21

21世纪大学课程辅导丛书

概率统计

学习指导 典型题解

新版

吴云江 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

21世纪大学课程辅导丛书

概率统计

学习指导 典型题解

新版

吴云江 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书按工学、医学、经济学各专业的本科教学和硕士研究生入学考试的大纲，精选了一批有代表性的和可开拓思路的概率统计题目(也包括基本训练的题目)，每题除详尽的解答外，全部配有注释(对题目的说明，解题易犯的错误等)，相当于与读者的"交谈"。各章有精练的基本知识提要(便于读者查阅)和自测练习题。本书可供考研和本、专科学习概率统计的学生做解题训练和学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率统计学习指导典型题解/吴云江编著. 一新版. 一西安:西安交通大学出版社,2008.9
(21世纪大学课程辅导丛书)
ISBN 978-7-5605-1626-4

Ⅰ.概… Ⅱ.吴… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第132942号

书　　名 概率统计学习指导典型题解
编　　著 吴云江
责任编辑 叶　涛

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号　邮政编码710049)
网　　址 http://www.xjtupress.com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 西安市新城区兴庆印刷厂

开　　本 787mm×1092mm　1/16　**印张** 10.125　**字数** 241千字
版次印次 2008年9月新版　2008年9月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5605-1626-4/O·192
定　　价 14.00元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248　(029)82665249
投稿热线:(029)82664954
读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

丛书总序

“21世纪大学课程辅导丛书”第一版出版已有十年时间，几经再版，深受广大读者的喜爱。为了满足读者朋友的需要，也为了适应高等教育改革的形势和新的教学要求，我们组织作者对本丛书进行了修订，以全新的面貌奉献给大家。

我们出版这套丛书的目的就是为普通高等学校理工类专业的大学生提供一流的学习资源，使大家共享一流教师的教学经验和教学成果，更好地学习、掌握基础课和专业基础课知识，为今后的学习和深造打下良好的基础。

西安交通大学是国内仅有的几所具有百年历史的高等学府，是首批进入国家“211工程”建设的七所大学之一，1999年被国家确定为中西部地区惟一一所以建设世界知名高水平大学为目标的学校。西安交大历来重视本科生教学，1996年成为全国首家本科教学评估为优秀的大学。学校拥有国家级、省部级、校级教学名师数十名，具有丰富的、一流的教学资源。

本丛书由西安交通大学长期在教学一线主讲的教授、副教授主编，他们具有丰富的基础课、专业基础课教学和辅导经验。丛书作者们在长期的教学实践中，深深了解学生在学习基础课、专业基础课时的难点和困惑点之所在，对如何使学生更有效地学习、掌握课程的基本知识和解题技巧进行了深入的探索和研究，并将成果体现于书中。

本丛书以普通高等学校的学生为主要对象，不拘泥于某一本教材，而是将有特色和使用量较大的各种版本的教材加以归纳总结，取其精华，自成一体。书中对课程的基本内容、研究对象、教学要求、学习方法、解题思路等进行了全面、系统的总结和提炼，按基本知识点、重点与难点、典型题解析、自我检测题等环节进行编排；书后附录了自我检测题参考答案和近年来一些院校的期末考试题、考研试题及相应题解。本丛书的指导思想是帮助学生理清学习思路，总结并掌握各章节的要点；通过各类精选题的剖析、求解和示范，分析解题思路，示范解题过程，总结方法要略，展示题型变化；达到扩展知识视野，启迪创新思维，促进能力提高的目的。

本丛书既可以单独使用，也可以与其他教材配合使用；既可以作为课程学习时的同步自学辅导教材，也可以作为考研复习时的主要参考资料。

我们衷心希望本丛书成为您大学基础课和专业基础课学习阶段的良师益友，帮助您克服困难，进入大学学习的自由王国；也希望在考研冲刺时本丛书能助您一臂之力，使您一举成功！

在学习使用过程中，您如果发现书中有不妥之处或有好的建议，敬请批评指正并反馈给我们，我们一定会进一步改进自己的工作，力争使您满意。

真诚感谢您使用西安交大版图书。

西安交大出版社网址： http://press.xjtu.edu.cn/
理工医事业部网址： http://lgny.xjtupress.com/
理工医事业部信箱： jdlgy@yahoo.cn

西安交通大学出版社
2008年6月

前　言

概率论(含数理统计)难学吗？有人说:“是有点难呢!”

