高中数学

AOZHONG SHUXUE

基础型问题(上)

奚定华　陈嘉驹　主编

上海教育出版社

高中数学基础型问题(上)

奚定华　陈嘉驹　主编

上海教育出版社

高中数学基础型问题(上)
奚定华　陈嘉驹　主编
上海世纪出版股份有限公司
上　海　教　育　出　版　社　出版发行
易文网:www.ewen.cc
(上海永福路 123 号　邮政编码:200031)
各地新华书店经销　太仓市印刷厂有限公司印刷
开本 787×1092　1/16　印张 15
2008 年 10 月第 1 版　2008 年 10 月第 1 次印刷
印数 1-2,500 本
ISBN 978-7-5444-1929-1/O·0066　定价:28.00 元

前言

《高中数学基础型问题》是《高中数学解题基本方法》和《高中数学能力型问题》的姐妹篇，这三本书都是为了提高高中学生的数学解题能力而编写的.提高数学解题能力有三个要素：一是牢固掌握数学基础知识和基本技能；二是熟练掌握数学解题的基本方法；三是提高数学探究和创新能力.这三本书就是围绕着这三个要素而编写的.

《高中数学基础型问题》是三本书中的第一本，编写的目的是让读者通过学习本书，掌握数学基础型问题的解法，巩固和掌握数学基础知识和基本技能，为进一步掌握数学解题方法和提高数学思维能力、运算能力、空间想象能力、探究能力、应用能力和创新能力奠定基础.

《高中数学解题基本方法》是为了让读者掌握数学解题的基本方法.但是这本书与其他数学解题方法的书不同，它不是笼统地介绍各种数学解题方法，而是将高中数学知识和数学方法密切联系起来，分别介绍复数、函数、数列、三角、立体几何和解析几何等各种数学知识中的解题基本方法，使读者能根据数学问题涉及的数学知识，有针对性地选择具体的解题方法，提高解题的水平和效率.

《高中数学能力型问题》对学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力等四种能力型问题的特点和解题策略进行了深入的阐述和剖析，使读者通过学习，不仅能很好地掌握这些新题型问题的解法，而且能提高学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力.

高中数学基础型问题内容丰富、面广量大，如何才能牢固、熟练地掌握它们呢？这是学习高中数学基础型问题时必须解决的问题.为此，本书采取以下的做法：

1. 抓住基本类型

高中数学每一章都包含很多基础型问题，但是它们绝对不是杂乱无章的，而是有一定的结构和规律可循的.实际上，每一章的数学基础知识和基本技能，都对应几种基本类型的基础型问题，这些基本类型的问题具体体现了这一章的数学基础知识和基本技能.掌握了其中每一种基本类型问题的解法，就可以基本上掌握这一章的数学基础知识和基本技能.本书通过对每一章的数学基础知识和基本技能的仔细分析和研究，提出了相应的基础问题型的基本类型.

2. 掌握解题规律

本书对于每一种类型的数学基础问题都注意抓住其本质，并结合典型例题总结每一种类型问题的基本解题方法、解题规律、解题步骤和必须注意的事项.力图让读者通过本书的阅读和练习，系统地掌握数学基础问题的基本类型和基本解题规律，从而牢固地掌握数学基础知识和基本技能，进一步提高分析问题和解决问题的能力.

3. 进行适度训练

要掌握高中数学基础型问题的解法，除了掌握解题规律以外，进行适度的训练还是非常必要的.因此，本书的每一章都配备了相应的基础训练题，供练习之用，读者可

以根据自己的实际情况选用其中的一部分或全部.同时每一章(除了第十、十一章外)还配备了数学高考中相应的基础型问题,也可供练习使用.

本书可以满足高中各年级学生学习数学的需要,既可供高中学生在上新课学习相应的章节时使用,也可供高三学生全面复习时使用(书中打 * 的例题涉及后面的知识,在学习新课时可暂不使用).

