西安交通大學

研究生创新教育系列教材

# 工程应用弹性力学

凌伟 黄上恒 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大學

研究生创新教育系列教材

# 工程应用弹性力学

凌 伟　黄上恒　编著

西安交通大学出版社
·西 安·

**图书在版编目(CIP)数据**

工程应用弹性力学/凌伟,黄上恒编著.—西安:西安交通大学出版社,2008.8
西安交通大学研究生创新教育系列教材
ISBN 978-7-5605-2767-3

Ⅰ.工… Ⅱ.①凌…②黄… Ⅲ.工程力学:弹性力学-研究生-教材 Ⅳ.TB125

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 055117 号

| | |
|---|---|
| **书　　名** | 工程应用弹性力学 |
| **编　　著** | 凌　伟　黄上恒 |
| **责任编辑** | 邹　林 |
| **出版发行** | 西安交通大学出版社<br>(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049) |
| **网　　址** | http://www.xjtupress.com |
| **电　　话** | (029)82668357　82667874(发行中心)<br>(029)82668315　82669096(总编办) |
| **传　　真** | (029)82668280 |
| **印　　刷** | 陕西江源印刷科技有限公司 |
| **开　　本** | 727mm×960mm　1/16　**印张** 12.75　**字数** 227 千字 |
| **版次印次** | 2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷 |
| **书　　号** | ISBN 978-7-5605-2767-3/TB·46 |
| **定　　价** | 22.50 元 |

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248　(029)82665249
投稿热线:(029)82664954
读者信箱:jdlgy31@126.com

# 总序

创新是一个民族的灵魂，也是高层次人才水平的集中体现。因此，创新能力的培养应贯穿于研究生培养的各个环节，包括课程学习、文献阅读、课题研究等。文献阅读与课题研究无疑是培养研究生创新能力的重要手段，同样，课程学习也是培养研究生创新能力的重要环节。通过课程学习，使研究生在教师指导下，获取知识的同时理解知识创新过程与创新方法，对培养研究生创新能力具有极其重要的意义。

西安交通大学研究生院围绕研究生创新意识与创新能力改革研究生课程体系的同时，开设了一批研究型课程，支持编写了一批研究型课程的教材，目的是为了推动在课程教学环节加强研究生创新意识与创新能力的培养，进一步提高研究生培养质量。

研究型课程是指以激发研究生批判性思维、创新意识为主要目标，由具有高学术水平的教授作为任课教师参与指导，以本学科领域最新研究和前沿知识为内容，以探索式的教学方式为主导，适合于师生互动，使学生有更大的思维空间的课程。研究型教材应使学生在学习过程中可以掌握最新的科学知识，了解最新的前沿动态，激发研究生科学研究的兴趣，掌握基本的科学方法，把教师为中心的教学模式转变为以学生为中心教师为主导的教学模式，把学生被动接受知识转变为在探索研究与自主学习中掌握知识和培养能力。

出版研究型课程系列教材，是一项探索性的工作，有许多艰苦的工作。虽然已出版的教材凝聚了作者的大量心血，但毕竟是一项在实践中不断完善的工作。我们深信，通过研究型系列教材的出版与完善，必定能够促进研究生创新能力的培养。

西安交通大学研究生院

# 前言

本书是为非力学专业硕士研究生编写的工程应用弹性力学教材，也可作为各类工程专业和为从事强度计算与研究工作的科技人员弹性力学教学的参考书。由于充分考虑硕士研究生的理论基础与研究需要，同时又重视工程应用背景在弹性力学中的体现，所以本书具有如下特点：

(1)为了照顾许多非力学专业研究生和读者对指标记号了解较少的现状，本书在第 2 章介绍了指标记号体系的表述方法和最简单的笛卡儿张量的基本概念与运算，同时又避免过多地陷入较深奥的张量场论和曲线坐标系的张量理论系统之中，努力做到既要简明够用又尽量浅显易懂。为了较好地解决抽象与形象、简明与具体之间的矛盾，帮助学生与读者更好地理解和掌握指标记号体系下弹性力学的基本概念和推导运算方法，在指标记号体系下编写了较多的例题。

(2)在弹性力学的基础理论中(第 3～6 章)，系统讲授经典弹性力学的基本概念、基本原理和基本方法，同时又及时反映弹性力学研究的最新进展，为读者阅读近代力学文献奠定良好的基础。在基本理论中引入张量表示，能更深刻地揭示弹性力学基本概念和基本方法的物理实质，在必要的时候也给出传统的坐标分量表达形式，以期互相对照，降低难度，帮助理解。在应变分析(第 4 章)中介绍了有限变形(大变形)理论中的物质坐标(拉格朗日坐标)和空间坐标(欧拉坐标)，再由非线性应变简化到小变形条件下的线性应变；在本构理论(第 5 章)中从能量原理出发介绍了各向异性体的一般本构关系，再简化到各向同性体的简单本构方程，使读者对弹性力学基本理论有更高层次的领悟。

