高等学校理工科文化补习试用教材

初等数学

三角函数

北京市高等院校数学教材编写组编

人民教育出版社

初等数学
（三 角 函 数）
北京市高等院校数学教材编写组编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷四厂印装
*
1973年6月第一版 1974年6月第三次印刷
印数 500,001—840,000 册
书号13012·03 定价 0.38 元
（只供学校内部使用）

为了贯彻执行毛主席关于**“走上海机床厂从工人中培养技术人员的道路”**的指示，适应教育革命的需要，我们编写了《初等数学》作为理工科大学工农兵学员文化补习试用教材.

本书是在北京各院校文化补习教学实践的基础上编写的. 编写大纲及初稿，曾得到部分学员和教师的评审. 全书共分五册，即《初等代数》、《初等几何》、《三角函数》、《解析几何》及《公式和数表》.

编写过程中，我们试图打破书本与实践脱节、烦琐哲学的旧体系，联系三大革命的实际，突出基本规律及其辩证发展的线索，以便有助于培养学员分析问题和解决问题的能力.

本书的基本内容大体上反映了理工科各专业对初等数学的要求. 由于各专业在教学要求和文化补习安排上有所不同，学员文化程度有差别，编写时，我们注意使本书能够适应上述不同情况. 为此：

1. 列入了预备知识. 初一程度的可以从预备知识开始学习，初二、三程度的可以从基本内容的有关章节开始学习.

2. 列入了选学内容，约占全书的四分之一. 可以根据各专业教学的可能和不同的需要选用，也可供学员结合实践需要自学.

3. 基本内容中章节顺序可以适当变更. 如在《初等代数》中，变数、坐标、图象和一次、二次函数是逐步出现的，到《三角函

数》中才概括为一般函数概念．但这些内容大都是独立成节的，因此也可以集中起来学．基本内容的深度也分了层次，以便在教学中取舍．

遵照毛主席关于“**要自学**”的指示，本书在基本规律的说明和例解方面比较详细，配置了较多的练习题，基本内容中各章有小结，每册末有总结．因此，本书也可作为具有高小毕业以上文化程度的工农兵青年自学之用．

由于我们受思想水平、实践经验的局限，本书离“**教材要彻底改革**”的要求差距很大．定稿时间仓促，没有能够更广泛的征求意见，有些缺点，如篇幅还偏大，基本规律提炼不够，有的地方叙述流于琐细等问题，未能进一步解决．热烈欢迎使用本书的同志提出宝贵意见．

一九七三年六月

目 录

基本内容

选 学 内 容

基 本 内 容

第一章 函 数 概 念

从 运 动 谈 起

一列客车在京广线上飞驰，怎样了解它运行的情况呢？可以看行车时刻表：

时　　刻	19.10	0.09	4.36	12.19	18.29	7.15
离北京的路程(公里)	0	396	695	1209	1587	2324
站　　名	北京	邢台	郑州	武汉	长沙	广州

这个表告诉我们，在某些时刻列车到了什么地方，以及离北京多远，由此可以大致了解列车运行的规律.

刀架在车床的导轨上移动，物体从高处落下，活塞在汽缸里往复地运动等等，这些在工程实际中常见的运动现象，怎样从数量方面去刻划它们的运动规律呢？

先看两个具体例子.

例 1　如图 1-1，车床自动进刀时，刀架每秒移动 1.5 毫米，即移动速度是 1.5 毫米/秒，它是一个定值．要刻划刀架在导轨上移动的规律，只要指出经过任意一段时间 t，刀架移动的距离 s 是多大就成了.

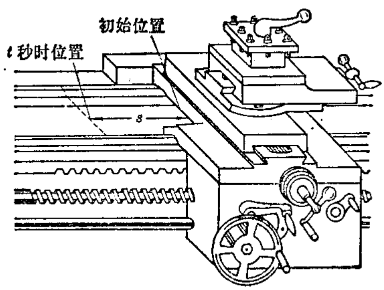


图　1-1

按所给的移动速度，容易知道，经过1秒钟，刀架移动1.5毫米；经过2秒钟，刀架移动$1.5\times 2=3$毫米；……列表来表示刀架的移动规律，得

t（秒）	0	1	2	3	4
s（毫米）	0	1.5	3	4.5	6

由上表可以看出，刀架在移动的过程中，s 和 t 可以取得各种不同的值，就是说，s 和 t 都是变量．但是，它们的变化又是互相联系的，即 s 和 t 的数值之间有确定的对应关系，数学上称 s 和 t 这两个变量之间存在函数关系．用公式表示这个关系，由所给条件知道，经过 t 秒，刀架移动的距离 s 是 $1.5\times t$，即

$$s=1.5t.$$

如上所述，s 和 t 这两个变量的函数关系（表和公式都表示这个关系），反映了刀架移动的规律．所以说，要从数量方面了解运动规律，就是要掌握 s 和 t 这两个变量之间的函数关系．