本书分上、下两册,由奚定华、陈嘉驹主编,朱永庆、卜照泽、陈长恩、文卫星、李广学、谌开华、罗静、郭玫、郝莉莉、金红卫、宋林荣、唐仁兴、姚建新、王志和、徐辉、沈建国等参加编写,文卫星进行了初步的梳理,最后由奚定华修改和统稿,本书在写作过程中得到了上海市七宝中学和上海市奉贤中学领导的大力支持,在此深表感谢.

由于编者水平有限,又加上时间比较仓促,书中可能会有一些错误和问题,请读者阅后批评指正,以便在再版时予以修正.

编者

2008 年 10 月

目 录

上 册

第七章　三角函数

第八章　数列和数学归纳法

第九章　平面向量

第十章　矩阵和行列式

第十一章　算法初步

第一章　数学基础型问题是数学学习和数学考试的重要内容

一、数学基础型问题是学习数学基础知识和基本技能的重要载体

《高中数学课程标准》明确提出,高中数学课程的目标之一是“获得必要的数学基础知识和基本技能”. 因此,数学基础知识和基本技能是数学学习的重要组成部分.

数学基础知识一般是指:数学中的概念、性质、法则、公式、公理、定理以及由其内容反映出来的数学思想和方法. 数学基本技能一般是指:按照一定的程序和步骤进行运算、处理数据(包括使用计算器)、简单的推理、画图以及绘制图表等技能. 如何才能获得这些数学基础知识和基本技能呢? 解题是学习数学的重要途径,通过解数学问题可以掌握数学基础知识和基本技能,提高逻辑推理能力、运算能力、空间想象能力、探究能力、应用能力和创新能力. 数学问题有很多种,按解题的要求来分,有基础型问题、综合型问题和研究型问题等. 其中基础型问题是为了巩固和掌握数学基础知识和基本技能而设计的问题,它是数学中最基本的问题,是进一步学习其他数学知识,提高数学能力的基础. 因此,数学基础型问题是学习和掌握数学基础知识和基本技能的重要载体,是教材中例题、练习和习题的重要组成部分,也是教师进行教学时例题、课内练习和课外作业的重要组成部分. 为了学好数学,我们必须学会正确、合理、熟练地解答数学基础型问题.

二、数学基础型问题是高中数学等级考试和高考试卷的重要组成部分

由于数学问题是测试和评价学生学习数学质量的重要内容,而考查学生数学基础知识和基本技能又是数学考试的必不可少的组成部分,因此,数学基础型问题就成为学校平时测验、期中期末考试、毕业考试、等级考试和升学考试数学试卷的重要组成部分.

上海即将入学的高中学生在高中毕业时,将要参加高中数学等级考试. 高中数学等级考试的考试目标明确提出:要“考查考生的数学基础知识、基本技能”. 为了考查学生的数学基础知识和基本技能,数学等级考试在试卷中设计相当数量的基础型问题,让学生解答,并根据学生解答这些基础型问题的情况,来评价学生数学基础知识和基本技能的掌握情况,作为评定学生数学学习水平的重要依据之一.

历年来的数学高考也都非常重视数学基础知识和基本技能的考查,每年的考试大纲、考试说明或考试手册都在考试目标中明确提出,要考查考生的数学基础知识

和基本技能.因此,数学基础知识和基本技能同样也是数学高考的重要内容.

《2008年全国普通高等学校招生统一考试上海卷考试手册》数学科考试目标中明确提出了考查考生数学基础知识和基本技能的具体内容,它们是:

(1) 理解复数的有关概念,掌握复数代数形式的基本运算.

(2) 掌握集合、数列、数学归纳法的基本知识;会解一元二次不等式以及其他简单不等式;掌握证明不等式的基本方法.

(3) 掌握向量代数的初步知识及其运用,会用坐标法对平面直线和圆锥曲线进行研究;掌握空间中直线和平面的基本位置关系,掌握棱柱、棱锥的基本性质和有关计算.