(3)在弹性力学的应用部分(第 7～11 章)，以工程应用为背景，介绍了杆件的扭转与弯曲、平面问题、空间球对称和轴对称问题的基本方程以及各具特色的处理方法，从多个侧面反映半逆解法的应用规律，用例题的形式精选了弹性力学的经典研究成果，使读者在接受和了解这些结论的同时能够便于应用到实际工程和研究课题中。特别是对复变函数求解平面问题(第 10 章)，除了介绍一般性的基本概念与方法，还引入了具有间断性质的奇异函数来处理裂纹问题，既突出了裂纹问题的间断性本质，又减少了通常用保角映射带来的较繁琐的推导。这部分内容属于基本理论的具体应用，根据需要主要采用坐标分量表示，力求体现简明、直观的和谐统一。

(4)近代固体力学的前沿课题，广泛地涉及热固耦合，越来越多地采用以有限

元为代表的数值近似分析，在工程应用弹性力学中的反映就是热弹性理论的不断完善和能量原理与变分解法的迅速发展，本书在第12、13两章系统介绍了这方面的基本概念和重要结果，同时精选了较多例题说明其应用方法，适当降低了难度，使读者能较容易地掌握这部分的基本理论。

本书是作者多年从事本科生与研究生弹性力学教学的实践总结，同时又广泛汲取了国内外各种弹性力学教材的优点和教学改革的经验，也是西安交通大学在教学改革和教学研究中的积极探索与尝试。根据学生基础和教师的适当取舍，讲授全部内容大致需要48～60学时。本书的初稿曾参考了陆才善教授，王子昆教授，蔡怀崇教授的授课讲义和国内外许多优秀教材，特此表示谢意。限于作者经验和水平的不足，书中疏漏和错讹之处难免，恳请专家和读者批评指正。

西安交通大学蔡怀崇教授仔细审阅了全书初稿，热忱地提出许多有益的意见和建议，特别表示衷心的感谢。

本书第7章至第10章由黄上恒执笔，其余各章由凌伟执笔，最后由凌伟统稿。

**作者**

**2008年3月**

# 目　录

# 第1章 绪论

## 1.1 弹性力学的任务与内容

弹性力学又称**弹性理论**，是固体力学的重要基础之一，研究弹性体在外力和温度变化等因素作用下发生的应力、应变和位移。

弹性力学与材料力学有着密切的联系，基本任务有很多相同之处，但研究对象更为广泛，研究方法更加严密，所得结果更为准确。材料力学只研究杆件在拉压、弯曲、扭转等基本变形和组合变形下的应力、应变和位移，通常只满足了平衡方程而没有满足应力边界条件。弹性力学对杆件的研究更为深入，在边界条件下求解偏解微分方程，既验证了材料力学的结论（初等解），又揭示了产生误差的因素和大小，所以更为完善也更为精确。除了杆件以外，弹性力学还对其它一些非杆状构件进行分析，如跨度和高度较为接近的所谓"深梁"的弯曲、曲梁的弯曲、非圆截面杆的扭转、孔边的应力集中、接触应力等等，得到经典的解析解。对更复杂的工程实际问题，弹性力学还可以采用数值解法获得近似解。

弹性力学既是基础的理论学科，又是重要的应用学科。由于大多数工程材料在相当广泛的受载条件下可以近似地理想化为弹性体，也因为弹性力学作为一门独立的学科在长期的发展中，已经逐步形成了一套比较完善的经典理论和方法，所以在许多工程领域得到广泛的应用，机械动力、材料水利、建筑结构、航空航天、化工造船等专业都与弹性力学密切相关。在弹性力学发展过程中，对促进数学和其它自然科学基础理论的建立和发展起到了相当重要的作用，例如弹性力学的变分解法促进了数学泛函分析的建立与完善，弹性波理论揭示了地震与大地构造之间的复杂关系等等。工程应用弹性力学更多地关注与工程实际相关的课题和问题，使弹性力学理论与工程实际应用结合得更加紧密。

随着科学技术的进步，弹性力学的研究不断深入和扩大，最初的一些重要课题已发展成为独立的分支学科，如板壳理论、弹性波理论、热弹性理论、各向异性弹性理论、不同模量弹性理论、弹性稳定理论以及非线性弹性理论等。这些内容在一门课程中不可能详尽论述，本课程只能介绍弹性力学的基本理论和一些经典问题的解法与结论，为深入学习固体力学的其它课程（如塑性力学、断裂力学、连续介质力学、粘弹性力学等）和解决实际问题提供一个初步的基础。

