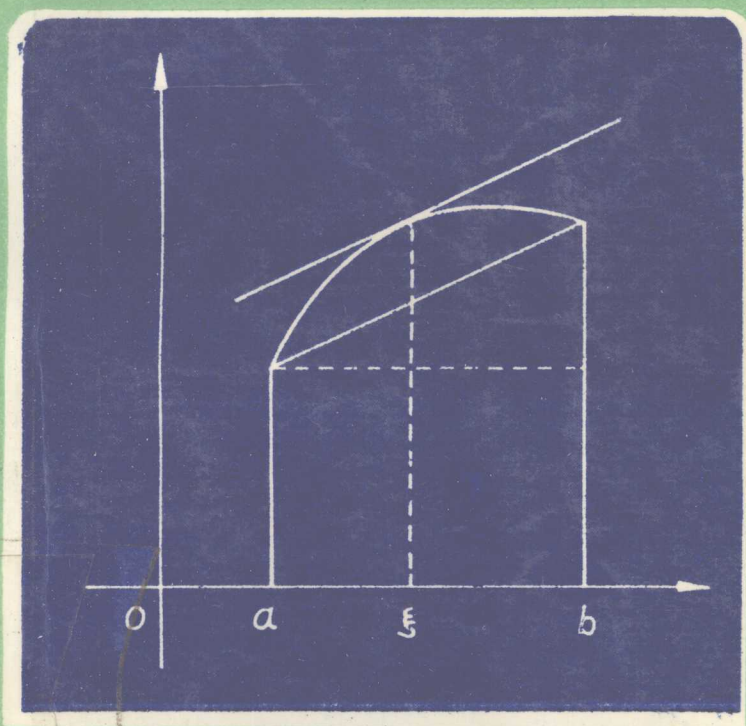


高等数学(一)微积分

题解与解题技巧

张春汉 谭尔历 编



华南理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)微积分题解与解题技巧/张春汉、谭尔历
编. —广州:华南理工大学出版社, 1994. 11
ISBN 7-5623-0776-8

I. 高…

Ⅱ. 张…

Ⅲ. 高等数学

Ⅳ. O 13

华南理工大学出版社出版发行

(广州五山 邮码510641)

责任编辑 梁文厚

华南理工大学印刷厂印装

1994年11月第1版 1994年11月第1次印刷

开本: 787 × 1092 1/32 印张: 12.75

字数: 293 千 印数: 1—6000

定价: 9.90 元

目 录

第一篇 习题解	(1)
习题一(A)	(1)
习题二(A)	(28)
习题三(A)	(59)
习题四(A)	(95)
习题五(A)	(139)
习题六(A)	(168)
习题七(A)	(199)
习题八(A)	(223)
习题九(A)	(253)
第二篇 解题方法和技巧	(277)
一、求极限方法	(277)
二、函数的奇、偶性与周期性	(294)
三、函数定义域的确定	(296)
四、函数值域与函数值	(298)
五、集合	(300)
六、函数连续与间断	(300)
七、导数运算	(302)
八、高阶导数	(306)
九、微分	(307)
十、中值定理的应用	(309)

十一、可微函数增减性,凸向和拐点,函数极值	(311)
十二、经济中的应用之一(求最大利润与收益)	(315)
十三、经济其他应用问题	(321)
十四、闭区间上的连续函数介值定理	(326)
十五、导数的几何意义、切线方程	(327)
十六、渐近线	(329)
十七、函数的作图	(331)
十八、不定积分的计算	(332)
十九、定积分的计算与性质	(338)
二十、面积的计算、旋转体体积的计算	(342)
二十一、广义积分与 Γ 函数	(344)
二十二、正项级数的敛散性判断	(346)
二十三、交错级数及任意级数的敛散性判断	(351)
二十四、幂级数的收敛区间、和函数	(354)
二十五、函数的幂级数展开	(358)
二十六、二元函数的全微分、偏导数计算	(361)
二十七、二元函数的极值	(367)
二十八、二重积分	(370)
二十九、一阶微分方程	(375)
三十、利用二元函数的经济应用问题	(380)
三十一、选择、填空 100 题精选	(391)

第一篇 习 题 解

习题一 (A)

1. 按下列要求举例: (1) 一个有限集合; (2) 一个无限集合; (3) 一个空集; (4) 一个集合是另一个集合的子集;

解 (1) 一个有限集合: 如 $\{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

(2) 一个无限集合: 如 $\{x | x = 2n - 1, n \text{ 为整数}\}$.