(4) 掌握对数、三角比的概念和有关公式;理解函数的有关概念,掌握基本初等函数的图像和基本性质,会研究简单函数的性质,能用函数观点处理方程、不等式和数列的有关问题.

(5) 理解指数方程、对数方程和最简三角方程的基本概念,掌握解指数方程、对数方程和最简三角方程的基本方法.

(6) 会进行数据的收集、整理和统计分析;会解决有关排列和组合的简单问题;初步掌握基本统计量的计算方法和通过样本估计总体的方法;理解概率的意义,掌握有关等可能事件概率的计算方法.

(7) 领会集合、对应、函数、算法、数学建模、概率、统计以及化归、数形结合、分类讨论、分解与组合等基本数学思想,掌握坐标法、参数法、逻辑划分和等价转换等基本数学方法.

(8) 能按照一定的规则和步骤进行计算、画图和推理;掌握数学阅读、表达以及文字语言、图形语言、符号语言之间进行转换的基本技能,会使用函数型计算器进行有关计算.

数学高考试卷中有相当数量的基础型问题,根据学生解答这些基础型问题的情况,来评价学生数学基础知识和基本技能的掌握情况,作为高校选拔合格新生的重要依据.例如,2006年上海秋季理科数学高考试题中填空题第1~9题,选择题中第13~15题,解答题中第17、18、19、20、21(1)、22(1)题都是基础型问题.2007年上海秋季理科数学高考试题中填空题第1~9题,选择题第12~14题,解答题中第16、17、18、19、21(1)题也都是基础型问题.这些问题得分占试题总分的70%左右.所以数学基础型问题也是数学高考试题的重要组成部分,必须引起我们高度的重视.

由此可见,正确、合理和熟练地解答数学基础型问题,是在高中数学等级考试中达到高水平,在数学高考中取得好成绩的必要条件.

三、数学基础型问题的类型和解法

1. 数学基础型问题的特点

(1) 要求基本

数学基础型问题涉及的内容是数学基础知识和基本技能,它反映数学学习的基

本要求.

例如,(2006 年秋季数学高考第 6 题) 如果 $\cos\alpha=\frac{1}{5}$,且 α 是第四象限的角,那么 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=$ ________.

这是一个运用同角三角函数关系式和诱导公式求三角函数值的问题.涉及的内容是三角函数的基础知识和基本技能.能解决这类问题是学习三角函数必须达到的基本要求.

(2) 结构清晰

这类问题结构一般比较清晰,例如,上述问题的结构可分解为:

条件:已知 $\cos\alpha=\frac{1}{5}$,且 α 是第四象限的角.

结论:求 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$.

(3) 解法常规

这类问题一般都用常规解法,解题步骤清楚.

例如,上述问题的解题过程可分三个步骤:

(1) 运用诱导公式,将 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ 化为 $-\sin\alpha$;

(2) 运用同角三角函数关系式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 求出 $\sin\alpha$;

(3) 求得 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ 的值.

2. 数学基础型问题的基本类型

数学基础型问题的范围很广,为了更好地掌握它的特点、解法和解题规律,我们必须对它进行具体深入的研究.根据高中数学课程标准的要求,高中数学基础型问题,按照基础知识和基本技能的内容,可以分为以下几个部分:

(1) 集合和命题;

(2) 不等式;

(3) 函数;

(4) 三角比;

(5) 三角函数;

(6) 数列和数学归纳法;

(7) 行列式和矩阵;

(8) 算法;

(9) 向量;

(10) 直线;

(11) 圆锥曲线;

(12) 参数方程和极坐标;

(13) 复数;

(14) 空间图形;

(15) 排列组合；

(16) 概率和统计；

(17) 实用数学.