弹性力学按求解问题的方法可分为数学弹性力学和应用弹性力学，前者采用精确的数学分析，后者则要借助对应力或变形的附加假设简化推导，所以应用弹性力学更类似于材料力学，不过研究的对象更复杂、研究方法更精确而已。工程应用弹性力学更偏重于工程应用，在理论分析比较严谨的前提下，研究对象主要是工程实际问题。

## 1.2 弹性力学的基本假设与研究方法

弹性力学与材料力学一样，都需要提出一些基本假设来建立弹性固体的基本模型，这些假设包括：

(1)**均匀连续性假设** 均匀性假设认为弹性体内各点处的力学性质不随位置而变化，任何一点的分析结果可以适用于整个物体；连续性假设则认为弹性体占据的空间内部不存在任何空隙和间断，这样应力、应变、位移就可以用连续函数来描述，并用微积分进行分析。

(2)**理想弹性假设** 理想弹性假设要求弹性体在产生变形的因素去除后，能够完全恢复初始的形状和尺寸，没有任何残余变形。同时假设应力应变服从线性关系，弹性常数不随应力应变的大小而变化。

(3)**小变形假设** 假设弹性体在外力或温度等因素作用下，产生的位移远小于物体的初始尺寸，应变分量远小于1，这样可以简化问题的描述和推导，得到线性偏微分方程。

(4)**各向同性假设** 假设弹性体在不同的方向上具有相同的力学性质，弹性常数不随受力和坐标方向而变化，这样可以简化弹性常数。对大多数工程材料，各向同性假设足够精确，但对许多复合材料、木材等各向异性明显的材料，各向同性假设将不成立。

(5)**自然状态假设** 假设在载荷或温度作用之前弹性体内无应力和应变，因而求解得到的应力和应变仅仅是由于载荷或温度变化产生的。

上述基本假设中，假设(1)、假设(2)是基本条件，满足这两条假设的材料称为理想弹性体；假设(3)、假设(4)是为简化推导和分析而提出的，便于具体问题的求解。在建立方程的过程中，并不作这样的简化，可以从有限变形(大变形)和各向异性材料出发，得到非线性的几何关系和各向异性材料的本构方程，然后再化简；假设(5)是为了忽略其它因素对求解的影响。

在求解弹性体的应力时，材料力学用截面法求内力，对静定问题直接用平衡条件求应力(如单元体斜截面的应力)，对超静定问题用平截面假设建立变形几何关系(如圆轴的扭转和直梁的弯曲)，再联立平衡条件和物理条件求解应力。由于材

料力学通常只满足了平衡方程和变形协调条件，而没有满足应力边界条件，所得到的解答有时不够完善和准确。弹性力学求解应力时也要用到平衡方程、变形几何关系与物理条件，但具体的处理方法不同。弹性力学从微元角度出发，认为弹性体由无数单元体构成，考虑单元体的平衡、变形的协调和应力与应变之间的物理关系建立起偏微分方程组，在给定的边界条件下进行求解，以得到更为精确的解析解。

由于偏微分方程和边界条件的复杂性，直接求解往往非常困难甚至无法做到，所以常用**逆解法**和**半逆解法**。所谓"逆解法"是假设有一个解答（由材料力学或实验结果，或者与其它物理现象类比得到），将其带入微分方程和边界条件验证，如果全部得到满足，这个解就是唯一正确得解答；所谓"半逆解法"是假设一部分解，或者解中含有未知的系数甚至函数，在求解过程中求出其余的解和待定的系数与函数。由于数学上的困难，弹性力学能够求解的具体问题有限，对复杂的工程实际问题，近似解法和数值解法也是有效的工具。

在弹性力学基本问题的描述和推导过程中，过去普遍采用工程记号（直角坐标系下的分量形式），比较直观具体，但有时过于冗长、繁复。采用直角坐标系下的张量指标记号，可使表达式更为简捷，结论更为清晰，但有时比较抽象，所以本书必要时也将工程记号的表达式列出以帮助理解。对具体问题的求解，仍采用工程记号比较方便。

## 1.3　弹性力学的发展概况

弹性力学的发展大致可划分为几个主要阶段：

(1)17 世纪后半叶至 18 世纪末，这一历史时期主要是实验资料的积累和一些简单问题的处理，如胡克定律的实验（1660 年）；确定材料弹性模量的杨的实验（1807 年）；雅各·伯努利提出梁的弯曲理论和平板振动理论（1705 年）；丹尼尔·伯努利提出弹性细杆问题（1744 年）；欧拉提出柱体的稳定和杆的振动问题（1757 年）；库仑提出梁的弯曲理论和柱体扭转问题（1746 年）等。