说得有点道理。以前学高等数学(微积分),主要是“连续”的东西,线性代数又都是“离散”的东西,而概率论却既有“连续”的,又有“离散”的,有时还会碰到“既不离散又不连续”的东西,再加上“随机”的东西刚一接触容易一时找不着北,“概率密度”一时没有直观的感觉,公式又很多,好象是有点不好掌握。

其实,你如果拎起衣服的“领子”时,一件再复杂的衣服也能看清全貌。学习概率论,最好能抓住这个“衣服领子”,那就是“概率密度(只对连续型)、分布列(只对离散型)、分布函数(又对离散又对连续型,还包括既不离散又不连续型)能‘完全’描述随机变量”,掌握住它们的性质、互求公式、求概率公式,以及随机变量函数的分布的计算方法,随机变量函数的期望的计算公式,对高维的再加上边缘分布的计算公式,独立性的判别,再记住几个特殊分布(分布及期望、方差),数字特征的较简单的计算性质即可。如果站在较高的角度俯视这些内容,能看清全貌就不会觉得难了。余下的“全概率公式”等一组公式、事件的概率计算和独立性都是不难掌握的内容,极限定理中主要看中心极限定理的典型题,数理统计除基本概念外,大致只有三块内容:抽样分布(记住三个特殊分布的构成加一个定理)、点估计(最大似然估计的方法较为固定)、区间估计和假设检验(了解思想方法或套公式),总体一看,不算难了吧？

本书按概率统计的章节,精选了一批典型的题目,有基本练习题,也有一些有一定难度的题,包括一些考研题,内容相近但有区别、易混淆的题。对解题手法相同或相近的题一般不重复选,偏容易的“送分”题也尽量少选。各章有基本要求、基本内容提要和难点、重点归纳,帮助同学复习基本知识。每题后有注释是本书的特点,分析解题的关键处、初学者易犯的错误以及关于此题的一些说明,相当于读者与作者间进行“交谈”或交流,对于解题后愿意多做思考的读者,必会有所帮助。

本书数理统计部分采用“上侧”分位数,注意与下侧分位数的书相区别。

本书难免有不足之处,欢迎广大读者批评指正。

编者

2008 年 8 月

目录

第 1 章　随机事件与概率

1.1　基本要求

1. 了解随机事件的定义和基本的关系、运算.
2. 知道概率空间和概率的公理化定义、统计学定义.
3. 理解、掌握概率的性质.
4. 会计算古典概率和几何概率.
5. 理解条件概率,掌握乘法公式、全概率公式和 Bayes(贝叶斯) 公式.
6. 理解事件的独立性的定义,掌握独立性的应用和贝努里概型.

1.2　基本内容提要

1. 随机事件(可简称“事件”) 是指在一次试验中可能发生也可能不发生的事件,如抛硬币一次 ——(随机) 试验,而“出现正面”——(随机) 事件. 试验中必然发生的事件(称为“必然事件”,记为 Ω) 和不可能发生的事件(称为“不可能事件”,记为 $\varnothing$) 可以看成特殊的随机事件.

2. 若事件 A 发生必导致事件 B 发生,称 B 包含 A,记作 $A \subset B$.

若事件 A、B 至少一个发生(即 A 或 B 发生),称 A 并 B 发生,记作 $A \cup B$(有的书上记成 $A + B$).

若事件 A、B 都发生,称 A 交 B 发生,记作 $A \cap B$ 或 AB.

若事件 A 发生而 B 不发生,称 A 减 B 发生,记作 $A - B$(这种事件称为差事件).

若事件 A 不发生,称 A 的对立事件(或称补事件) 发生,记作 $\overline{A}$.

若事件 A、B 有关系:$AB = \varnothing$(即不可能同时发生),称 A 与 B 互不相容(有时称为互斥).

若事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足:(1) $\forall\, i, j = 1, 2, \cdots, n, i \neq j$ 时,有 $A_iA_j = \varnothing$(即 $A_1, \cdots, A_n$ 中任意两个不相容);(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. 则称事件组 $A_1, \cdots, A_n$ 为互不相容完备事件组.

