21世纪经济管理类系列教材

WEIJIFEN

微积分

主编 王 青

辽宁大学出版社

21世纪经济管理类系列教材

WEIJIFEN

微积分

主编　王　青

辽宁大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分/王青主编．—沈阳：辽宁大学出版社，2007.7
21世纪经济管理类系列教材
ISBN 978-7-5610-5400-0

Ⅰ．微…　Ⅱ．王…　Ⅲ．微积分—高等学校—教材　Ⅳ．0172

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第098957号

出 版 者：辽宁大学出版社
（地址：沈阳市皇姑区崇山中路66号　　邮政编码：110036）
印 刷 者：抚顺光辉彩色广告印刷有限公司
发 行 者：辽宁大学出版社
幅面尺寸：170mm×228mm
印　　张：27
字　　数：510千字
印　　数：1—3000册
出版时间：2007年7月第1版
印刷时间：2007年7月第1次印刷
责任编辑：祝恩民
版式设计：何艳秋
封面设计：邹本忠
责任校对：李　佳　全　宇

书　　号：ISBN 978-7-5610-5400-0
定　　价：42.00元

联系电话：024—86864613
邮购热线：024—86830665
网　　址：http：//press. lnu. edu. cn
电子邮件：lnupress@vip. 163. com

目　　录

第 1 章

函　　数

数学是一门研究数量关系与空间形式的科学，函数关系是满足一定条件的一种数量关系，函数是微积分研究的对象，是最重要的基本概念之一。尽管在以前已对它有了一定的认识，但认真学好本章，加深对函数概念及其性质的理解和掌握，为学习本课程打下良好基础仍是不容忽视的。

§1.1　变　　量

一、变　　量

当我们观察和研究某种自然现象和社会现象时，往往会遇到各种不同的量，这些量一般可分为两种：一种是常量，即在某一过程中，数值保持不变的量；另一种是变量，即在某一过程中，数值不断变化的量。例如自由落体的下降速度和与地面的距离就不断改变，而落体的质量在这一过程中则保持不变。再如在生产过程中，产品的产量及原材料的消耗量等都在变化，而机床数及生产工人数目就保持不变。

一个量是常量还是变量，要在具体问题中作具体分析。

以后，我们用字母 $x,y,z,\cdots$ 表示变量，用字母 $a,b,c\cdots$ 表示常量。

变量一般都具有一定的变化范围，因而变量的取值也往往不同，有些变量的取值可能是离散的，如产品的件数、人数等；有些变量的取值可能是连续的，如时间、温度等。

初等数学主要研究的是常量，而作为高等数学的重要部分——微积分则主要研究的是变量，它是以极限为基本工具分析研究变量和变量间的依赖关系即函数关系以及通过这些关系所表现出来的重要性质。学好微积分，掌握其基本思想和方法，对于研究解决经济现象中的一些具体问题是十分重要的。