通过对每一部分基础型问题的研究，我们发现，虽然各个部分都有大量基础型问题，但是它们绝对不是杂乱无章的，而是具有一定规律的. 每一部分的基础型问题实际上都有几种基本的类型，掌握了这几种基本类型的基础型问题，就可以基本上掌握这一部分的基础知识和基本技能. 例如，集合和命题中的基础型问题可归纳为以下几个类型：

(1) 判断元素与集合的关系；

(2) 用列举法或描述法表示集合；

(3) 判断两个集合的包含关系或相等关系；

(4) 求集合的子集；

(5) 求两个集合的交集；

(6) 求两个集合的并集；

(7) 求集合的补集；

(8) 判断命题的真假；

(9) 写出命题的四种形式；

(10) 判断等价命题；

(11) 判断条件的充分性和必要性.

3. 数学基础型问题的解法

数学基础型问题的一般解法是：从问题的已知条件出发，运用有关的数学概念、公式、性质、定理和法则等基础知识，以及运算、推理、画图等基本技能，得到所要求的结论. 进一步研究发现，不同的数学基础型问题有不同的解法和解题规律. 下面我们分别加以说明：

(1) 判断辨析型问题的解法

判断辨析型问题是一类涉及概念辨析、简单命题真假的判断和定理、公式、法则是否正确运用的基础型问题. 这类问题通常有以下几种解法：

① 直接法

直接运用定义、定理、公式、性质、法则进行判断.

② 反例法

通过举反例说明不符合概念的定义或命题是假命题.

例如，(2007年秋季理科高考第13题)　设 a、b 是非零实数. 若 $a<b$，则下列不等式成立的是(　　).

(A) $a^2<b^2$　　(B) $ab^2<a^2b$　　(C) $\frac{1}{ab^2}<\frac{1}{a^2b}$　　(D) $\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$

可用直接法判断本题(C)是正确的答案.

$\because$ a、b 是非零实数，$a<b$，　$\therefore$ $\frac{a}{a^2b^2}<\frac{b}{a^2b^2}$，即 $\frac{1}{ab^2}<\frac{1}{a^2b}$.

也可以用反例法判断(A)、(B)、(D)是不正确的.

∵ 由$-3<-2$，得$(-3)^2>(-2)^2$， ∴ (A)不正确.

∵ 由$2<3$，得$2\cdot 3^2>3\cdot 2^2$， ∴ (B)不正确.

∵ 由$2<3$，得$\frac{3}{2}<\frac{2}{3}$， ∴ (D)不正确.

由此可判断(C)是正确的.

③ 试验法

先用特例进行试验，初步进行判断. 如果试验下来不正确，那么结论是“否”或“假”，该特例可以作为反例；如果试验下来正确，那么还需要进一步加以证明.

上面的问题也可以先用特殊值代入进行试算，然后进行判断.

(2) 初步运用型问题解法

就是初步运用概念、定理和公式，进行运算或推理，使基础型问题获解.

这类问题通常有以下两种解法：

一是直接代入公式和运用定理、性质与法则进行简单的运算或推理，求得结论；

例如，(2007 年秋季理科高考第 1 题) 函数 $y=\frac{\lg(4-x)}{x-3}$ 的定义域是________.

这个问题就是运用求函数定义域的法则，列出不等式组：

$$\begin{cases}4-x>0,\\ x-3\neq 0.\end{cases}$$

解这个不等式组，可得所求函数定义域为$(-\infty,3)\cup(3,4)$.

二是根据题意构造简单的函数解析式、方程、不等式，通过求解析式的值、解方程和不等式使问题得到解决.

例如，(2007 年秋季理科高考第 2 题) 若直线 l_1：$2x+my+1=0$ 与直线 l_2：$y=3x-1$平行，则 $m=$__________.

这个问题就是先根据直线和直线平行的条件列出方程$\frac{2}{3}=\frac{m}{-1}$，然后解方程求得 $m=-\frac{2}{3}$.

(3) 简单组合型问题解法

简单组合型问题是由几个简单的基础型问题组合而成的，解这类问题常常是将它分解成几个基础型问题，然后分步逐个解决.

例如，(2007 年秋季理科高考第 6 题) 函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$的最小正周期 $T=$__________.

