数学分析习题集

Б. П. 吉米多维奇著

李　荣　涑　译

人民教育出版社

简 装 本 说 明

目前 850×1168 毫米规格纸张较少，本书暂以 787×1092 毫米规格纸张印刷，定价相应减少 20%。希鉴谅。

数学分析习题集

Б. П. 吉米多维奇著

李荣涷译

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

上海商务印刷厂印装

新华书店上海发行所发行

各地新华书店经售

书号 13012·084　开本 787×1092　1/32　印张 18

字数 433,000　印数 376,001—676,000　定价 ￥1.36

1958 年 6 月新 1 版（修订本）　1979 年 2 月上海第 15 次印刷

第三版序言

在这第三版基本上沒有什么改变，仅对个别問題的叙述更加确切并改正了答案中的一些錯誤。

我对于 И. А. 瓦因什金及 М. Л. 斯摩尔揚斯基两位副教授协助校正答案在此表示衷心的感謝。

Б. П. 吉米多維奇

1956 年于莫斯科

第二版序言

在这第二版中接受了許多教师的意見，增加很多有关数学分析各主要章节的計算性的习題。增加的习題和例題有一千以上，大部分是关于求极限、微分法、不定积分与定积分、級数与变量代换的問題。同时根据各种考慮，删去了一些題目。由于材料叙述的方便在第四与第五两章內改变了个别几节的先后次序。此外，在习題集中某些地方的标題也更明确了。与从前一样，在习題集中特別注意措辞的准确性，并詳細地說明某些公式成立的条件。为了使用的方便，在习題集里采用了問題的統一編号。在书末添有附录，其中包含重要常数及最常用的函数表。

国立莫斯科(罗蒙洛索夫)大学数学分析教研室主任 Н. Д. 阿伊任什达特及 З. М. 克什克拉副教授預先校閱第二版的手稿，特此志謝。

Б. П. 吉米多維奇

1953 年于莫斯科

第三版序言

第二版序言

第一編　単变量函数

第二編　多变量函数

附　　录

第一編　单变量函数

第一章　分析引論

§1. 实数

1° 数学归納法　为了証明某定理对任意的自然数 n 为眞，只須証明下面两点就够了：(1)这定理对 $n=1$ 为眞，(2)設这定理对任何的一个自然数 n 为眞，则它对其次的一自然数 $n+1$ 也为眞。

2° 分割　假設分有理数为 A 和 B 两类，使其满足于下列条件：(1)两类均非空集，(2)每一个有理数必属于一类，且仅属于一类，(3)属于 A 类(下类)的任一数小于属于 B 类(上类)的任何数，这样的一个分类法称为分割。(a)若或是下类 A 有最大的数，或是上类 B 有最小的数，则分割 A/B 确定一个有理数。(б)若 A 类无最大数，而 B 类亦无最小数。则分割 A/B 确定一个无理数。有理数和无理数統称为实数①。

3° 絕对值　假若 x 为实数，则用下列条件所确定的非負数 $|x|$，称为 x 的絕对值：

$$|x|=\begin{cases} x, & 若\ x\geqslant 0, \\ -x, & 若\ x<0。\end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y，有以下的不等式成立：

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|。$$

4° 上确界和下确界　設 $X=\{x\}$ 为实数的有界集合。若：

(1)每一个 $x\in X$② 滿足不等式

$$x\geqslant m;$$

---

① 以后若沒有相反的附带說明，数这个字我們将理解为实数。

② 符号 $x\in X$ 表示 x 属于集合 X。

(2)对于任何的 $\varepsilon>0$, 存在有 $x'\in X$, 使

$$x'<m+\varepsilon,$$

则数 $m=\inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界。

同样,若:

(1)每一个 $x\in X$ 满足不等式

$$x\leqslant M,$$

(2)对于任何的 $\varepsilon>0$, 存在有 $x''\in X$, 使

$$x''>M-\varepsilon,$$

则数 $M=\sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界。

若集合 X 下方无界,则通常說

$$\inf\{x\}=-\infty;$$

若集合 X 上方无界,则认为

$$\sup\{x\}=+\infty。$$

5° 絕对誤差和相对誤差　設 $a(a\neq 0)$ 是被测的量的准确数值,而 x 是这个量的近似值,则

$$\varDelta=|x-a|$$

称为絕对誤差,而

$$\delta=\frac{\varDelta}{|a|}$$

称为被测的量的相对誤差。

假若 x 的絕对誤差不超过它的第 n 个有效数字的单位的一半,则說 x 有 n 位准确的数字。

利用数学归納法求証下列等式对任何自然数 n 皆成立:

1. $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$。

2. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

3. $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$。

4. $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$。

5. 設 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{[0]}=1$。求証

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个的組合数，由此推出牛頓的二項式公式。

6. 証明貝努里不等式：

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数。

7. 証明若 $x>-1$，則不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx \quad (n>1)$$