例2　如图1-2，物体从高处落下，设开始时速度是0，越下落速度越大．要刻划物体下落的运动规律，就要指明经过任意一段时间t，物体下落的路程 s 是多少．经过实验知道，如果忽略空气阻力，可得 s 和 t 的数值对应表：

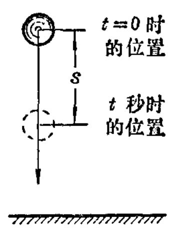


图　1-2

t（秒）	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
s（米）	0	1.225	4.9	11.025	19.6	30.625	44.1

这个表表示了变量 s 和 t 之间的函数关系，反映了物体下落的运动规律．在实验的基础上，用微积分方法还可以导出表示 s 和 t 相互关系的公式是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

式中 $g=9.8$ 米/秒^2，它的意义是物体下落的加速度，叫做重力加速度．这个公式同样地反映了物体下落的运动规律．

上面的例子都是讲的物体作直线运动的情形．从分析中看到，研究直线运动的规律要抓住两个变量，一个是路程 s，一个是时间 t．要从数量方面了解物体运动的规律，基本的问题是掌握路程和时间之间的函数关系．

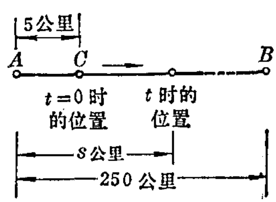
例 1 说的是等速运动，即物体运动的速度是不变的，路程 s 可以用时间 t 的一次代数式表示出来．

例 2 是一种等加速运动，即物体运动的速度是变的，但加速度不变，路程 s 可以用时间 t 的二次代数式表示出来．

工程实际中，周期运动是常见的（如活塞在汽缸里往复运动）．刻划这类运动规律的函数关系，比例 1、例 2 的函数关系要复杂一些．本书中心问题就是讨论反映周期运动规律的三角函数．为此，首先要对函数概念有一个明确的理解．这就是本章的目的所在．

练　　习

1. 一列火车从离开 A 站 5 公里的 C 处，以 50 公里/小时的速度开往 B 站，如图所示．火车离开 A 站的距离以 s 表示，时间以 t 表示．



（第 1 题）

(1) 填出下表中 s 的值．

t（小时）	0	1	1.5	2	2.5
s（公里）					

(2) 用公式表示 s 和 t 的函数关系．

(3) 从 C 处到 B 站要用多少时间？

2. 物体从离地面高度为 122.5 米处自由落下，经过 t 秒，物体的高度 h 是多少？经过几秒钟，物体落到地面上？

函数概念

上面谈到的物体的机械运动，是一种最简单的运动形式. 在研究自然现象和工程技术问题中，还会遇到各种性质极不相同的运动形式，如热的、电的、化学的运动等等，这就要研究各种各样的变化过程. 为了从数量方面刻划这些变化过程的规律，和前面讨论机械运动的情形类似，同样需要研究有关变量之间的函数关系.

我们再看几个例子，以便更全面地理解数学上的函数概念.

例 1 气象站用自动记录仪，记录某一天的气温变化情况，得到一条曲线，如图 1-3.

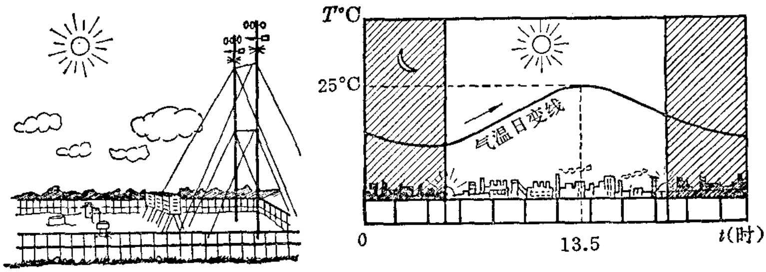


图 1-3

这条曲线表示了气温 T 随时间 t 变化的规律. 从图上可以查出这天内每个时刻 t 对应的气温 T 的数值，如 $t=13.5$ 时，对应的 $T=25°C$. t 变化，T 也变化，曲线刻划了它们所取数值之间的对应关系，即 T 和 t 之间的函数关系. 这个函数关系反映了气温变化的规律.