3. 事件的并、交运算具有我们熟悉的交换律、结合律和相互间的分配律. 如 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这 n 个事件至少发生一个,而 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1A_2\cdots A_n$ 表示它们都发生.

常见的运算式有:$A\overline{B} = A - B = A - AB$ 及 $\overline{\bigcup\limits_{i} A_i} = \bigcap\limits_{i} \overline{A}_i$,$\overline{\bigcap\limits_{i} A_i} = \bigcup\limits_{i} \overline{A}_i$(此为对偶律,又称为德·摩根原则. 记忆口诀:长杠变短杠,开口换方向)

其他的关系和运算较简单,不再详细列举,如:① 如果 $A \subset B$,则 $\overline{A} \supset \overline{B}$,$AB = A$,$A \cup B = B$;② 若 $AB = \varnothing$,则$(AC)(BD) = \varnothing$;③$AB \subset A \subset (A \cup B)$;④$A \subset \Omega$,$\varnothing \subset A$;⑤$\overline{\Omega} = \varnothing$,$\overline{\varnothing} = \Omega$ 等等.

4. Ω 可称为样本空间，Ω 中所含的元素可称作样本点. 重复大量试验时，某一事件 A 所发生的频率有一个"稳定值"，这个稳定值即是 A 的概率，记作 $P(A)$. 这是概率的统计学定义.

5. 概率的性质：

(1)$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；(可见概率是一个数)

(2)$P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$；(注意其逆非真，如 $P(A) = 0$ 不能推出 $A = \varnothing$)

(3) 若 $AB = \varnothing$，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$；(此结论可推广到任意多个，如 $A_1, \cdots, A_n$ 两两不相容，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$)

(另注：$P(A) \geqslant 0$ 称"非负性"；$P(\Omega) = 1$ 称"规范性"；若 $A_1, A_2, \cdots$ 两两不相容，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ 称"可列可加性"，这三条是概率的公理化定义)

(4)$P(A) + P(\bar{A}) = 1$

(5) 若 $A \subset B$，则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$.(这种 $B - A$ 称"真差")同时有 $P(A) \leqslant P(B)$.

(6)$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.(此性质可推广到 n 个，即 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i<j} P(A_iA_j) + \sum\limits_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1A_2\cdots A_n)$.)

6. 已知事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率称为条件概率，记作 $P(B|A)$，$(P(A) > 0)$. $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

乘法公式：$P(AB) = P(A)P(B|A)$.

全概率公式：设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为互不相容完备事件组，则 $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$

Bayes 公式：设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为互不相容完备事件组，则

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

7. 古典概率：$P(A) = \dfrac{k}{n}$，其中 n 为基本结果的总个数(即 Ω 中所含的"样本点"——可理解为基本结果——的个数)，k 为事件 A 所含的样本点的个数.

几何概率：$P(A) = \dfrac{A\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}}$. 测度在此处可理解为：一维时指长度，二维时指面积，三维时指体积.

8. 抽签原理：在抽签模型中(随机、依次、不放回)，抽到某签的概率与先后次序无关.

9. 若 $P(AB) = P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立，实际意义为 A 与 B 互不影响，这里 $\bar{A}$ 与 B 也独立.

对三个事件 A、B、C 而言，若 $P(AB) = P(A)P(B)$，$P(AC) = P(A)P(C)$，$P(BC) = P(B)P(C)$，$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 都成立，则称 A、B、C 相互独立(只有前三个式子成立时称"两两独立"). 可类推到 n 个事件的相互独立的定义上.

10. 贝努利概型：做 n 次独立重复试验，每次只有两个结果：A 与 $\bar{A}$，每次试验中 A 发生的

概率均为 p,则这 n 次试验中 A 共发生 k 次的概率为:$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

1.3 重点与难点

1. 利用概率的第(4)、(5)、(6) 条性质进行概率的基本运算(这类题常出成填空题).

2. 根据题目所给的背景,将有关的事件用字母表示,然后用乘法公式、全概率公式、Bayes 公式计算相应的概率.

3. 利用题目背景所给的独立性计算概率,判断是否属贝努利概型并计算概率.