二、区　　间

在一些实际问题中，有些变量的取值常常是一些区间，下面谈谈区间的分

类和表示法：

设 a,b 为实数，且 $a<b$

1. 开区间 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$，如图 1－1 所示。

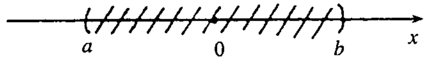

图 1－1

2. 闭区间 $[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$，如图 1－2 所示。

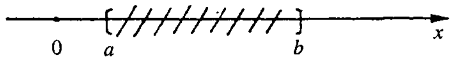

图 1－2

3. 半开区间 $(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$，如图 1－3 所示。

$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$，如图 1－4 所示。

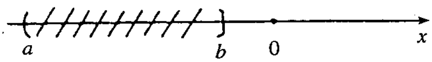

图 1－3

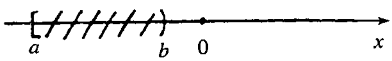

图 1－4

以上三类区间称为有限区间，有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$，称为区间的长。

引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则还有下面几类无限区间：

4. $(a,+\infty)=\{x \mid a<x\}$

$[a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x\}$

5. $(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$

$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$

6. $(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$

即全体实数的集合。

注意：“$-\infty$”和“$+\infty$”是两个记号而不是数。

三、邻　域

为描述一个变量 x 在一个已知点 x_0 附近变化，我们给出邻域这一术语：

$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域。x_0 称为

邻域的中心，δ 称为邻域的半径。如图 1－5 所示。

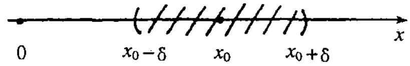

图 1－5

$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 称为以 x_0 为中心，δ 为半径的空心邻域。如图 1－6 所示。

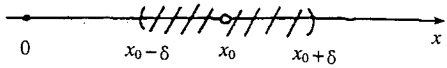

图 1－6

§1.2　函　　数

一切事物都是在不断地运动变化着，在同一个变化过程中所遇到的各种变量，都不是彼此独立地在那里变化的，一般说来，它们彼此之间总有或多或少的关系，因而其中一个的变化就常常引起另外那些也跟随它有相应的变化。例如，圆半径变大时，其面积也同时变大；增加田里的施肥量，庄稼的收成也随之增多等等。但是，从这两个例子中已经可以看出，在某一个现象里所碰到的各个量之间的关系，就其相互间联系的明确性来说，可以是很不相同的。在第一个例子里，这种联系最明确：只要知道了圆半径 r，就可以惟一地而且绝对精确地用公式 $s=\pi r^2$ 来确定它的面积。在第二个例子里，虽然施肥的量无疑会影响到收成的多少，但即使精确地知道了田地里面的施肥量，也还是不能完全精确地预料到收成的多少。这种联系就很不精确。变量之间的那种精确的关系，即只要知道了一个变量的值之后，我们就有可能惟一地并且完全精确地决定另外一个变量的值的那种关系的数学表现，就是函数关系的概念。这是本课程中继变量的概念之后的第二个基本概念。

一、函数的定义

在中学里所学的函数定义为：

设在某个变化过程中，有两个变量 x 与 y，如果对于 x 取值范围内的每一个数值，都有一个确定的 y 值与之对应，则称 y 是 x 的函数。

为了突出这里是集合之间的对应关系，给出如下定义：

定义 1.1　设 D 是一个非空实数集合，f 是一个对应规则，在此规则下，对每一个 $x\in D$，都有惟一确定的实数 y 与之对应，则称此对应规则 f 为定义在 D

上的一个函数关系，称变量 y 是变量 x 的函数。记作 $y = f(x), x \in D$。

这里称 x 为自变量，称 y 为因变量。

集合 D 称为该函数的定义域，可记作 $D(f)$。

对于 $x_0 \in D(f)$ 所对应的 y 值记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，称为当 $x = x_0$ 时函数 $f(x)$ 的函数值。

全体函数值的集合 $\{y \mid y = f(x), x \in D(f)\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的值域，记作 Z 或 $Z(f)$

在平面直角坐标系中，取自变量在 x 轴上变化，因变量在 y 轴上变化，则平面点集

$$\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D(f)\}$$

便是函数“$y = f(x), x \in D$”的图形。

学习函数概念，要注意以下几点：

1. 函数概念反映了自变量 x 与因变量 y 之间的依赖关系，即集合 D 到集合 Z 之间的对应规律。确定函数的两个要素是定义域和对应规则。如果两个函数的定义域和对应规则都相同，那么这两个函数是同一函数；如果两个要素中至少有一个不相同，那么就确定两个不同的函数。

例1　$y = x, x \in (-\infty, +\infty)$

与　$y = \dfrac{x^2}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

是两个不同的函数。这是由于它们的定义域不同。

例2　$y = x, x \in (-\infty, +\infty)$

与　$y = \sqrt{x^2}, x \in (-\infty, +\infty)$

虽然定义域相同，但当 $x < 0$ 时，$y = x < 0$，$y = \sqrt{x^2} > 0$，可见它们的对应规则不同，值域不同，这是两个不同的函数。

