财经类高等教育自学用书

高等数学

朱绍范 编

吉林人民出版社

高等数学

朱绍范 编

吉林人民出版社

财经类自学考试用书

高　等　数　学

朱绍范　编

责任编辑：沈明德

吉林人民出版社出版、发行

沈阳六〇一印刷厂印刷

开本：787×1092 1/16　印张：20

1985年5月第1版　1985年5月第1次印刷

字数：380千字　册数：1—20,315

统一书号：13091·191　定价：2.65元

前　　言

为了适应广大自学者的学习需要，我们受辽宁省高等教育自学考试指导委员会的委托，参照普通高等学校有关财经类各专业高等数学教学大纲以及省自学考试指导委员会编印的《财经类高等数学考试纲要》的要求，根据广大自学者的特点，本着“少而精”、理论联系实际和通俗易懂的原则，既要保证质量，又不降低要求，编写了这本自学考试用书。

这本书着重从基本理论、基本知识和基本技能方面进行说明，对于课程中的重点、难点也作了较详细的剖析和论述。书中配有大量例题与习题，并介绍了一些方法与技巧，便于自学者自学。对于带有*的章节，自学者可以不看，但不影响知识的系统性。本书不仅适合有关参加财经类各专业自学考试人员之用，也可以作为大专院校财经类本科生、专修科学生、函授学员、电大学员以及职工业余大学学员的教学用书及学习参考。

在编写过程中，郝宪朴、朱恩全、柴国兴、邵诚等同志参加了部分编写工作，吉林人民出版社的编辑同志给予热情的关怀并积极支持，才使得本书得以付印，在这里表示衷心的感谢。由于我们缺乏编写自学用书的经验，加上水平有限，编写时间仓促，书中难免存在缺点和错误，恳切希望广大自学者和关心自学的同志提出宝贵意见，以便进一步修改、完善。

编者　1985年5月

目　　录

第一章　函　　数

"科学的发生和发展一开始就是由生产决定的。"作为自然科学的一个重要方面一数学，也同样是在生产实践和科学实践的推动下，由研究常数的初等数学发展到研究变数的高等数学。而高等数学中的主要部分一微积分，又是以极限方法为基本工具分析研究变量和变量间的依赖关系即函数关系的。因此在学习微积分之前，先掌握好微积分研究的主要对象一函数，是具有重要作用的。

§1.1　函数概念

一、常量与变量

当我们观察某种自然现象或技术过程时，会遇到很多量，这些量一般可以分成两种：一种是在某种现象或过程进行中保持不变的量，即在事物的运动或变化过程中，保持一定数值的量，称为常量；另一种是在某种现象或过程的进行中不断改变的量，即在事物的运动或变化过程中可以取不同数值的量，称为变量。

〔例1〕：圆面积S随着它的半径R变化而变化，其变化的规律用公式(解析表达式)表示

$$S=\pi R^2$$

〔例2〕：自由落体降落的距离S随着降落时间 t 的变化而变化，其变化的规律是

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

〔例3〕：在经济学中，总收入是R，产品的销售量是x，则

$$R=Px\quad\text{(其中P是单位产品价格)}$$

上述三个例题中均有二个变量，例1中的变量为R和S，例2中的变量为t和S，例3中的变量为 R 和 x。在二个变量中，有一个是主动变化的，另一个是被动变化的。例1中 R 是主动的，而 S 是被动的；例2中 t 是主动的而 s 是被动的；例3中x是主动的，R 是被动的；例1中的π和例2中的g例3中的 P在某个过程中可以看成是不变的，即为常量。

定义：在某种现象和技术过程中，始终保持同一数值的量称为常量；可以取各种不同数值的量称为变量。

常量通常用a、b、c、……来表示。变量通常用x、y、z、……来表示。

一个量是常量还是变量要在具体问题中作具体分析。如重力加速度 g，在地球某一定地点时，可以看成是常量。若在地球的赤道和两极这样两个不同的地方，g 是不同的，这时又可以看成变量了。

给定x一个值就确定一个数，因而可以用数轴上一个点来表示。如果x是常量，则用数轴上一个定点来表示；如果x是变量则用数轴上动点来表示。

二、函数概念

自然界中任何事物都是处在不断地变化中，因此在某一种自然现象或技术过程中，往往会遇到两个或两个以上的变量。这些变量不是孤立的在变化，而是互相联系、互相依赖、互相制约的，也就是说变量之间遵循一定的规律在变化着。