(3) 一个空集: 如 $\{x | x^2 + 2 = 0, x \in R\}$.

(4) 一个集合是另一个集合的子集: 如

$A = \{x | |x| \leq 1\}, B = \{x | x^2 - 1 = 0\}$, 那么有 $B \subset A$, 即 B 是 A 的子集.

2. 用集合的描述法表示下列集合: (1) 大于 5 的所有实数集合; (2) 圆 $x^2 + y^2 = 25$ 内部 (不包含圆周) 一切点的集合; (3) 抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y = 0$ 交点的集合.

解 (1) $\{x | x > 5, x \in R\}$; (2) $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 25\}$;
(3) $\{(x, y) | y = x^2 \text{ 且 } x - y = 0\}$.

3. 用列举法表示下列集合: (1) 方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的根的集合; (2) 抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y = 0$ 交点的集合; (3) 集合 $\{x | |x - 1| \leq 5 \text{ 的整数}\}$.

解 (1) $\{3, 4\}$; (2) $\{(0, 0), (1, 1)\}$; (3) $\{-4, -3, -2,$

$-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

4. 下列哪些集合是空集: $A = \{x | x + 1 = 0\}$, $B = \{x | x^2 + 1 = 0, x \text{ 为实数}\}$; $C = \{x | x > 1 \text{ 且 } x < 0\}$, $D = \{x | x > 0 \text{ 且 } x < 1\}$; $E = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1 \text{ 且 } x + y = 3, x, y \text{ 均为实数}\}$.

解 集合 B, C, E 为空集. (对于 E , 从几何图象易看出圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与直线 $x + y = 3$ 不相交, 即无公共点)

5. 写出 $A = \{0, 1, 2\}$ 的一切子集.

解 A 的子集有 $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, \emptyset$ (注意: 不要忘记 $\emptyset \subset A, A \subset A$).

6. 如果 $A = \{0, 1, 2\}, B = \{1, 2\}$, 下列各种写法哪些对? 哪些不对? $1 \in A, 0 \in B, \{1\} \in A, 1 \subset A, \{1\} \subset A, 0 \subset A, \{0\} \subset B, A = B, A \supset B, \emptyset \subset A, A \subset A$.

解 对的写法有: $1 \in A, 0 \in B, \{1\} \subset A, \{0\} \subset A, A \supset B, \emptyset \subset A, A \subset A$. 其余写法均不对.

7. 设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 5\}, C = \{2, 4, 6\}$, 求:

(1) $A \cup B$; (2) $A \cap B$; (3) $A \cup B \cup C$; (4) $A \cap B \cap C$;

(5) $A - B$.

解 (1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$;

(2) $A \cap B = \{1, 3\}$;

(3) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(4) $A \cap B \cap C = \{1, 3\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset$;

(5) $A - B = \{2\}$.

8. 如果 A 表示某单位会英语的人的集合, B 表示会日语的人的集合, 那么, A' , B' , $A - B$, $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$ 各表示什么样人的集合?

解 A' 表示不会英语的人的集合;

B' 表示不会日语的人的集合;

$A - B$ 表示会英语但不会日语的人的集合;

$(A \cup B)'$ 表示不会英语也不会日语的人的集合;

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ 表示不会英语或不会日语的人的集合, 即英、日两种语言都会的人除外, 其他的人的集合.

9. 如果 $A = \{x | 3 < x < 5\}$, $B = \{x | x > 4\}$, 求:

(1) $A \cup B$ (2) $A \cap B$ (3) $A - B$

解 (1) $A \cup B = \{x | x > 3\}$;

(2) $A \cap B = \{x | 4 < x < 5\}$;

(3) $A - B = \{x | 3 < x \leq 4\}$.