这是由三角函数积化和差与求三角函数的周期组合而成的问题. 这个问题可以分解为以下两个简单基础型问题：

(1) 将 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$的右边积化和差；

(2) 求函数 $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$的最小正周期.

按顺序分别解决这两个简单基础型问题，就解决了这个简单组合型问题.

又如,(2007年秋季理科高考第16题)　如图1-1,在体积为1的直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,$\angle ACB=90^\circ$,$AC=BC=1$.求直线A_1B与平面BB_1C_1C所成角的大小(结果用反三角函数值表示).

这是由直三棱柱性质及直线和平面所成的角组合而成的问题.它可以分解为以下几个简单基础型问题:

(1) 求AA_1;

(2) 求BC_1;

(3) 求直线A_1B与平面BB_1C_1C所成角的大小.

解:(1) 由题意,可得

$$\text{体积 } V=CC_1\cdot S_{\triangle ABC}=CC_1\cdot\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=\frac{1}{2}CC_1=1,$$

$\therefore$ $AA_1=CC_1=2$.

(2) 联结BC_1.

$$BC_1=\sqrt{CC_1^2+BC^2}=\sqrt{5}.$$

(3) $\because$ $A_1C_1\perp B_1C_1$,$A_1C_1\perp CC_1$,

$\therefore$ $A_1C_1\perp$平面BB_1C_1C,

$\therefore$ $\angle A_1BC_1$是直线A_1B与平面BB_1C_1C所成的角.

$\therefore$ $\tan\angle A_1BC_1=\dfrac{A_1C_1}{BC_1}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,则$\angle A_1BC_1=\arctan\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

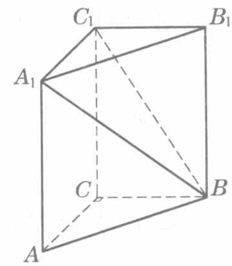

图　1-1

即直线A_1B与平面BB_1C_1C所成角的大小为$\arctan\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

(4) 基本应用型问题解法

基本应用型问题是概念、定理和公式的简单实际应用问题或用已知数学模型解决的实际问题.这类问题的解法一般分成以下几步:

① 在理解题意的基础上,将实际问题转化为数学问题;

② 直接运用概念、定理和公式或应用已知的数学模型列出数学式子、方程或不等式等;

③ 通过运算和推理,求出结果;

④ 检验结果是否符合实际;

⑤ 写出答案.

例如,(2007年秋季理科高考第18题)　近年来,太阳能技术运用的步伐日益加快.2002年全球太阳电池的年生产量达到670兆瓦,年生产量的增长率为34%.以后四年中,年生产量的增长率逐年递增2%(如,2003年的年生产量的增长率为36%).

(1) 求2006年全球太阳电池的年生产量(结果精确到0.1兆瓦);

(2) 目前太阳电池产业存在的主要问题是市场安装量远小于生产量,2006年的实际安装量为1420兆瓦.假设以后若干年内太阳电池的年生产量的增长率保持在42%,到2010年,要使年安装量与年生产量基本持平(即年安装量不少于年生产量的95%),这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到多少(结果精确到0.1%)?

解:(1) 由已知得2003年、2004年、2005年、2006年太阳电池的年生产量的增

长率依次为36%、38%、40%、42%.

则2006年全球太阳电池的年生产量为

$$670\times1.36\times1.38\times1.40\times1.42\approx2499.8(\text{兆瓦}).$$

(2) 设太阳电池的年安装量的平均增长率为x,则

$$\frac{1420(1+x)^4}{2499.8(1+42\%)^4}\geqslant95\%.$$

解得$x\geqslant0.615$.

因此,这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到61.5%.

其中第(1)题是增长率概念的简单实际应用;第(2)题是用已知数学模型$A=a\cdot(1+r\%)^n$(其中A是增长后的产量,a是原来产量,r是增长率,n是年数)来解决实际问题.