为眞，且仅当 $x=0$ 时，等号成立。

8. 証明不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad 当\ n>1。$$

提示　利用不等式

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2 \quad (n=1, 2, \cdots)。$$

9. 証明不等式

$$2!\cdot 4!\cdots(2n)!>[(n+1)!]^n \quad 当\ n>1。$$

10. 証明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}。$$

11. 設 c 为正整数，而不为整数的平方，且 A/B 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割，其中 B 类包含所有合于 $b^2>c$ 的正有理数 b，而 A 类包含所有其余的有理数。求証在 A 类中无最大数，而在 B 类中也无最小数。

12. 确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法来作成：A 类包含所有的有理数 a，而 $a^3<2$；B 类包含所有其余的有理数。証明在 A 类中无最大数，而在 B 类中亦无最小数。

13. 作出适当的分割，然后証明等式：

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$;

(б) $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$。

14. 建立确定数 $2^{\sqrt{2}}$ 的分割。

15. 求証任何非空且下方有界的数集有下确界，而任何非空且上方有界的数集有上确界。

16. 証明一切有理眞分式 $\frac{m}{n}$(式中 m 及 n 为自然数，且 $0<m<n$)的集合无最小及最大的元素。幷求集合的上确界及下确界。

17. 有理数 r 滿足不等式

$$r^2<2,$$

求这些有理数 r 所成集合的下确界和上确界。

18. 設 $\{-x\}$ 为数的集合，这些数是与 $x\in\{x\}$ 符号相反的数。証明

(a) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$； (б) $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$。

19. 設 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 这些和的集合，其中 $x\in\{x\}$ 及 $y\in\{y\}$，証明等式：

(a) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$；

(б) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$。

20. 設 $\{xy\}$ 为所有 xy 乘积的集合，其中 $x\in\{x\}$ 及 $y\in\{y\}$，且 $x\geqslant0$ 及 $y\geqslant0$。証明等式：

(a) $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}$； (б) $\sup\{xy\}=\sup\{x\}\sup\{y\}$。

21. 求証不等式：

(a) $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$；

(б) $|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$。

解不等式：

22. $|x+1|<0.01$。 **23**. $|x-2|\geqslant10$。

24. $|x|>|x+1|$。 **25**. $|2x-1|<|x-1|$。

26. $|x+2|+|x-2|\leqslant12$。 **27**. $|x+2|-|x|>1$。

28. $\big||x+1|-|x-1|\big|<1$。 **29.** $|x(1-x)|<0.05$。

30. 証明恒等式

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2。$$

31. 当测量长度 10 厘米时，絕对誤差为 0.5 毫米；当测量距离 500 千米时，絕对誤差等于 200 米。那种测量較为精确？

32. 設数

$$x=2.3752$$

的相对誤差为 1%，試求此数包含若干位准确数字？

33. 数

$$x=12.125$$

包含 3 位准确数字。試求此数的相对誤差？

34. 矩形的边等于：

$$x=2.50\text{ 厘米 }\pm 0.01\text{ 厘米},$$

$$y=4.00\text{ 厘米 }\pm 0.02\text{ 厘米}。$$

这个矩形的面积 S 界于甚么范圍內？設其边长取平均值时，矩形面积的絕对誤差 Δ 和相对誤差 δ 为何？

35. 物体的重量 $P=12.59$ 克 ± 0.01 克，其体积 $v=3.2$ 厘米^3 ± 0.2 厘米^3。若对物体的重量和体积都取其平均值，試求物体的比重，并估計比重的絕对誤差和相对誤差。

36. 圓半徑

$$r=7.2\text{ 米 }\pm 0.1\text{ 米}。$$

若取 $\pi=3.14$，則求出的圓面积的最小相对誤差为何？

37. 对直角平行六面体测得

$$x=24.7\text{ 米 }\pm 0.2\text{ 米};$$

$$y=6.5\text{ 米 }\pm 0.1\text{ 米};$$

$$z=1.2\text{ 米 }\pm 0.1\text{ 米}。$$

这个平行六面体的体积 v 界于甚么范圍內？若測量的各結果都取其平均值，則所求出平行六面体的体积可能有的絕对誤差和相对誤差为何？

38．測量正方形的边 x，此处 2 米 $<x<$ 3 米，应有多小的絕对誤差，才能使此正方形面积有可能精确到 0.001 米²？

39．假定矩形每边的长皆不超过 10 米，为了使根据測量所計算出来的面积与原面积之差不超过 0.01 平方厘米，問測量矩形的边 x 与 y 时，許可的絕对誤差 Δ 的值多大？

40．設 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 为数 x 和 y 的相对誤差，$\delta(xy)$ 为数 xy 的相对誤差。求証

$$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y)。$$

§2. 叙列的理論

1° 叙列的极限的概念 假設对于任何的 $\varepsilon>0$，有数 $N=N(\varepsilon)$，使

当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$，

則称叙列 $x_1, x_2, \cdots, x_n\cdots$ 有极限 a（或者說，收斂于 a），亦即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,$$

其中，

$$若\ \lim_{n\to\infty}x_n=0,$$

則称 x_n 为无穷小。

沒有极限的叙列，称为发散的。

2 极限存在的准則

(1) 設

$$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$$

及

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}z_n=c,$$

則

$$\lim_{n\to\infty}x_n=c。$$

(2) 单調而且有界的叙列有极限。

(3) 哥西判別法 叙列 $\{x_n\}$ 的极限存在的必要而且充足的条件是：对于

任何的 $\varepsilon>0$, 有数 $N=N(\varepsilon)$ 使当 $n>N$ 和 $P>0$ 时 $|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon$。