10. 如果 $A = \{(x, y) | x - y + 2 \geq 0\}$, $B = \{(x, y) | 2x + 3y - 6 \geq 0\}$, $C = \{(x, y) | x - 4 \leq 0\}$, 在坐标平面标出 $A \cap B \cap C$ 的区域.

解 $A \cap B \cap C$ 为坐标平面上所标的 $\triangle ABC$ 区域.

11. 如果 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. 求 (1) A' ; (2) B' ; (3) $A' \cup B'$; (4) $A' \cap B'$.

解 (1) $A' = \{4, 5, 6\}$;

(2) $B' = \{1, 3, 5\}$;

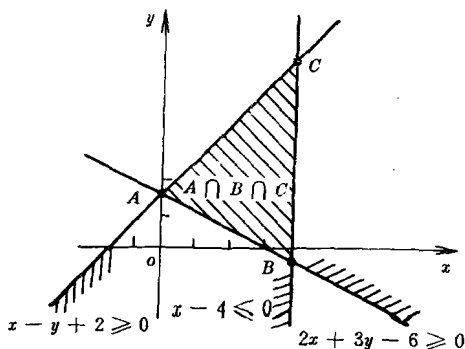


图 1-1

$$(3) A' \cup B' = \{4, 5, 6\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6\};$$

$$(4) A' \cap B' = \{4, 5, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \{5\}.$$

12. U, A, B 同第 11 题, 验证 $A - B = A \cap B'$.

解 $A - B = \{1, 3\},$

$$A \cap B' = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1, 3\}$$

$$\therefore A - B = A \cap B'.$$

13. 如果 A 是非空集合, 下列各个等式哪些是对的? 哪些是不对? $A \cup A = A, A \cap A = A, A \cap A = \emptyset, A \cup \emptyset = A, A \cup \emptyset = \emptyset, A \cup U = U, A \cap U = A, A \cap \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A - A = A, A - A = \emptyset.$

解 $A \cup A = A$ (对), $A \cap A = A$ (对), $A \cap A = \emptyset$ (错),

$A \cup \emptyset = A$ (对), $A \cup \emptyset = \emptyset$ (错), $A \cup U = U$ (对), $A \cap U = A$ (对), $A \cap \emptyset = \emptyset$ (对), $A \cap \emptyset = \emptyset$ (对), $A - A = \emptyset$ (对), $A - A = \emptyset$ (对).

14. 已知集合 $A = \{a, 3, 2, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, b\}$, 若 $A \cap B = \{1, 2, 3\}$, 求 a 和 b .

解 $\because \{1, 3, 2, 4\} \cap \{1, 3, 5, 2\} = \{1, 2, 3\}$,

$\therefore a = 1, b = 2$.

15. 调查了某地区 100 个乡, 其中 70 个乡小麦亩产量在 250 公斤以上, 以集合 A 表示这些乡; 40 个乡棉花亩产量在 60 公斤以上, 以集合 B 表示这些乡; 小麦亩产在 250 公斤以上而棉花亩产在 60 公斤以下的有 55 个乡. 试用集合关系表示下列各类乡, 并计算出各类型乡的数目:

(1) 麦、棉两项亩产量均达到上述指标的乡;

(2) 小麦亩产量未达到 250 公斤以上而棉花亩产量在 60 公斤以上的乡;

(3) 麦、棉中至少有一项达到上述指标的乡;

(4) 麦、棉两项均未达到上述指标的乡.

解 (1) 麦、棉两项均达到上述指标的乡集合为 $A \cap B$, 数目为 $70 - 55 = 15$ (个);

(2) 小麦未达到指标而棉花达到指标的乡集合为 $B - A$ (或 $A' \cap B$), 数目为 $40 - 15 = 25$ (个);

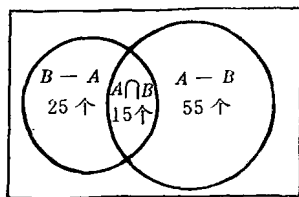
(3)、麦、棉至少有一项达到指标的乡集合为 $A \cup B$, 数目

为: $70 + 40 - 15 = 95$ (个)(或 $55 + 15 + 25 = 95$ (个));

(4) 麦、棉两项均未达到指标的乡集合为 $(A \cup B)'$, 数目为 $100 - 95 = 5$ (个).