上述例1面积S和半径R所遵循的规律用公式表示为$S=\pi R^2$

上述例2自由落体下落距离S和时间t所遵循的规律是

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

也可以用表格的形式，将S和t的关系表示出来，如例2表示为：

时间 t（秒）	0	0.5	1	1.5	2	……
距离 s（米）	0	1.225	4.9	11.025	19.6	……

〔例4〕：某气象站记录了某日从0点钟到24点钟当地温度变化的曲线（图1.1）

在这里温度T和时间t之间的关系没有用公式来表示，只能靠图1.1去找变量之间的关系。比如，想知道14点和t_0点两个时间的温度，只要在时间t轴上找到14点和t_0点，过该二点作平行T轴（代表温度）的平行线，与曲线相交于A和P，过A和P再作平行t轴（代表时间）的平行线与T轴相交，有二个具体数值23°和T°，则23°和T°就是14点和t_0点的温度。这里需要指出的，时间的取值范围只能在0点到24点之间取值，大于24点和小于0点是没有意义的。

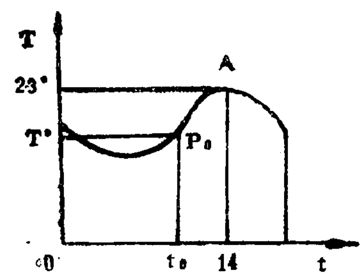

图 1.1

以上四个例题，反映了四种不同的自然现象。抽去各自代表的自然现象，就其数量规律来看，它们有着共同点：即其中一个变量在某一范围内取一个数值时，另一个变量按照某种规律，也有一个确定的数值与之相对应，两个变量间的这种对应关系，称之为函数关系。

1．函数定义

在某一个变化过程中有两个变量x和y，如果对于x在变化的范围内取每一个值，按照一定规律，y总有一个确定值和它对应，那么就称y是x的函数，记作

$$y=f(x)$$

其中x叫做自变量，y叫做x的函数或称因变量。

记号$y=f(x)$中的f，只表示y与x的对应关系或所遵循的规律，不能看作f乘以x。

表示函数常用的记号有：$y=f(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=y(x)$等。

在经济学上主要是分析基本经济量的关系，如成本、价格、利润、投入量、产出量等，这些基本经济量往往是错综复杂的交织在一起，但是总能找出它们之间所遵循的规律，这就是函数关系，在经济领域中通常所遇到的函数有：

①价格函数：是指销售量x与价格P的关系，记作 $P=P(x)$；

②总成本函数：总销售量为x，所需总成本为C，它们之间的关系，记作：$C=C(x)$；

③收益函数：销售量为x，价格为P(x)，它们的乘积，称为收益函数，记作

$$R(x)=x\cdot P(x)$$

④利润函数：收益函数与总成本函数之差，就是利润函数。记作

$$\Pi=R(x)-C(x)$$

⑤平均成本函数：是指总成本函数C(x)与销售量x之比，称做平均成本函数，记作

$$A(x)=\frac{C(x)}{x}$$

另外以后还常常遇到边际成本函数，边际效益函数等等。

〔例5〕：某商店零售某种商品，单位进价P_1元，以P_2元单价卖出（$P_2>P_1$），如果当日销售不完，必须以P_3元削价处理。若该店每天进货量为Q，问该商店的利润函数是什么？

解：商店的利润取决于当天的进货量和销售量。设x代表以单价P_2售出的销售量。则：

①$x<Q$（供大于求）的情况

以P_2为单价售出的收入为：P_2x

以P_3为单价售出的收入为：$P_3(Q-x)$

所以

$$\begin{aligned}\text{利润 }\Pi&=P_2x+P_3(Q-x)-P_1Q\\&=P_2x+P_3Q-P_3x-P_1Q\\&=x(P_2-P_3)+(P_3-P_1)Q\end{aligned}$$

②$x\geqslant Q$（供不应求）的情况

$$\text{利润}\Pi=P_2x-P_1x=(P_2-P_1)x$$

将两个式子写在一起，有

$$\Pi=\begin{cases}x(P_2-P_3)+(P_3-P_1)Q & x<Q\\(P_2-P_1)\ x & x\geqslant Q\end{cases}$$

〔例6〕：某商店全年需要某种商品量为a件，商品进库后均匀的售出，用完一批再进一批，即库存量为进库量的一半，如果库存费每件为c元，若每次购进批量大，则保管费用就大；若每次购进批量小，则保管费用就小，但是进货次数增加，而每采购一次需要采购费b元，这样总保管费与采购费之和（称总储存费）取决于进货的批量，试确定总储存费与进货批量之间的函数关系。