2. 函数记号 $f(x)$ 中的 f 表示 x 与 y 的对应规则，其意义是对于 D 上的一个确定值 x 通过规则 f 确定出 y 的对应值。也可以用 $g, F, h, \varphi\cdots$ 字母来表示，相应的函数就记作 $g(x), F(x), h(x), \varphi(x), \cdots$，函数关系也可记作 $y = y(x)$，等号左边的 y 表示因变量，等号右边的 y 表示对应规则。

3. 函数定义中要求对于每一个 $x \in D$，都有惟一确定的 y 值与之对应，那么 $y = \pm\sqrt{1-x^2}$，对于每一个 $x \in (-1,1)$，都有两个 y 值与之对应，不符合函数的1.1定义。像 $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ 这样的对于非空集合 D 中的 x 值有多个 y 值与之对应的情形，也可以定义为一个函数，称之为多值函数，相应地把定义1.1中所指的情形称为单值函数。本课程中提到的函数除特别说明外都是指单值函数。

二、函数表示法

1. 三种表示法

函数的表示法常见的有公式法、表格法及图形法。由于在中学数学中都已介绍过，这里就不再重复了。要注意的是，并不是给出一个公式都能确定一个函数。例如 $y=\arcsin(2+x^2)$，虽然给出了一个公式，但对于任何实数 x 都不可能确定出与之对应的 y 值，而函数的定义中要求定义域 D 是非空的实数集合，故它不能确定一个函数。

2. 分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量 x 的不同值，需要用两个或两个以上的式子来表示其对应规则，这类函数称为"分段函数"。例如

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

$$\text{符号函数 } y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

都是定义在$(-\infty,+\infty)$内的分段函数，其图形分别如图1－7和图1－8所示。

注意：分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数。用这种方法表示的函数在实际问题中也经常使用。

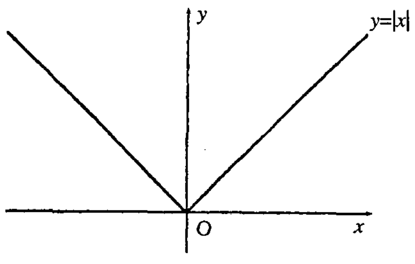

图 1－7

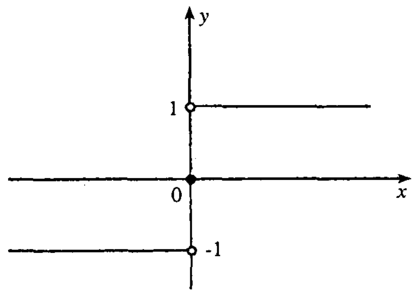

图 1－8

3. 隐函数

对于给定的一个二元方程 $F(x,y)=0$，只要给定 x 的值，就能确定出 y 值与之对应，从而确定一个或几个（自变量 x 的）函数 y。例如方程 $xy-2x+3y-1=0$ 就确定一个函数 $y=\dfrac{2x+1}{x+3}$，而方程 $x^2+y^2-1=0$ 则可以确定两个函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与 $y=-\sqrt{1-x^2}$。在很多情形，由给定方程

$F(x,y)=0$ 所确定的函数不可能像所举的两个简单例子那样把 y 解出来，例如 $xy-e^y=0$，$xe^y+\sin xy=0$ 等。因此，不管表达式如何，只要在 x 的取值范围内，恒等地满足方程 $F(x,y)=0$ 的每一个函数 $y=f(x)$ 都称为是由这个方程所确定的隐函数，而把以前提到过的函数表达形式称为显函数。

三、函数定义域的求法

按照定义，所谓给定一个函数，就是给出它的定义域和对应规则，缺一不可。但在许多场合给出函数时往往只给出对应规则而未指出它的定义域。这时，我们就约定它的定义域是指能使对应规则有意义的所有 x 构成的集合。这样也就产生了求该函数定义域的问题。