1.4 典型题解析

1-1 设 A、B、C 为事件,试用 A、B、C 的运算来表示下列事件:(1) 仅 A 发生;(2)A、B、C 都发生;(3)A、B、C 都不发生;(4)A、B、C 至少一个发生;(5)A、B、C 恰好一个发生;(6)A 不发生,而 B、C 至少一个发生;(7)A、B、C 中不多于一个发生;(8)A、B、C 中至少两个发生;(9)A、B、C 中不多于两个发生;(10)A、B、C 中恰有两个发生.

解

(1) 仅 A 发生:$A\bar{B}\bar{C}$(或 $A-B-C$)

(2)A、B、C 都发生:ABC

(3)A、B、C 都不发生:$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

(4)A、B、C 至少一个发生:$A\cup B\cup C$

(5)A、B、C 恰好一个发生:$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$

(6)A 不发生,而 B、C 至少一个发生:$\bar{A}(B\cup C)$

(7)A、B、C 中不多于一个发生:$\overline{AB\cup AC\cup BC}$

(或表示为:$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$)

(8)A、B、C 中至少两个发生:$AB\cup AC\cup BC$(或表示为:$AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC$)

(9)A、B、C 中不多于两个发生:$\overline{ABC}$(或表示为 $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$,也可表示为:$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$,说法还可以是"$A$、$B$、$C$ 不都发生",请与(3) 区别)

(10)A、B、C 中恰有两个发生:$AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$

注释 事件描述时要盯清每一个字,有时差一个字意思会相差相大.如(1) 改为"A 发生",则应表示为:A 即可,而多一"仅"字,意思差别很大.

1-2 (选择)电炉上安装了 4 个温控器,其显示温度的误差是随机的.在使用中,只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0,电炉就断电.以 E 表示"电炉断电",而 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值,则 $E=(\quad)$.

(a) $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$ (b) $\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$ (c) $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$ (d) $\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$

解 应选(c).它们之间的关系是

$$\{T_{(1)}\geqslant t_0\}\supset\{T_{(2)}\geqslant t_0\}\supset\{T_{(3)}\geqslant t_0\}=E\supset\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$$

注释　事件间的相等如“$A=B$”要求“$A\subset B$”且“$A\supset B$”，对有实际背景的题目一定要注意验证两个式子都成立.

1-3　（填空）设 A、B 为二事件，则 $P\{(A\cup B)(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})\}=$ ____.

解　应填0.因为:

$$\begin{aligned}(A\cup B)(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})&=(A\cup A\bar{B}\cup AB\cup B\bar{B})(\bar{A}\cup\bar{A}\bar{B}\cup\bar{A}B\cup B\bar{B})\\&=A\bar{A}=\varnothing\end{aligned}$$

注释　事件间的“并”、“交”运算具有交换、结合、分配律，因此运算可以像多项式相乘一样(像$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$一样)，这种题目不难，要熟练，做题不能太慢.

1-4　对事件 A、B，已知 $P(\bar{A}\cup B)=0.75$，$P(\bar{A}\cup\bar{B})=0.8$，$P(B)=0.3$，求 $P(A)$，$P(AB)$，$P(A\bar{B})$，$P(A-B)$，$P(B-A)$，$P(A\cup\bar{B})$.

解　$0.8=P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(AB)$，所以 $P(AB)=0.2$

$$\begin{aligned}0.75=P(\bar{A}\cup B)&=1-P(\overline{\bar{A}\cup B})=1-P(A\bar{B})=1-P(A-B)\\&=1-[P(A)-P(AB)]\end{aligned}$$

所以 $P(A)=1-0.75+P(AB)=0.25+0.2=0.45$

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\bar{B})&=1-P(\overline{\bar{A}\bar{B}})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\\&=1-(0.45+0.3-0.2)=0.45\end{aligned}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.45-0.2=0.25$$

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.3-0.2=0.1$$

$$P(A\cup\bar{B})=1-P(\overline{A\cup\bar{B}})=1-P(\bar{A}B)=1-P(B-A)=1-0.1=0.9$$

注释　这是一类较常见的基本题.(1)$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)$ 应熟悉(注意概率的性质(5))，切勿 $P(A-B)=P(A)-P(B)$!(2) 对两个事件 A、B 的求概率题目，建议思路为:想法先求出 $P(A)$、$P(B)$ 和 $P(AB)$ 这三个基本量.