用文氏图表示如右图

16. 如果 $A = \{a, b, c, d\}$,
 $B = \{c, d, e\}$, $C = \{d, e, f\}$, 验证
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.



解 $A \cap (B \cup C) = \{a, b, c, d\} \cap \{c, d, e, f\} = \{c, d\}$,
 $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{c, d\} \cup \{d\} = \{c, d\}$

图 1-2

$$\therefore A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

17. 同第 8 题的集合 A 与集合 B 验证摩根律.

证 (1) $\because (A \cup B)'$ 表示去掉会英语或日语的人的其余人的集合即表示不会英语也不会日英的人的集合. $(A' \cap B')$ 也表示不会英语也不会英语的人的集合.

$$\therefore (A \cup B)' = A' \cap B'$$

(2) $\because (A \cap B)'$ 表示不是既会英语又会日语的人的集合, $A' \cup B'$ 表示不会英语或不会日语的人的集合, 即英、日语言都会的人除外, 其他人的集合.

$$\therefore (A \cap B)' = A' \cup B'$$

18. 用集合运算律证明: $X \cup (X \cap Y)' \cup Y = U$.

证 左边 $= X \cup (X \cap Y)' \cup Y = X \cup (X' \cup Y') \cup Y$
 $= (X \cup X') \cup (Y' \cup Y) = U \cup U = U =$ 右边

证毕.

* 19. 如果 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, c\}$, 求 $A \times B$.

解 $A \times B = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c),$
 $(c, a), (c, b), (c, c), (d, a), (d, b), (d, c)\}$.

* 20. 如果 $X = Y = \{3, 0, 2\}$, 求 $X \times Y$.

解 $X \times Y = \{(3, 3), (3, 0), (3, 2), (0, 3), (0, 0),$
 $(0, 2), (2, 3), (2, 0), (2, 2)\}$.

* 21. 设集合 $A = \{\text{北京、上海}\}$, $B = \{\text{南京、广州、深圳}\}$,
求 $A \times B$ 与 $B \times A$.

解 $A \times B = \{(\text{北京、南京}), (\text{北京、广州}), (\text{北京、深圳}),$
 $(\text{上海、南京}), (\text{上海、广州}), (\text{上海、深圳})\}$

$B \times A = \{(\text{南京、北京}), (\text{南京、上海}), (\text{广州、北京}), (\text{广州、上海}),$
 $(\text{深圳、北京}), (\text{深圳、上海})\}$

* 22. 设集合 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2\}$, 求
 $X \times Y \times Z$.

解 $X \times Y \times Z = \{(x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_2), (x_1, y_2, z_1),$
 $(x_1, y_2, z_2), (x_2, y_1, z_1), (x_2, y_1, z_2), (x_2, y_2, z_1), (x_2, y_2, z_2),$
 $(x_3, y_1, z_1), (x_3, y_1, z_2), (x_3, y_2, z_1), (x_3, y_2, z_2)\}$

* 23. 解下列不等式:

- (1) $x^2 < 9$; (2) $|x - 4| < 7$; (3) $0 < (x - 2)^2 < 4$;
 (4) $|ax - x_0| < \delta$; ($a > 0, \delta > 0, x_0$ 为常数).

解 (1) $x^2 < 9, \sqrt{x^2} = |x| < 3$

$$\therefore -3 < x < 3.$$

(2) $|x - 4| < 7, -7 < x - 4 < 7$

$$\therefore -3 < x < 11$$

(3) $0 < (x - 2)^2 < 4, 0 < |x - 2| < 2$

即 $-2 < x - 2 < 0$ 或 $0 < x - 2 < 2$,

$$\therefore 0 < x < 2, \text{ 或 } 2 < x < 4.$$

(4) $|ax - x_0| < \delta \quad (a > 0, \delta > 0, x_0 \text{ 为常数})$

$$- \delta < ax - x_0 < \delta, \quad x_0 - \delta < ax < x_0 + \delta,$$

$$\therefore \frac{x_0 - \delta}{a} < x < \frac{x_0 + \delta}{a}$$

24. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:

(1) $|x| \leq 3$; (2) $|x - 2| \leq 1$;

(3) $|x - a| < \varepsilon$ (a 为常数, $\varepsilon > 0$);

(4) $|x| \geq 5$ (5) $|x + 1| > 2$.