例 3 确定函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域。

解 要使 $\sqrt{1-x^2}$ 有意义，必须 $1-x^2\geqslant 0$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$。因此所求定义域为 $[-1,1]$。

例 4 确定函数 $y=\dfrac{1}{\lg(2x-1)}$ 的定义域。

解 要使 $\dfrac{1}{\lg(2x-1)}$ 有意义。必须 $\lg(2x-1)$ 有意义且 $\lg(2x-1)\neq 0$，这就要求 $2x-1>0$ 且 $2x-1\neq 1$ 即 $x>\dfrac{1}{2}$ 且 $x\neq 1$。因此该函数的定义域是 $(\dfrac{1}{2},1)\cup(1,+\infty)$。

例 5 确定函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域。

解 由 $\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1$ 且 $x^2<25$

即 $|x-1|\leqslant 5$ 且 $|x|<5$

得 $-4\leqslant x\leqslant 6$ 且 $-5<x<5$

故所求定义域是 $[-4,5)$。

例 6 确定函数 $y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & |x|<1\\ x^2-1 & 1<|x|\leqslant 2\end{cases}$

的定义域。

解 由于此函数可改写成下列形式

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2-1 & -2\leqslant x<-1\\ \sqrt{1-x^2} & -1<x<1\\ x^2-1 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

故所求函数的定义域是$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]$。

例 7　已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2 & 0\leqslant x\leqslant 2\\ x^2 & 2<x\leqslant 4\end{cases}$,求 $f(x-1)$

解　$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+2 & 0\leqslant x-1\leqslant 2\\ (x-1)^2 & 2<x-1\leqslant 4\end{cases}$

即　$f(x-1)=\begin{cases}x+1 & 1\leqslant x\leqslant 3\\ (x-1)^2 & 3<x\leqslant 5\end{cases}$

例 8　已知 $f(e^x-1)=x^2+1$,求 $f(x)$ 的定义域

解　求函数定义域时,一般先求出 $f(x)$ 的解析式。为此,令 $t=e^x-1$ 则 $x=\ln(1+t)$ 可得

$$f(x)=\ln^2(x+1)+1,\text{于是}$$

$f(x)$ 的定义域为$(-1,+\infty)$。

§ 1.3　函数的几种简单性质

对于给定的函数要研究它具有的特性,本课程要逐步揭示函数的性态。在中学数学中,已用初等方法对函数的几种简单性质进行过研究,即如下四种性质:

一、函数的奇偶性

定义 1.2　给定函数 $y=f(x),x\in D(f)$

如果对所有的 $x\in D(f)$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;

如果对所有的 $x\in D(f)$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数;

由定义知,一个函数 $f(x)$ 能成为奇函数或偶函数的必要条件是它的定义域为关于原点对称的集合。

奇、偶函数的图形具有如下特征:

对于偶函数 $f(x)$,由于 $f(-x)=f(x)$,则点 $P(x,f(x))$ 与点 $P'(-x,f(x))$ 都在图形上,而这样的点 P 与 P' 对称于 y 轴,所以偶函数的图形关于 y 轴对称,如图 1－9 所示。

对于奇函数 $f(x)$,由于 $f(-x)=-f(x)$,则点 $Q(x,f(x))$ 与 $Q'(-x,-f(x))$ 都在图形上且对称于原点,所以奇函数的图形关于原点对称,如图 1－10 所示。

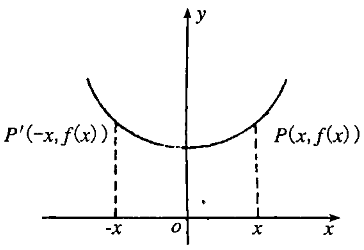

图 1－9

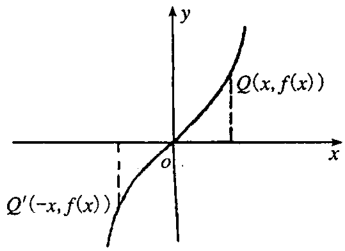

图 1－10

例 1 判断 $y=\cos x(e^{-x}+e^{x})$ 的奇偶性。

解 因为 $y=\cos x(e^{-x}+e^{x})$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$关于原点是对称的，并且