例 2 为了掌握弹簧的性能，就要研究弹簧挂上重物后伸长多少.

如图 1-4，设弹簧下挂重物 P 公斤，伸长量为 δ 厘米，做试验得到一组数据如表：

P(公斤)	0	1	1.5	2	2.5	……	10
δ(厘米)	0	0.8	1.2	1.6	2.0	……	8.0

设弹簧允许挂的最大重量是10公斤．从表中可知，P在0到10的范围内的每个值，δ都有确定的对应值；P一改变，δ也相应地变．就是说，δ和P有函数关系．由实验数据可知，P每增加1公斤，伸长量δ增加0.8厘米，$\frac{\delta}{P}$恒等于0.8，即

$$\delta=0.8P.$$

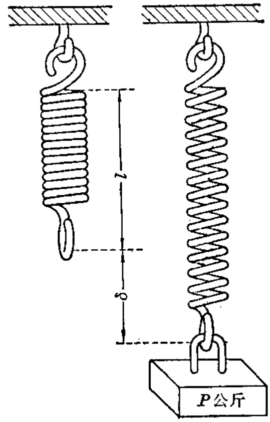


图 1-4

这个公式更清楚地表示了δ和P两个变量之间的函数关系．这个例子说明，研究弹簧的伸长规律，就要掌握δ和P之间的函数关系．

讨论以上各种变化规律，最终都引导到研究变量之间的函数关系问题．虽然各个例子的具体意义不同，但从数量方面进行抽象，它们的共同点是：在这些变化规律中都有两个变量，它们同时变化又互相联系，其中一个变量取定某个数值，按照一定的对应规律，另一个变量有确定的对应值；一个变量变化了，另一个变量按照一定的对应规律，也相应地变化．

这样，我们可以给出函数概念的一般定义：

定义 在某个变化过程中，有两个变量x和y，如果x变化时，y按一定的关系同时变化，从数值上看，对于x在它的变化范围内的每一个数值，y按一定的对应规律取得确定的对应值，这时称y是x的函数．x叫做自变量，y叫做因变量．

在例1中，T是t的函数．这个函数关系是用曲线表示出

来的. 自变量 t 的变化范围是 $0\leqslant t\leqslant 24$(小时).

在例 2 中, δ 是 P 的函数. 这个函数关系是用表格或公式表示出来的. 自变量 P 的变化范围是 $0\leqslant P\leqslant 10$(公斤).

一般地说, "y 是 x 的函数" 这句话, 可以用简单符号 "$y=f(x)$" 来表示, f 是英文 function(函数)的第一个字母. 在 $y=f(x)$ 中, "f"表示 x 和 y 之间的对应关系. 如例 1 中, t 和 T 的对应关系是用曲线表示的(见图), 可以记作 $T=f(t)$. f 表示 t 和 T 之间的对应关系, 不是 T 等于 f 乘 t 的意思. 如 $t=13.5$ 时, T 的对应值可以记作 $f(13.5)=25$(°C), 叫做函数 $T=f(t)$ 在 $t=13.5$ 处的值.

不同的函数关系, 对应规律不同, 可以用不同的符号来表示. 如例 2 中, 可以记作 $\delta=F(P)$, 这里 $F(P)=0.8P$, "F"表示由 P 计算 δ 的规律是 P 乘 0.8 得 δ. 这个函数在 $P=2.5$ (公斤)处的值, 就是 $F(2.5)=0.8\times 2.5=2$(厘米).

在《初等代数》和《初等几何》中遇到的许多数量关系, 都可以用函数的观点重新认识. 例如:

(1) 平方表给出了任何一个数 N 平方的结果是 y, 即

$$y=N^2.$$

这说明 y 是 N 的函数.

(2) 半径是 R 的圆(图 1-5) 中, 弧长 l 和圆心角 α 之间的关系是

$$l=R\cdot\alpha. \qquad (\alpha \text{ 的单位是弧度})$$

半径 R 固定时, α 变, l 也随着变, l 是 α 的函数. 这时 $\frac{l}{\alpha}=R$ 是常数, 叫做 l 和 α 成正比, 或叫做 l 是 α 的正比函数.