解 (1) $|x| \leq 3$,

$$\{x | |x| \leq 3\} = \{x | -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3].$$

(2) $|x - 2| \leq 1$.

$$\{x | |x - 2| \leq 1\} = \{x | 1 \leq x \leq 3\} = [1, 3].$$

(3) $|x - a| < \varepsilon \quad (a \text{ 为常数}, \varepsilon > 0),$

$$\begin{aligned}\{x| |x-a| < \varepsilon\} &= \{x| a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} \\ &= (a-\varepsilon, a+\varepsilon).\end{aligned}$$

$$(4) |x| \geq 5,$$

$$\begin{aligned}\{x| |x| \geq 5\} &= \{x| x \leq -5 \text{ 或 } x \geq 5\} \\ &= (-\infty, -5] \cup [5, +\infty).\end{aligned}$$

$$(5) |x+1| > 2,$$

$$\begin{aligned}\{x| |x+1| > 2\} &= \{x| x > -1+2=1 \\ \text{或 } x < -1-2=-3\} &= (-\infty, -3) \cup (1, +\infty).\end{aligned}$$

25. 用区间表示下列点集合, 并在数轴上表示出来.

$$(1) I_1 = \{x| |x+3| < 2\};$$

$$(2) I_2 = \{x| 1 < |x-2| < 3\}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } I_1 &= \{x| |x+3| < 2\} = \{x| -5 < x < -1\} \\ &= (-5, -1),\end{aligned}$$

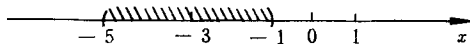


图 1-3

$$\begin{aligned}I_2 &= \{x| 1 < |x-2| < 3\} \\ &= \{x| -1 < x < 1 \text{ 或 } 3 < x < 5\} \\ &= (-1, 1) \cup (3, 5).\end{aligned}$$

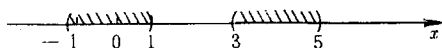


图 1-4

26. $y = \lg(-x^2)$ 是不是函数关系?为什么?

解 因为对任何实数 x , $-x^2$ 均为非正数,按对数定义,不存在与 x 对应的 y 值即无定义域. 函数定义域不能是空集,因此 $y = \lg(-x^2)$ 不是函数关系.

27. $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 与 $y = x + 1$ 是不是相同的函数关系?为什么?

解 $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, 而 $y = x + 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 两者的定义域不同, 所以不是相同函数关系.

28. 确定下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{9 - x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D(f) &= \{x | 9 - x^2 \geq 0\} = \{x | |x| \leq 3\} \\ &= [-3, 3] \end{aligned}$$

$$(2) y = \frac{1}{1 - x^2} + \sqrt{x + 2}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D(f) &= \{x | 1 - x^2 \neq 0 \text{ 且 } x + 2 \geq 0\} \\ &= \{x | x \geq -2 \text{ 且 } x \neq -1, x \neq 1\} \\ &= [-2, -1] \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty). \end{aligned}$$

$$(3)y = \frac{-5}{x^2 + 4}$$

解 不管 x 取任何实数, $x^2 + 4 \neq 0$ 函数 y 都有定义, 所以 $D(f) = (-\infty, +\infty)$.

$$(4)y = \arcsin \frac{x-1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D(f) &= \{x \mid -1 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1\} = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\} \\ &= [-1, 3]. \end{aligned}$$

$$(5)y = 1 - e^{1-x^2}$$

解 不管 x 取任何实数, 函数 x 都有定义, 所以 $D(f) = (-\infty + \infty)$.