1-5　已知 $P(\bar{B}|A)=\dfrac{1}{3}$，$P(B|\bar{A})=\dfrac{4}{7}$，$P(AB)=\dfrac{1}{5}$，求 $P(A)$、$P(B)$.

解　$\dfrac{1}{3}=P(\bar{B}|A)=\dfrac{P(A\bar{B})}{P(A)}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{P(A)}$

所以 $P(A)=3P(A)-3P(AB)=3P(A)-\dfrac{3}{5}$，故 $P(A)=\dfrac{3}{10}$.

$$\frac{4}{7}=P(B|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\frac{P(B)-\frac{1}{5}}{1-\frac{3}{10}}，得\ P(B)=\frac{3}{5}.$$

注释　参见1-4题的注释.此题当然也可求诸如 $P(\bar{A}\bar{B})$、$P(A\cup\bar{B})$ 等.

1-6　（填空）对事件 A、B、C，已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)$

$= P(BC) = \frac{1}{16}$,则 A、B、C 都不发生的概率为____.

解 应填$\frac{3}{8}$.

因为 $ABC \subset AB$,所以 $0 \leqslant P(ABC) \leqslant P(AB) = 0$,故 $P(ABC) = 0$.

故 $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$

$= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)]$

$= 1 - [\frac{1}{4} \times 3 - 0 - \frac{1}{16} \times 2 + 0] = \frac{3}{8}$.

注释 (1)"A、B、C 都不发生"用"$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$"表示(请区分"$A$、$B$、$C$ 不都发生"表示为"$\overline{ABC}$"),注意理解.(2) 本题中 $P(ABC) = 0$ 的证法用的概率性质(5),不要这样推:"因为 $P(AB) = 0$,所以 $AB = \varnothing$,所以 $ABC = \varnothing$,…"不可!因为得不到 $AB = \varnothing$ 的结论.

1-7 (填空)设三事件 A、B、C 两两独立,且 $P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$,$P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$,$ABC = \varnothing$,则 $P(A) =$____.

解 应填$\frac{1}{4}$.

由已知,$P(AB) = P(A)P(B)$,$P(AC) = P(A)P(C)$,$P(BC) = P(B)P(C)$,

若设 $P(A) = x$,得

$\frac{9}{16} = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

$= 3P(A) - P(A)P(B) - P(A)P(C) - P(B)P(C) = 3x - 3x^2$

解得 $x = \frac{3}{4}, \frac{1}{4}$.(因为$\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$,舍去)故 $P(A) = \frac{1}{4}$

注释 $P(A \cup B \cup C)$ 的展开式是概率性质(6)的推广.

1-8 (选择)设事件 A、B 同时发生时,事件 C 必发生,则( ).

(a) $P(C) \leqslant P(A) + P(B) - 1$ (b) $P(C) \geqslant P(A) + P(B) - 1$

(c) $P(C) = P(AB)$ (c) $P(C) = P(A \cup B)$

解 应选(b).

由题意知 $AB \subset C$,所以 $P(AB) \leqslant P(C)$,故有

$1 \geqslant P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \geqslant P(A) + P(B) - P(C)$

得 $P(C) \geqslant P(A) + P(B) - 1$,即选(b).

注释 对题目给的条件勿理解成"$AB = C$".本题结论还可推广到多个如 $P(ABC) \geqslant P(A) + P(B) + P(C) - 2$.

1-9 (填空)对二事件 A、B,已知 $P(A) = 0.6$,$P(B) = 0.7$,那么 $P(AB)$ 可能取到的

最大值是____；可能取的最小值是____；$P(A \cup B)$ 可能取的最大值是____；可能取的最小值是____.

解 应依次填为：0.6；0.3；1；0.7.