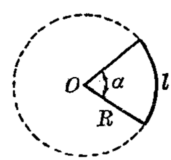


图 1-5

如果让弧长 l 固定(图 1-6), 那么 R 变, α 也随着变, α 是

R 的函数．这时 $R\cdot\alpha=l$ 是常数，$\alpha=\frac{l}{R}$，叫做 α 和 R 成反比，或叫做 α 是 R 的反比函数．

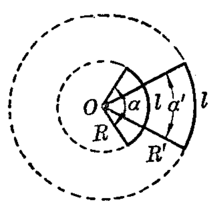


图 1-6

(3) 一个二元一次方程 $2x-y=3$，有无限多组解，给 x 以不同的值，从方程中可以得出 y 的对应值，它们的关系是 $y=2x-3$．所以在这个二元一次方程中，y 是 x 的函数．

这个函数关系，也可以用方程的图象——直线表示，如图1-7．因为 y 是用 x 的一次式表示的，它的图象是直线，所以称 y 是 x 的线性函数或一次函数．

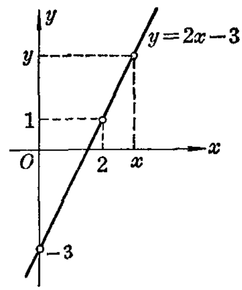


图 1-7

(4) 半径是 R 的圆，它的面积 $A=\pi R^2$，R 变，A 也随着变，所以 A 是 R 的函数．由于 A 是用 R 的二次式表示的，这个函数叫做二次函数．

(5) 以 α 为一个锐角的直角三角形中，设对边为 y，斜边为 1，那么

$$y=\sin\alpha.$$

当 α 变化时，y 也随着变(图 1-8)．因此，y 是 α 的函数．但由于 α 是锐角，不能超过 90°，这个函数叫做锐角的正弦函数．在第二章中，我们将摆脱直角三角形的“束缚”，把正弦函数推广到任意角的情形．

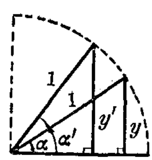


图 1-8

以上所举函数，或用表格表示，或用图形表示，或用公式表示，这些都是表示函数的最常用的方法．

小结一下，以上用公式表示的函数，可归纳为以下几种类型.

正比函数：$y=kx$（k是常数，叫做比例系数），x扩大几倍，y也扩大几倍.

反比函数：$y=\frac{k}{x}$（k是常数），x扩大几倍，y就缩小几倍.

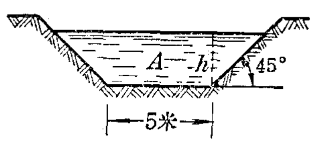
一次函数：$y=kx+b$（k、b都是常数，$k\neq0$）.

二次函数：$y=ax^2+bx+c$（a、b、c都是常数，$a\neq0$）.

锐角的正弦函数：$y=\sin x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

练　　习

1. 你曾看到过哪些用表格表示的函数？
2. 用公式表示下列函数关系：
   (1) 正方形面积A是边长a的函数；
   (2) 当三角形高h一定时，面积A是底边x的函数；
   (3) 当矩形面积一定时，高h是底x的函数；
   (4) 半径R一定时，圆内弦长p是它所对圆心角α的函数.
3. 一个钢球在0°C时体积是100立方厘米，温度T每增加1°C，体积V增加0.057立方厘米，V是T的函数$V=f(T)$. 试用公式表示$V=f(T)$. 求$f(200)$的值. 说明符号$f(200)$的意义.
4. 一水渠断面是等腰梯形（如图），过水面积A是水深h的函数. 试用公式表示这个函数. $f(3.5)=$？说明符号$f(3.5)$的意义.



（第4题）

5. 求下列各函数的值：
   (1) $y=f(x)=x^3+3x+1$, $f(0)=$？ $f(-1)=$？ $f(-2)=$？
   (2) $y=F(x)=\frac{2x+1}{x-2}$, $F(0)=$？ $F\left(\frac{1}{2}\right)=$？ $F(1)=$？ $F(-1)=$？
6. 下列函数关系中，哪些是正比函数？哪些是反比函数？
   (1) 物体作等速直线运动，速度一定，路程s是时间t的函数；

(2) 物体从A点等速运动到B点，A、B之间距离一定，从A到B所用的时间t是速度v的函数；

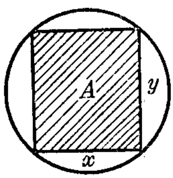
(3) 比重一定时，物体的重量P是体积V的函数.

7. 加工一批零件，先用10分钟做准备工作，然后每加工一个零件用15分钟. 写出零件产量y(件)和工作时间t(分钟)的函数关系.

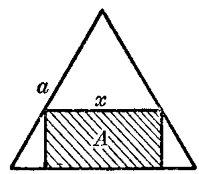
8. 拖拉机重量W一定时，地面上单位面积所受的压力p是履带接触地面的面积Q的函数. 说明p是Q的反比函数.