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x)(e^{x}+e^{-x}) \\ &= \cos x(e^{-x}+e^{x}) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

所以该函数为偶函数。

例 2 判断 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性。

解 因为 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$关于原点是对称的，并且

$$\begin{aligned} & f(-x)+f(x) \\ &= \ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})+\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \\ &= \ln(1+x^2-x^2)=0 \end{aligned}$$

即 $f(-x)=-f(x)$

所以该函数为奇函数。

例 3 判断 $y=x^3+4$ 的奇偶性。

解 $y=x^3+4$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，关于原点是对称的，但是

$$f(-x)=(-x)^3+4=-x^3+4$$

$$f(-x)\neq x^3+4=f(x)$$

$$f(-x)\neq -x^3-4=-f(x)$$

因此 $y=x^3+4$ 既非奇函数也非偶函数。

例 4 判断 $y=x^2, x\in[-1,4]$ 的奇偶性。

解 由于函数 $y=x^2$ 的定义域$[-1,4]$关于原点不对称，因此它是非奇、非偶的函数。

二、函数的周期性

定义 1.3 给定函数 $y=f(x), x\in D$，如果存在非零常数 a，使得

$f(x) = f(x+a)$ 恒成立，则称此函数为周期函数。所有这些常数中的最小正数称为此函数的周期。

例如 $y = \sin x, y = \cos x$ 是周期函数，周期皆为 2π。$y = \tan x, y = \cot x$ 也是周期函数，周期皆为 π。

由定义知，一个函数能成为周期函数的必要条件是它的定义域为在原点两侧都能无限延伸的集合。另外，并不是周期函数都得有周期，例如 $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$，对于任意实数 a 都有 $f(x+a) = f(x)$，它是周期函数，但它没有周期。

三、函数的单调性

定义 1.4 给定函数 $y = f(x)$，设 x_1, x_2 为 $D(f)$ 内的任意两点，如果当 $x_1 < x_2$ 时，$f(x_1) < f(x_2)$，则称此函数在 $D(f)$ 内是单调增加的（或递增函数）；如果当 $x_1 < x_2$ 时，$f(x_1) > f(x_2)$ 则称此函数在 $D(f)$ 内是单调减少的（或递减函数）。

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数。如果 $D(f)$ 是区间，则称该区间为函数的单调区间。

单调增加函数的图形是沿 x 轴正向上升的，如图 1—11 所示，单调减少函数的图形是沿 x 轴正向下降的，如图 1 — 12 所示。

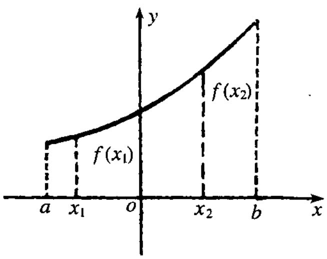

图 1—11

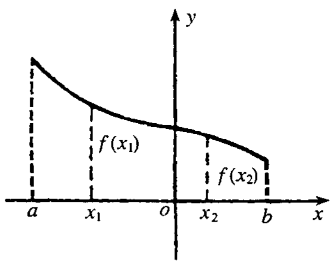

图 1—12

例 5 判断 $y = x^3$ 的单调性

解 $y = x^3$ 的定义域是 $D = (-\infty, +\infty)$，对于任意的 $x_1, x_2 \in D$，如果 $x_1 < x_2$，则 ${x_1}^3 < {x_2}^3$ 即 $f(x_1) < f(x_2)$，因此 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加函数。