因为 $AB \subset A$，所以 $P(AB) \leqslant P(A)$. 如果 $A \subset B$，则 $P(AB) = P(A)$，故 $P(AB)$ 可能取的最大值是 $P(A) = 0.6$（实际上是 $P(A)$ 与 $P(B)$ 中较小的一个）. 又：$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.6 + 0.7 - P(AB) = 1.3 - (AB)$

所以 $\quad P(AB) = 1.3 - P(A \cup B) \geqslant 1.3 - 1 = 0.3$

而当 $A \cup B = \Omega$ 时 $P(A \cup B) = 1, P(AB) = 0.3$. 即 $P(AB)$ 可能取的最小值为 0.3（实际上是 $P(A) + P(B) - 1$ 与 0 中较大的一个）.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leqslant P(A) + P(B)$，故 $P(A \cup B)$ 可能取的最大值为 $P(A) + P(B)$ 与 1 中较小的一个，本题中填 1.

因为 $A \cup B \supset B$，所以 $P(A \cup B) \geqslant P(B)$. 若 $A \subset B$，则 $P(A \cup B) = P(B)$，故 $P(A \cup B)$ 可能取的最小值为 $P(B) = 0.7$（实际上是 $P(A)$ 和 $P(B)$ 中较大的一个）.

注释 本题要考虑的是事件 A、B 间特殊的（极端的）情形，如包含、不相容（本题无法做到 A、B 不相容，因为 $P(A) + P(B) > 1$，但可考虑 $A \cup B = \Omega$）等情形.

1-10 设玻璃杯整箱出售，每箱 20 只各箱含 0、1、2 只残次品的概率分别为 0.8、0.1、0.1. 一顾客欲购买一箱玻璃杯，由售货员任取一箱，经顾客开箱随机查看 4 只，若无残次品，则买此箱玻璃杯，否则不买. 求 (1) 顾客买此箱玻璃杯的概率；(2) 在顾客买的此箱玻璃杯中，确实没有残次品的概率.

解 记 $B = \{$顾客买下此箱玻璃杯$\}$

$A_i = \{$售货员取的这箱玻璃杯中，恰有 i 只残次品$\}$ $\quad i = 0,1,2.$

则 A_0、A_1、A_2 互不相容且 $P(A_0) = 0.8, P(A_1) = P(A_2) = 0.1$

而 $\quad P(B|A_0) = 1, P(B|A_1) = \dfrac{C_{19}^4}{C_{20}^4} = \dfrac{4}{5}, P(B|A_2) = \dfrac{C_{18}^4}{C_{20}^4} = \dfrac{12}{19}.$

(1) 由全概率公式，得

$$P(B) = \sum_{i=0}^{2} P(B|A_i)P(A_i) = 0.8 \times 1 + 0.1 \times \frac{4}{5} + 0.1 \times \frac{12}{19} = 0.943$$

$$(2)P(A_0|B) = \frac{P(A_0B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_0)P(A_0)}{\sum\limits_{i=0}^{2} P(B|A_i)P(A_i)} = \frac{1 \times 0.8}{0.943} = 0.848$$

注释 此题是应用全概率公式和 Bayes 公式的较典型的题目. ① 用字母表述事件时，应是"一个事件"，不要这样设：$A_1 = \{$顾客买的这箱玻璃杯中恰有 1 只残次品$\}$（一个字母 A_1 表述了 2 个事件——一是顾客"买"这箱玻璃杯，一是"恰有 1 只残次品"——不妥），或设 $A = \{$售货员取 1 箱玻璃杯$\}$（非随机事件），你可以试一试你用字母表述的"事件"其对立事件是否易于准确描述，就知道你的描述是否合适了；② 第 2 问其实用的是 Bayes 公式，Bayes 公式可以用条件概率定义式、全概率公式和乘法公式推出，不必专门去记；③ 第 2 问问的是 $P(A_0|B)$，勿求

成$P(A_0B)$或$P(A_0)$,注意题意的理解;④ 解中A_0、A_1、A_2可视为互不相容完备事件组.

1-11 设考生的报名表来自三个地区,各有10、15、25份,其中女生表分别为3、7、5份.现随机地取一地区的报名表,从中先后抽2份报名表.求(1)先抽到的是女生表的概率p;(2)已知后抽到的是男生表,求先抽到的是女生表的概率q.

解 记$A_i=\{$取的是第i区的报名表$\}$,$i=1,2,3$.

$B_i=\{$从报名表中第i次取的是女生表$\}$,$i=1,2$.