9. 把一个直径$d=50$厘米的圆木截成截面为长方形的木料，求截面积A和一边的长x的函数关系.

提示：另一边的长y是x的函数.



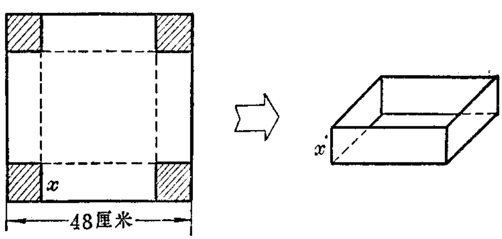
(第9题)



(第10题)

10. 从一个边长为a的正三角形铁皮上剪下一个矩形，分别把这个矩形的周长p和面积A表示为一边的长x的函数.

11. 有一块正方形铝板，边长是48厘米，把四个角各截去一块相等的正方形，做成一个无盖的铝盒. 试把铝盒的体积V表示为小正方形边长x的函数.



(第11题)

函 数 的 图 象

函数关系的表示法，常用的有表格、公式和图象．图象能比较直观地表明函数变化的情况．因此，我们在这里着重地讨论一下．

例 1 气温 T(°C)是时间 t(时)的函数，$T=f(t)$．它的函数关系由自动记录仪记录为一条曲线（图 1-9）．它是以时间 t 为横坐标，温度 T 为纵坐标，随着时间 t 的改变自动记录出来的．这条曲线就叫做函数 $T=f(t)$的图象．

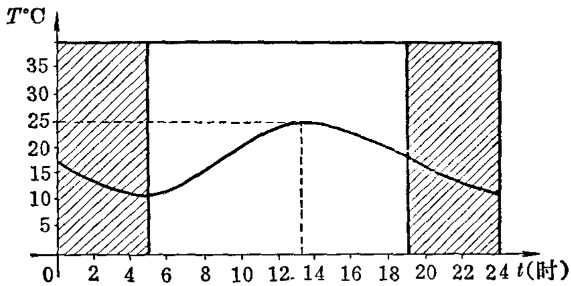


图 1-9

有了函数的图象，相当于给出了一个函数表．由 t 的某个值，就可以从曲线上找到相应的 T 值，如 $t=13.5$，曲线上相应的点的纵坐标 $T=25$(°C)．

从图象上可以明显地看出函数 $T=f(t)$变化的情况．如当 t 从 5 变到 13.5 时，曲线是上升的，表示气温 T 随着时间 t 的增加而升高；当 t 从 0 变到 5 和从 13.5 变到 24 时，曲线都是下降的，表示气温在这两个时间间隔里是随着 t 的增加而降低；在 $t=13.5$ 时，曲线有个峰，表示那时气温 T 最高，是 25°C；在 $t=5$ 时，气温 T 最低，是 11°C．

用公式表示的函数关系，跟《初等代数》中作二元一次方程和二次三项式的图象的方法一样，可以用描点的方法作出它们的图象.

例 2 作正比函数 $y=2x$ 和反比函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象.

(1) 作正比函数 $y=2x$ 的图象. 先列表如下:

x	……	-2	-1	0	1	2	……
y	……	-4	-2	0	2	4	……

以 x 的值为横坐标，对应的 y 值为纵坐标，在直角坐标系中描出各点；然后连线，得到一条直线，如图 1-10. 这条直线就是正比函数 $y=2x$ 的图象.（想一想，为什么？）

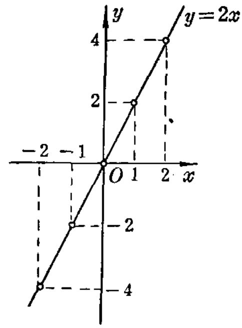


图 1-10

(2) 作反比函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象. 列表如下:

x	……	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	……
y	……	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	没值	3	2	1	$\frac{1}{2}$	……

可以看出，x 越接近 0，y 的绝对值越大.

在直角坐标系中，描出各点，并用光滑曲线连接各点，就画出如图 1-11 的曲线. 所画的曲线叫做双曲线，它就是反比函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象.

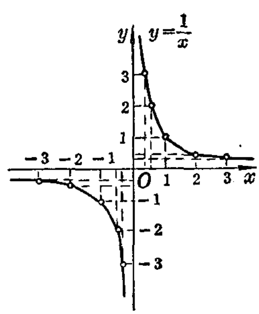


图 1-11

对于比较复杂的函数，作图时往往借助于已知的图象，采用一种所谓"移图"的方法.