

二 利用数列前 n 项和 S_n 求通项公式 a_n

已知数列的前 n 项和 S_n . 关于 n 的表达式求通项公式 a_n , 可由 $a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1), \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$ 得到. 这是一种常见题型.

例 2 已知下列各数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的公式, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(1) $S_n = 2n^2 - 3n$; (2) $S_n = 2n^2 - 3n + 1$.

解: (1) 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = -1$.