3° 关于叙列的极限的基本定理 設

$$\lim_{n\to\infty} x_n \quad 和 \quad \lim_{n\to\infty} y_n$$

存在,则有:

(1) 若 $x_n\leqslant y_n$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

(2) $$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n\pm\lim_{n\to\infty} y_n;$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n;$$

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n\neq 0$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$。

4° 数 e 叙列

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1, 2, \cdots)$$

有确定的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2.7182818284\cdots$$

5° 无穷极限 符号

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$$

表示对于任何的 $E>0$, 有数 $N=N(E)$, 使

$$当\ n>N\ 时, \quad |x_n|>E。$$

6° 聚点 設已知叙列 $x_n(n=1, 2, \cdots)$ 有子叙列

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \cdots, x_{p_n}, \cdots$$

适合

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n}=\xi,$$

则称数 ξ (或符号 ∞)为已知叙列 $x_n(n=1, 2, \cdots)$ 的聚点。

一切有界的叙列至少有一个有穷的聚点(波尔查諾-外尔斯特拉斯原理)。若这个聚点是唯一的,則它即为已知叙列的有穷极限。

叙列 x_n 的最小聚点(有穷的或无穷的)

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n$$

称为下极限，而它的最大聚点

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

称为此叙列的上极限。

等式

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

为叙列 x_n 的(有穷或无穷)极限存在的必要而且充分的条件。

41. 設

$$x_n=\frac{n}{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

証明

$$\lim_{n\to\infty} x_n=1,$$

即：对于任一个給定的 $\varepsilon>0$，求数 $N=N(\varepsilon)$ 使得

$$\text{在 } n>N \text{ 时，} \quad |x_n-1|<\varepsilon。$$

填下表：

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	……
N					

42. 假若

(a) $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$； (б) $x_n=\frac{2n}{n^3+1}$；

(в) $x_n=\frac{1}{n!}$； (г) $x_n=(-1)^n\cdot 0.999^n$，

对于任何的 $\varepsilon>0$，求出数 $N=N(\varepsilon)$，使

$$\text{当 } n>N \text{ 时，} \quad |x_n|<\varepsilon;$$

而証明 $x_n (n=1,\ 2,\ \cdots)$ 为无穷小(就是說，有极限值为 0)。

对应着上面四种情形，填下表：

ε	0.1	0.01	0.001	……
N				

43. 証明叙列

(a) $x_n=(-1)^n n$, (б) $x_n=2^{\sqrt{n}}$, (в) $x_n=\lg(\lg n)$ $(n\geqslant 2)$
当 $n\to\infty$ 时,有无穷极限(即成为无穷大),即:对任意的 $E>0$, 求数 $N=N(E)$, 使

$$\text{当 } n>N \text{ 时,} \quad |x_n|>E。$$

对应着上面的每一种情形填下表:

E	10	100	1000	10000	……
N					

44. 求証

$$x_n=n^{(-1)^n} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

无界,但当 $n\to\infty$ 时,它并不成为无穷大。

45. 用不等式表示下列各式:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$; (б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$; (в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$。

設 n 跑过自然数列,求下列各式之值:

46. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10000n}{n^2+1}$。

47. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$。

48. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$。

49. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$。

50. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$ $(|a|<1, |b|<1)$。

51. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$。

52. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$。

53. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right]$。

54. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$。

55. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$。

56. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$。

57. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$。

証明下列等式:

58. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$。

59. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$。

60. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0(a>1)$。

61. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$。

62. $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$,若$|q|<1$。

63. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$。

64. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0(a>1)$。

65. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

66. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$。

67. 当n充分大时,下面的式子那个大些:

(a) $100n+200$ 或 $0.01n^2$?　　(б) 2^n 或 n^{1000}?

(в) 1000^n 或 $n!$?

68. 証明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0。$$

提示　参閱題10。

69. 証明叙列

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

是单調增的,且上方有界。而叙列

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

是单調减的,且下方有界。由此推出这些叙列有公共的极限:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e。$$

提示 先作出比 $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\frac{y_n}{y_{n-1}}$ 并利用題7的不等式。

70. 証明

$$0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n} \quad (n=1, 2, \cdots)。$$

当指数 n 是甚么样的数值时，表示式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 之差小于 0.001?

71. 設 p_n $(n=1, 2, \cdots)$ 为趋于 $+\infty$ 的任意数列，而 q_n $(n=1, 2, \cdots)$ 为趋于 $-\infty$ 的任意数列。求証

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=e。$$

72. 已知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

求証 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e。$$

由此推出公式

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n},$$

其中 $0<\theta_n<1$, 并計算数 e 准确到 10^{-5}。

73. 証明数 e 为无理数。

74. 証明不等式

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n。$$

75. 証明不等式

(a) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$,

式中 n 为任意的自然数。

(б) $1+a<e^a$,

其中 a 为异于零的实数。