则 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\dfrac{1}{3}$

$P(B_1|A_1)=\dfrac{3}{10}$, $P(B_1|A_2)=\dfrac{7}{15}$, $P(B_1|A_3)=\dfrac{5}{25}$

由"抽签原理"知:$P(\bar{B}_2|A_1)=\dfrac{7}{10}$, $P(\bar{B}_2|A_2)=\dfrac{8}{15}$, $P(\bar{B}_2|A_3)=\dfrac{20}{25}$

且有: $P(B_1\bar{B}_2|A_1)=\dfrac{3\times7}{10\times9}=\dfrac{7}{30}$, $P(B_1\bar{B}_2|A_2)=\dfrac{8\times7}{15\times14}=\dfrac{4}{15}$,

$P(B_1\bar{B}_2|A_3)=\dfrac{5\times20}{25\times24}=\dfrac{1}{6}$.

(1) 由全概率公式,得

$$p=P(B_1)=\sum_{i=1}^{3}P(B_1|A_i)P(A_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}$$

(2)$q=P(B_1|\bar{B}_2)=\dfrac{P(B_1\bar{B}_2)}{P(\bar{B}_2)}$

而 $$P(\bar{B}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(\bar{B}_2|A_i)P(A_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90}$$

$$P(B_1\bar{B}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(B_1\bar{B}_2|A_i)P(A_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{30}+\frac{4}{15}+\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{9}$$

故得 $q=\dfrac{2/9}{61/90}=\dfrac{20}{61}$.

注释 参见1-10题注释."抽签原理"可用在解题的过程中,如$P(\bar{B}_2|A_1)$的求法,否则要用$P(\bar{B}_2|A_1)=P(\bar{B}_2|B_1A_1)P(B_1|A_1)+P(\bar{B}_2|\bar{B}_1A_1)P(\bar{B}_2|A_1)$这种推广了的全概率公式,麻烦一些.解中如$P(B_1\bar{B}_2|A_1)=\dfrac{3\times7}{10\times9}$的求法是用古典概率做的,当然也可用$P(B_1\bar{B}_2|A_1)=P(\bar{B}_2|B_1A_1)P(B_1|A_1)$这种推广了的乘法公式做.

1-12 若将c、c、e、e、i、n、s这7个字母任意排成一行,问恰排成science的概率.

解 所求概率为$\dfrac{2\times2}{7!}=\dfrac{1}{1260}$.

注释 古典概率是一难点,但一般不作为重点看,要想熟练,需做较大量的习题.本题的解题思路可以是:袋中有7只球,分别标有这7个字母,现从袋中随机、依次、不放回地一只一只地取出球,那么第1只球有7种取法,第2只球有6种取法,依此类推,全部取出则共有7!种取法,所以分母为7!.若要构成science顺序,第1只球须是s,有1种取法;第2只球须是c,有

2 种取法(从 2 个 c 中选 1 个);第 3 只球是 i,有 1 种选法;第 4 只球是 e,有 2 种选法(2 个 e 中选 1 个);等等,后边都是 1 种选法,故共有 $2\times 2 = 4$ 种选法,此即是分子.

1-13 从 6 双不同的手套中任取 4 只,求恰有一双配对的概率.

解 所求概率为 $\dfrac{C_6^1\cdot C_5^2\cdot 4}{C_{12}^4} = \dfrac{16}{33}$.

注释 分母 C_{12}^4 易于理解.分子可理解为:先从 6 双手套中任取一双(题目要求的配对),有 C_6^1 有取法;剩下要取的 2 只必分布在两双里,从剩下的 5 双中任取 2 双,有 C_5^2 种取法;设这两双是 $A-a$ 和 $B-b$,然后从 $A-a$ 中任取 1 只(有 2 种取法),从 $B-b$ 中任取 1 只(也是 2 种取法),有 4 种取法.故共有 $C_6^1\cdot C_5^2\cdot 4$ 种取法(乘法原则),此即为分子.有人把分子算成 $C_6^1\cdot C_{10}^1\cdot C_8^1$,想法可能是:从 6 双中任取 1 双;从剩余的 10 只中任取 1 只,比如取的是 A(设剩余的 5 双是 $A-a$、$B-b$、$C-c$、$D-d$、$E-e$),那么最后 1 只从 $B-b$、$C-c$、$D-d$、$E-e$ 这 8 只中任取 1 只即可.这样不行,比如分子把 A、D 算过 2 次(因为可能先取 D,再取 A),但分母是只按一次进行计算的.