解：设每次购进商品数量为x，则一年要购$\frac{a}{x}$批，采购费用$\frac{a}{x}\cdot b$。每次库存量为$\frac{x}{2}$，库存费用$\frac{x}{2}\cdot c$，于是总储存费用为：

$$I(x)=\frac{ab}{x}+\frac{c}{2}x$$

其中x取值范围由1件到a件。

2．函数值

函数$y=f(x)$，当自变量x取一固定值时，如$x=a$，则y就有一个确定值$f(a)$与之相对应，$f(a)$称为当$x=a$时的函数值。记作$y=f(a)$或$y|_{x=a}=f(a)$。

具体求法可以理解为：$f(x)=$解析表达式，当$f(x)$中的x取任何数（常数、字母或函数）时，解析表达式中，凡是遇到x的地方都换成同一个数（常数、字母或函数）。

如例2中 $S(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 当 $t=1.5$时，其函数值为

$$S(1.5)=\frac{1}{2}9.8\times(1.5)^2=11.025。$$

〔例7〕：已知 $f(x)=\frac{ae^x+be^{-x}}{a+b}$ 求$f(0)$和$f(x)+f(-x)$。

解：
$$f(0)=\frac{ae^0+be^0}{a+b}=\frac{a+b}{a+b}=1$$

$$f(x)+f(-x)=\frac{ae^x+be^{-x}}{a+b}+\frac{ae^{(-x)}+be^{-(-x)}}{a+b}$$

$$=\frac{ae^x+be^{-x}+ae^{-x}+be^x}{a+b}$$

$$=\frac{(a+b)e^x+(a+b)e^{-x}}{a+b}$$

$$=e^x+e^{-x}$$

〔例8〕：已知 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，求$f[f(x)]$；$f\{f[f(x)]\}$

解：∵ $f(x)=\frac{1}{1-x}$

$$\therefore\ f[f(x)]=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}}$$

$$=-\frac{1-x}{x}=1-\frac{1}{x};$$

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{1}{1-(1-\frac{1}{x})}=\frac{1}{1-(\frac{x-1}{x})}$$

$$=\frac{x}{x-x+1}=x;$$

〔例9〕：已知$\varphi(x)=e^x$，求证$\varphi(a+b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$

证明：∵$\varphi(x)=e^x$ ∴$\varphi(a)=e^a$ $\varphi(b)=e^b$

∴$\varphi(a)\cdot\varphi(b)=e^a\cdot e^b=e^{a+b}$

又∵$\varphi(a+b)=e^{a+b}$ ∴$\varphi(a+b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$。

3．函数的定义域与区间

定义域：使得函数有意义的自变量取值范围，叫做函数定义域。

函数的定义域指明了函数关系的适用范围。也就是只有当自变量在定义域中取值时，函数才有确定的对应值，而相应函数的取值范围叫做值域。

定义域是函数的重要组成部分，没有定义域应该说函数的定义不完备。而纯粹数学讨论函数时，往往没有实际背景不说明它的定义域。函数若是用解析表达式写出的，一般认为使得解析表达式有意义的自变量取值范围就是函数的定义域。

为了简便起见，我们用“区间”来表示函数的定义域。

区间：两个实数间的全体实数，叫做区间。该二实数叫做区间的端点。设a、b为二个已知实数，且$a<b$，若满足不等式

（1）$a<x<b$，x为a，b间的全体实数，但不包括端点a和b，叫做开区间，记作(a,b)。

（2）包括端点a，b在内的全体实数，即满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$，叫做闭区间，记作$[a,b]$。

（3）满足不等式$a\leqslant x<b$的全体实数，叫做左闭右开区间，记作$[a,b)$。

（4）满足不等式$a<x\leqslant b$的全体实数，叫做左开右闭区间，记作$(a,b]$。

以上称为有限区间。此外还有无限区间。（记号∞表示无穷大）。

$(-\infty,+\infty)$或$-\infty<x<+\infty$，是指全体实数组成的区间，即整个实数轴。

$(-\infty,a)$或$-\infty<x<a$，是指小于a的全体实数组成的区间。

$(a,+\infty)$或$a<x<+\infty$，是指大于a的全体实数组成的区间。

$[a,+\infty)$或$a\leqslant x<+\infty$，是指大于等于a的全体实数组成的区间。

$(-\infty,a]$或$-\infty<x\leqslant a$，是指小于等于a的全体实数组成的区间。

有了区间定义以后，函数的定义域就可以用区间表示了。如果函数$y=f(x)$，在某个区间上每一个x都有定义，而在区间外都无意义，称该区间为函数$y=f(x)$的定义域。