$$(6)y = \frac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D(f) &= \{x \mid 3-x > 0 \text{ 且 } |x|-1 > 0\} = \{x \mid x < 3 \text{ 且 } \\ &x < -1 \text{ 或 } x > 1\} = [(-\infty, 3) \cap (-\infty, -1)] \cup [(-\infty, \\ &3) \cap (1, +\infty)] \\ &= (-\infty, -1) \cup (1, 3). \end{aligned}$$

$$(7)y = \sqrt{\lg \frac{5x-x^2}{4}}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D(f) &= \{x \mid \frac{5x-x^2}{4} \geq 1\} = \{x \mid x^2 - 5x + 4 \\ &\leq 0\} = \{x \mid (x-4)(x-1) \leq 0\} = \{x \mid x-4 \\ &\leq 0 \text{ 且 } x-1 \geq 0, \text{ 或 } x-4 \geq 0 \text{ 且 } x-1 \leq 0\} = \{x \mid x \\ &\leq 4 \text{ 且 } x \geq 1, \text{ 或 } x \geq 4 \text{ 且 } x \leq 0\} = \{x \mid x \leq 4 \text{ 且 } x \geq 1\} \\ &= [1, 4] \end{aligned}$$

$$(8) y = \frac{\arccos \frac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$$

$$\begin{aligned}\text{解 } D(f) &= \{x \mid -1 \leq \frac{2x-1}{7} \leq 1 \text{ 且 } x^2-x-6 > 0\} \\ &= \{x \mid -3 \leq x \leq 4 \text{ 且 } (x-3)(x+2) > 0\} \\ &= [-3, -2) \cup (3, 4]\end{aligned}$$

[注] 求定义域不一定要写出集合形式(见解题方法与技巧), 求出定义域区间即可, 不必象上述那样详细.

29. 已知 $f(x) = x^2 - 3x + 2$, 求 $f(0), f(1), f(2), f(-x), f(\frac{1}{x}), f(x+1)$.

$$\text{解 } f(0) = 0^2 - 3 \times 0 + 2 = 2,$$

$$f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0, f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0,$$

$$f(-x) = (-x)^2 - 3 \times (-x) + 2 = x^2 + 3x + 2,$$

$$f(\frac{1}{x}) = (\frac{1}{x})^2 - 3 \times (\frac{1}{x}) + 2 = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2,$$

$$f(x+1) = (x+1)^2 - 3 \times (x+1) + 2 = x^2 - x.$$

30. 设 $f(x) = \frac{x}{1-x}$, 求 $f[f(x)]$ 和 $f\{f[f(x)]\}$.

$$\text{解 } f[f(x)] = \frac{f(x)}{1-f(x)} = \frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x},$$

$$f\{f[f(x)]\} = \frac{f[f(x)]}{1-f[f(x)]} = \frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}}$$

$$= \frac{x}{1-3x}.$$

31. 如果 $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x$, 证明 $f(-x) = -f(x)$.

证 $f(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 + 3(-x) = -x^5 + 2x^3 - 3x = -(x^5 - 2x^3 + 3x) = -f(x)$, 证毕.

32. 如果 $f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$, 证明: $f(-x) = -f(x)$.

证 $f(-x) = \frac{e^{-(-x)} - 1}{e^{-(-x)} + 1} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$
 $= -\frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = -f(x)$ 证毕.

33. 如果 $f(x) = \frac{1-x^2}{\cos x}$, 证明: $f(-x) = f(x)$.

证: $f(-x) = \frac{1-(-x)^2}{\cos(-x)} = \frac{1-x^2}{\cos x} = f(x)$, 证毕.

34. 如果 $f(x) = a^x$, 证明: $f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$,

$$\frac{f(x)}{f(y)} = f(x-y).$$

证 $f(x) \cdot f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y} = f(x+y)$,

$\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = f(x-y)$. 证毕.

35. 如果 $f(x) = \log_a x$, 证明: $f(x) + f(y) = f(x \cdot y)$,

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right).$$

证: $f(x) + f(y) = \log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$
 $= f(xy),$