(2)19 世纪上半叶，为经典弹性理论基础的建立阶段。纳维叶和柯西先后建立起弹性力学的基本方程（1821～1822 年）；格林确定独立的弹性系数（1838～1855 年）等，弹性力学的数学模型逐步确立和完善。

(3)19 世纪后半叶到上世纪 50 年代，是弹性力学在解法上取得巨大成功的重要阶段。弹性力学的数学模型建立后，由于微分方程和边界条件的复杂性，很难直接求解，圣文南关于柱体扭转和弯曲问题的求解（1854 年），开创了用半逆解法求解具体问题的有效途径，使弹性力学在理论和应用上都得到长足的发展，一系列具有重要理论价值和工程实际意义的问题先后解决，例如艾雷解决了平面应力问题

(1861 年);赫兹解决了接触问题(1862 年)等。与此同时,还提出了弹性力学的势函数解法,帕普科维奇和纽伯分别独立得到了用调和函数表示的位移通解,伽辽金得到了用重调合函数表示的位移通解,灵活地运用这些通解,获得了许多问题的解答。

(4)上世纪 30 年代到 60 年代,由于苏联科学家穆斯海利什维利的杰出工作,用复变函数求解平面问题取得突破,其后史莱顿等人又充分论述了积分变换法在求解平面问题和空间轴对称问题中的应用,在分析含有孔洞、夹杂和裂纹体的应力集中这类问题时,复变函数法表现出很大的优越性。

(5)上世纪 50 年代至今,工程问题的边界条件通常很复杂,一般不可能求解析解,所以各种近似解法也在快速发展。在半解析解方面有变分法和加权残数法,数值求解最初采用差分法,后来出现了有限元法和边界元法,近年提出了广义有限元和无限元法,随着计算机的飞速发展,数值解法已成为求解弹性力学问题的有力工具,并为弹性力学在工程领域应用开辟了更加广阔的前景。

# 第 2 章　笛卡儿张量数学基础

用数学工具描述许多力学问题时，往往需要引入坐标系，但坐标系的引入又会带来一些不便，就是坐标系的人为选择使自然规律的描述产生了不同的形式，甚至掩盖了一些物理现象的本质，也常使数学推导和结论变得冗长而复杂，张量数学恰恰是摆脱这一困境的有效途径。使用张量可以在引入坐标系的同时使推导简化，演算清晰，表达统一，所得结果在任何坐标系下都具有不变的形式，更充分准确地反映事物的本质。近年的力学文献已广泛采用张量的表达形式，在其它领域也出现得越来越多。本章介绍直角坐标系中的笛卡儿张量基础，并与矢量和矩阵分析结合说明其在弹性力学中的应用。张量分析的一般理论譬如更复杂的曲线坐标系中的张量分析，需要学习更深入的张量理论。

## 2.1　指标记号与求和约定

力学中常用的物理量可以分为标量和矢量，矢量常用黑体字母表示如力 $\boldsymbol{F}$，矢径 $\boldsymbol{r}$，位移 $\boldsymbol{u}$，速度 $\boldsymbol{v}$ 等，具有多重方向性的更为复杂的物理量称为**张量**，也用黑体字母表示如应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$，应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$，弹性系数张量 $\boldsymbol{B}$ 等。

一个有序数组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 可以简记为 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$，其中下标 $i$ 称为**指标**，指标的个数称为数组的**阶数**，如 $a_i$ 是一阶数组，$A_{ij}$ 是二阶数组，指标的取值范围 $n$ 称为数组的**维数**。在笛卡儿坐标系中 $n=3$(空间问题)或 $n=2$(平面问题)。有序数组中的每一个数称为元素，数组的元素既可以是标量也可以是矢量。

设笛卡儿坐标系 $xyz$ 的基矢量分别为 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$，用指标记号可以表示为 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$，坐标系中的一个点 $M$ 可以用一个矢量 $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$ 或者三个坐标分量$(x_1, x_2, x_3)$表示。指标记号则为 $x_i(i=1,2,3)$，维数说明括号“$(i=1, 2, 3)$”可以省略，即一个下标的指标记号 $x_i$ 表示一个矢量，类似地 $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}$ 可以分别表示为 $F_i$，$u_i$ 等。用矩阵记号表示时，$x_i, F_i, u_i$ 等既可以是列向量，也可以是行向量。

一个标量场 $T$ 的梯度是一个以方向导数 $\partial T/\partial x_i$ 为分量的矢量，可以表示为 $T_{,i}$，其中逗号“,”表示求导，$i$ 表示对 $x_i$ 求导，即 $T_{,i}$ 也表示一个矢量。

一个矩阵　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ 可以用两个指标的记号 $A_{ij}$ 表示。