求解析表达式的函数定义域一般有以下几种情况：

①当函数为整式时，它的定义域是全体实数；

②当函数为偶次根式时，它的定义域由根号内的函数式大于等于0的实数组成；

③当函数为分式时，它的定义域由分母等于0以外的实数组成；

④当函数为对数时，它的定义域由真数表达式大于0的实数组成；

⑤三角函数与反三角函数定义域，见基本初等函数一节。

〔例10〕：求函数$f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\lg(5-x)$的定义域。

解：①二次根式内的函数式必须大于等于0，

即：　　$x-2\geqslant 0$　　$\therefore x\geqslant 2$

②分式的分母等于0的数除外，

即：　　$x-3\neq 0$　　$x\neq 3$　的一切实数。

③对数式的真数表达式大于0，

即：　　$5-x>0$　　$\therefore x<5$

然后找出它们的公共部分，得

$2\leqslant x<3$和$3<x<5$

或者写成〔2，3）（3，5）该二区间即为f（x）的定义域。

4．分段函数

高等数学中所讨论的函数，有时用一个式子来表示，有时用几个式子来表示。这是因为在生产实践中，只用一个式子未必能把函数表示出来，而且这样情形还为数不少。上述例5就是这样的函数。

〔例11〕：公共汽车收费按一站到三站收费5分，四站到六站收费1角，七站到九站收费1.5角，九站以上收费2角，试将收费情况与乘车站数用函数关系表示出来。

解：用S表示站数（或里程）运费用y表示，收费规则为：

$0 < S \leqslant 3$　收费0.5角

$3 < S \leqslant 6$　收费 1 角

$6 < S \leqslant 9$　收费1.5角

$9 < S$　收费 2 角

这时，运费y和站数(里程)S的关系：

$$y=\begin{cases}0.5 & 0<S\leqslant 3\\ 1 & 3<S\leqslant 6\\ 1.5 & 6<S\leqslant 9\\ 2 & 9<S\end{cases}$$

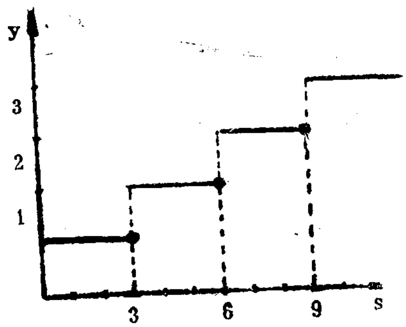

图 1.2

其图形见图1.2，叫做阶梯函数。

〔例12〕：铁路上包裹的运价一方面因里程而变，另一方面又因重量而变，如果按：里程在50公里以内时，根据包裹的重量W(公斤)，按下列条款收费：

$0 < W \leqslant 5$时，每公斤收费0.1元

$5 < W \leqslant 50$时，每公斤收费0.15元（超过5公斤部分）

这时运费y对于重量W的函数是：

$$y=\begin{cases}0.1\times W & 0<W\leqslant 5\\ 0.1\times 5+0.15\times(W-5) & 5<W\leqslant 50\end{cases}$$

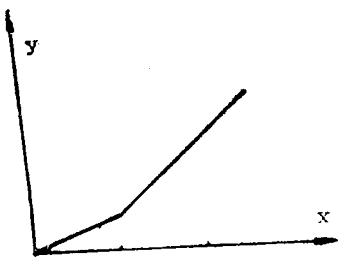

图 1.3

画出它的图形(图1.3),叫做折线函数。

对分段函数求函数值时，一定要注意对于不同点的函数值应代入相应的公式中去。25公里的收费数就应代入$5 < W \leqslant 50$所对应的公式$0.1\times 5+0.15\times(W-5)$中，而不能代入公式$0.1\times W$中。