第二章 集合与命题

一、集合与命题中的基础型问题

1. 判断元素与集合的关系

典型例题

例 1 用符号$\in$或$\notin$填空:

(1) 7 ______{质数};　　(2) 3.14 ______Q;

(3) $\sqrt{2}$ ______$\{x\mid x\leqslant 1\}$;　　(4) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ ______$\{1,2,\sqrt{3}-1\}$;

(5) 2007 ______$\{x\mid x^2-2008x+2007=0\}$;

(6) $(2,3)$ ______$\{(x,y)\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$.

解 (1) $\in$. (2) $\in$. (3) $\notin$. (4) $\in$. (5) $\in$. (6) $\in$.

例 2 选择题

(1) 下列各式中,正确的是(　　).

(A) $0=\{0\}$　(B) $0\in\{0\}$　(C) $0\in\varnothing$　(D) $0=\varnothing$

(2) 如果$M=\{(0,4),(1,2)\}$,那么下列写法正确的是(　　).

(A) $4\in M$　(B) $2\in M$　(C) $(2,1)\in M$　(D) $(1,2)\in M$

(3) 如果$m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}$且$n\neq 0$,那么下列写法错误的是(　　).

(A) $mn\in\mathbf{Z}$　(B) $mn\in\mathbf{Q}$　(C) $\frac{m}{n}\in\mathbf{Z}$　(D) $\frac{m}{n}\in\mathbf{Q}$

解 (1) (B).

(2) (D).

(3) (C).

例 3 已知集合$A=\{2,3,a^2+4a+2\}$,集合$B=\{0,7,a^2+4a-2,2-a\}$,且$7\in A$,则集合$B=$__________.

解 令$a^2+4a+2=7$,解得$a=-5$或$a=1$.但$a=-5$时,$2-a=7$,B中有元素7,与集合元素互异性矛盾,故$a=1$,此时$B=\{0,7,3,1\}$.

解题规律

1. 判断一个元素是否属于集合,关键是看这个元素是否具有已知集合中所有元素共同的性质,如果具有这个共同的性质,那么这个元素就属于这个集合,反之就不属于这个集合.如例1(3),因为集合$\{x\mid x\leqslant 1\}$中的元素都是不大于1的数,而$\sqrt{2}>1$,

所以$\sqrt{2}\notin\{x|x\leqslant 1\}$.

2. 由于空集不含元素，因此任何元素都不属于空集；还要注意，数0是一个元素，$\varnothing$是一个集合，元素和集合不能相等，因此例2第(1)题(D)不对.

3. 注意集合中的元素具有互异性，如例3，当$a=-5$时集合B中的元素$2-a=7$，而集合B中已有元素7，这样就与集合中元素的互异性矛盾，因此$a\neq-5$. 解题时对此不能忽视.

2. 用列举法或描述法表示集合

典型例题

例1 用列举法表示下列集合：

(1) $A=\left\{x\,\middle|\,x<60,\frac{x}{12}\in\mathbf{N}^*\right\}$；

(2) $A=\{y|y=x^2-1,|x|\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}$；

(3) $A=\{(x,y)|x+y=5,x\in\mathbf{N}^*,y\in\mathbf{N}\}$；

(4) a、b、c为非零实数，代数式$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}$的所有的值组成的集合.

解 (1) 因为x是小于60且能被12整除的正整数，所以$A=\{12,24,36,48\}$.

(2) 由$|x|\leqslant 2$，$x\in\mathbf{Z}$可得，x分别为$-2,-1,0,1,2$，代入$y=x^2-1$得y为$3,0,-1$，故$A=\{3,0,-1\}$.

(3) 分别令$x=1,2,3,4,5$得相应的y值为$4,3,2,1,0$，于是$A=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\}$.

(4) 当$a>0,b>0,c>0$时，$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=3$，当$a<0,b<0,c<0$时，$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=-3$，当$a$、$b$、$c$中两正一负时，$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=1$，当$a$、$b$、$c$中两负一正时，$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=-1$，所以$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}$的所有的值组成的集合是$\{-3,-1,1,3\}$.