例 6 判断 $y = 3x^2$ 的单调性

解 $y = 3x^2$ 的定义域是 $D = (-\infty, +\infty)$，对于任意的 $x_1, x_2 \in D$，

$f(x_1) - f(x_2) = 3{x_1}^2 - 3{x_2}^2 = 3({x_1}^2 - {x_2}^2)$

在 $(-\infty, 0)$ 内，当 $x_1 < x_2$ 时，$f(x_1) - f(x_2) > 0$，即 $f(x_1) > f(x_2)$，因此 $y = 3x^2$ 是单调减少的。

在$(0,+\infty)$内，当$x_1<x_2$时，$f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$，因此$y=3x^2$是单调增加的。

而在$(-\infty,+\infty)$内，$y=3x^2$不是单调函数。

四、函数的有界性

定义1.5 给定函数$y=f(x)$，$x\in D$，如果存在一个正数M，对于D内所有的x，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称$f(x)$在D内是有界的。如果不存在这样的正数M，则称$f(x)$在D内是无界的。

例7 $y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内是有界的，因为对任何实数x，恒有$|\sin x|\leqslant 1$。

例8 $y=\arctan x$在$(-\infty,+\infty)$内是有界的，因为对任何实数x，恒有$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$。

例9 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内是无界的，而在区间$(\varepsilon,1)(\varepsilon>0)$内是有界的。

有界函数$y=f(x)$的图形介于两条水平直线$y=M$，$y=-M$之间，如图1－13所示。

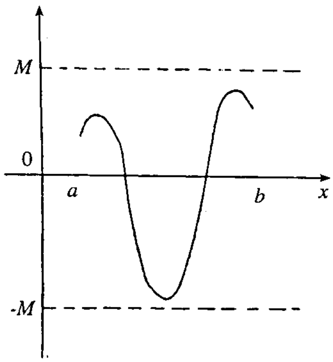

图1－13

§1.4 反函数 复合函数

一、反函数

在函数的定义中，两个变量，一个叫自变量，一个叫因变量，主从分明，地位不同。然而在实际问题中，谁是自变量，谁是因变量，却并不是绝对的，要依据所

研究的具体问题而定。

例如，在自由落体运动中，如果想从已知的时间 t 来确定路程 s，则 t 是自变量，s 是因变量，它们之间的关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

反之，想从已知的路程 s 来确定下落的时间，则应从上式中解出 t：

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$$

这时 s 成了自变量，t 成了因变量。

这表明在一定条件下，函数的自变量与因变量可以互相转化。对例中的两个函数，我们说后者是前者的反函数。

定义 1.6　设 $y=f(x)$，$x\in D(f)$，$y\in Z(f)$。如果对于每一个 $y\in Z(f)$，都有惟一确定的而且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D(f)$ 与之对应，其对应规则用 f^{-1} 表示，称这个定义在 $Z(f)$ 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数。(或称 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数)

由定义知函数 $y=f(x)$ 的自变量是 x，因变量是 y，定义域是 $D(f)$，值域是 $Z(f)$。而函数 $x=f^{-1}(y)$ 的自变量是 y，因变量是 x，定义域是 $Z(f)$，值域是 $D(f)$。

习惯上常用 x 表示自变量，y 表示因变量。因此将 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$，就是说 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数。

从几何上看，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是同一图形，由于 x 和 y 互换，于是 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的，如图 1－14 所示。

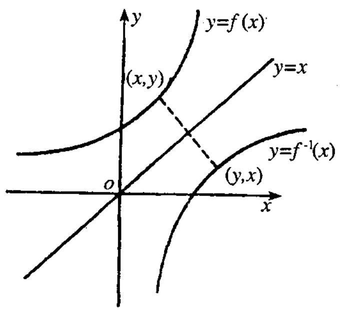

图 1－14

例 1　求 $y=2x-1$ 的反函数

解　由 $y=2x-1$ 求出 $x=\frac{y+1}{2}$。用 x 表示自变量，y 表示因变量，于是