1-14 随机地掷甲、乙二骰子,求甲骰子出现的点数大于乙骰子出现的点数的概率 p.

解 由对称性,乙骰子出现的点数大于甲骰子出现的点数的概率也是 p.设甲、乙二骰子出现的点数相同的概率为 α,则有:$2p+\alpha = 1$.

而 $$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{i=1}^{6} P(\text{甲骰子出现 } i \text{ 点,乙骰子出现 } i \text{ 点})\\ &= \sum_{i=1}^{6} P(\text{甲骰子出现 } i \text{ 点})\cdot P(\text{乙骰子出现 } i \text{ 点})\\ &= \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

故 $p = \dfrac{1-\alpha}{2} = \dfrac{5}{12}$

注释 应善用对称性,这是一种技巧.

1-15 袋中有 9 白 10 红共 19 只球,从中随机取 7 只球,记 $A = \{$取的是 3 白 4 红共 7 只球$\}$,分不放回、放回,两种情形,分别求 $P(A)$.

解 不放回情形下:

$$P(A) = \frac{C_9^3 C_{10}^4}{C_{19}^7}$$

放回情形下:

$$P(A) = C_7^3\left(\frac{9}{19}\right)^3\left(\frac{10}{19}\right)^4$$

注释　不放回的情形，可归属于“超几何分布”；放回的情形为贝努利概型，可看作做7次独立重复试验，每次只有2个结果：摸出白球和摸出红球（每次都是一个一个地摸），摸出白球的概率均为$\frac{9}{19}$，套用贝努利概型即可，可归属于“二项分布”. 本题还可推广到多个，见下题.

1-16　（1-15题的推广）袋中有9白10红11黄共30只球，从中随机取12只球，记$A=$｛取的12只球为3白4红5黄｝，分不放回、放回. 在这两种情况下，分别求$P(A)$.

解　不放回情形下：

$$P(A)=\frac{C_9^3\cdot C_{10}^4\cdot C_{11}^5}{C_{30}^{12}}$$

放回情形下：

$$P(A)=C_{12}^3\left(\frac{9}{30}\right)^3 C_9^4\left(\frac{10}{30}\right)^4 C_5^5\left(\frac{11}{30}\right)^5$$

注释　读者当然可以将这个问题推广到更多个或抽象多个的情形. 其中在放回情况下$C_{12}^3C_9^4C_5^5$可以写成$\frac{12!}{3!4!5!}$，称为分组组合问题.

1-17　在区间(0,1)内任取二数，求事件：“此二数之和小于$\frac{6}{5}$”的概率.

解　将这两个数看作x和y，则(x,y)的所有可能取的值为$D=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$，即图1.1所示的正方形，其面积$S_D=1$. 而$\{(x,y)\mid x+y<\frac{6}{5}\}$与$D$的交集如图1.1的阴影部分$G$，其面积为

$$S_G=1-\frac{1}{2}\times 0.8^2=0.68$$

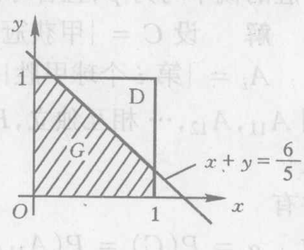

图1.1

故所求概率为：$\frac{S_G}{S_D}=0.68$.

注释　本题为几何概率题目. 题中D可称为“样本空间”，G可称为“有利样本点的集合”. 几何概率的题目可以用后面的多维随机变量的均匀分布来做.

1-18　连续地、独立地掷二骰子，求二骰子“点数之和为5”出现在“点数之和为7”之前的概率.

解　记$A_i=$｛第i次点数之和为5｝，$B_i=$｛第i次点数之和为7｝，$i=1,2,\cdots$

显然，诸A_i,A_j,B_k,B_l（在i,j,k,l都不相等时）独立，且

$P(A_i)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$，$P(B_i)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$，$A_iB_i=\varnothing$，

所以$P(\bar{A}_i\bar{B}_i)=1-P(A_i\cup B_i)=1-[P(A_i)+P(B_i)]=1-(\frac{1}{9}+\frac{1}{6})=\frac{13}{18}$，$i=1,2,\cdots$