例2 用描述法表示下列集合：

(1) 大于100的奇数组成的集合；

(2) $\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5}\right\}$.

解 (1) $\{x|x=2n-1,n>50,n\in\mathbf{N}^*\}$.

(2) $\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n}{n+1},1\leqslant n\leqslant 4,n\in\mathbf{N}^*\right\}$.

例3 用适当的方法表示下列集合：

(1) 绝对值小于3的整数组成的集合；

(2) 直线$y=x+1$上横坐标大于4的点的坐标组成的集合.

解 (1) 列举法：$\{-2,-1,0,1,2\}$.

(2) 描述法$\{(x,y)|y=x+1,x>4\}$.

解题规律

1. 集合表示方法常用的有列举法和描述法.列举法就是把集合中的元素一一列举出来(在列举时不考虑元素的顺序),并且写在大括号内;描述法在大括号内先写出这个集合的元素的一般形式,再画一条竖线,在竖线后面写上元素所共同具有的特性,即$A=\{x|x$ 满足性质 $p\}$.

2. 在用描述法表示集合时,要写出适合元素的一般形式,集合元素的一般形式有很多,如$\{x|ax^2+bx+c=0(a\neq0),x\in\mathbf{R}\}$中的$x$是指方程$ax^2+bx+c=0$的解;$\{x|ax^2+bx+c>0(a\neq0),x\in\mathbf{R}\}$中的$x$是指不等式$ax^2+bx+c>0$的解;$\{(x,y)|y=ax^2+bx+c(a\neq0)\}$中的$(x,y)$是指抛物线$y=ax^2+bx+c$上点的坐标;$\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$中的$x$表示奇数,$\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$中的$x$表示偶数等.

3. 采用哪种方法要根据各表示法的优点及具体问题而定.当一个集合的元素个数有限时列举法显得方便;当一个集合元素有无穷多个时,列举法就显得很繁,通常采用描述法表示集合.

3. 判断两个集合的包含关系或相等关系

典型例题

例 1 选择题:

(1) 已知$a=\pi$,集合$A=\{x|x<\sqrt{10},x\in\mathbf{R}\}$,则下列关系中正确的是(　　).

(A) $a\notin A$　　(B) $a\subseteq A$　　(C) $\{a\}\in A$　　(D) $\{a\}\subseteq A$

(2) 下列关系中正确的是(　　).

(A) $\varnothing\in\varnothing$　　(B) $\varnothing\subsetneqq A\subseteq\varnothing$

(C) $\{0\}=\varnothing$　　(D) {正三角形}$\subseteq${等腰三角形}

解 (1) $\because$ $a=\pi<\sqrt{10}$, $\therefore$ $a\in A$,因此(A)不正确; $\because$ 集合与元素之间不能用“$\subseteq$”, $\therefore$ (B)不正确; $\because$ 两个集合之间不能用“$\in$”, $\therefore$ (C)不正确.选(D).

(2) $\because$ 两个集合之间不能用“$\in$”, $\therefore$ (A)不正确; $\because$ $A\subseteq\varnothing$,$A=\varnothing$,与$\varnothing\subsetneqq A$产生矛盾, $\therefore$ (B)不正确; $\because$ $\{0\}$是含有一个元素0的集合,$\varnothing$不含有任何元素, $\therefore$ (C)不正确.选(D).

例 2 已知集合$A=\{x|x\geqslant0,x\in\mathbf{Z}\}$,集合$B=\{y|y=x^2,x\in\mathbf{Z}\}$,求证:$A\supsetneqq B$.

证明 因为集合A是所有自然数组成的集合,集合B是所有自然数的平方数组成的集合,而自然数的平方数都是自然数,所以$A\supseteq B$.但自然数3是集合A的元素,它不属于集合B,因此$A\supsetneqq B$.

例 3 填空题:

(1) 已知集合$A=\{-1,2\}$,$B=\{x|x^2+ax+b=0\}$,且$A=B$,则$a=$______,