〔例13〕：　$y=f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$

这是实数x绝对值的表达式，定义域为$(-\infty,+\infty)$，其函数图形见图1.4。

〔例14〕：

$$y=\begin{cases}2 & x<0\\ 0 & x=0\\ x-2 & x>0\end{cases}$$

它的定义域（$-\infty,+\infty$），其函数图形见图1.5

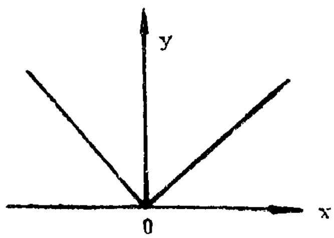

图 1.4

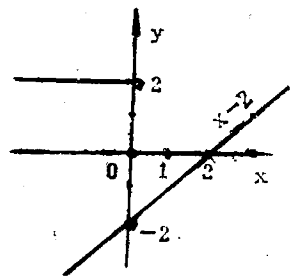

图 1.5

三、函数的性态

下面我们介绍一下，在讨论函数时，经常用到的几个概念。

1．函数的单调性

定义1：如果在区间(a,b)内任取二点$x_1<x_2$，都有$f(x_1)<f(x_2)$〔或$f(x_1)>f(x_2)$〕，则称$y=f(x)$在区间(a,b)内为单调增加（或单调减少）函数。区间(a,b)称为函数$y=f(x)$的单调区间，单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数。

函数的单调性永远是对区间而言的，脱离开区间笼统地谈论函数的单调性就错了。

〔例15〕：讨论$f(x)=x^2$的单调性

解：函数$f(x)=x^2$的定义域（$-\infty,+\infty$）。在（$-\infty,+\infty$）内任意取二点x_1和x_2．且$x_1<x_2$

则 $f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1)$

根据单调性定义知：

若 $f(x_2)-f(x_1)>0$为增加函数，即

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2+x_1)(x_2-x_1)>0$$

当x_1和x_2在（$0,+\infty$）区间内取值时，且$x_1<x_2$，永远有$(x_2+x_1)(x_2-x_1)>0$，所以$f(x)=x^2$在区间（$0,+\infty$）内是增加函数。

当x_1和x_2在（$-\infty,0$）区间内取值时，且$x_1<x_2$永远有$(x_2+x_1)(x_2-x_1)<0$，所以$f(x)=x^2$在区间（$-\infty,0$）内是减少函数。

2．函数的有界性

定义2：如果对于区间(a,b)内所有x，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，其中M是一个与x无关的正数，则称$f(x)$在区间(a,b)内有界。

反之，如果对于任意给定的正数G，在区间(a,b)内恒有这样的x存在，使

$$|f(x)|>G$$

则称函数f（x）在区间（a,b）内无界。

函数 $y=\frac{1}{x}$ 在不包括零点的任意闭区间上都是有界的，而在（$-\delta$，0）与（0，δ）（δ为任意小的正数）上都是无界的。

3．函数的奇偶性

定义3：如果函数 $y=f(x)$ 在（a,b）内有定义，$-x$ 也在（a,b）内，满足 $f(-x)=f(x)$ 则称这个函数为偶函数，如果满足

$$f(-x)=-f(x)$$

则称这个函数为奇函数。

如 $f(x)=x^2$ 和 $\varphi(x)=x^3$，它们的定义域都是（$-\infty$，$+\infty$），由于 $(-x^2)=x^2$ 和 $(-x^3)=-x^3$，所以

$$f(-x)=f(x)$$

$$\varphi(-x)=-\varphi(x)$$

即 $f(x)=x^2$ 为偶函数，$\varphi(x)=x^3$ 为奇函数。

4．函数的周期性

定义4：对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为0正的常数T，对一切x恒满足 $f(x)=f(x+T)$ 则称函数f（x）为周期函数，T为f（x）的周期。

如sinx　cosx 是以2π为周期的周期函数，tgx是以π为周期的函数。

周期函数的周期通常是指使得 $f(x+T)=f(x)$ 成立时最小的正数T。周期T的求法如下：

按周期定义　$f(x)=f(x+T)$　或

$$f(x)-f(x+T)=0$$

把T看成未知量来解，若解出的T依赖于自变量x或等于0，则f（x）不是周期函数；若求出的T不依赖于x或不等于0，则最小的正数解，就是周期。

〔例16〕：判别 $f(x)=\sin^2x$ 是否为周期函数？如果是周期函数，并求出周期来。

解：
$$\begin{aligned}f(x+T)-f(x)&=\sin^2(x+T)-\sin^2x\\&=[\sin(x+T)+\sin x][\sin(x+T)-\sin x]\\&=0\end{aligned}$$

所以　$\sin(x+T)+\sin x=0$　　即　$\sin(x+T)=-\sin x$

　　　$\sin(x+T)-\sin x=0$　　即　$\sin(x+T)=\sin x$

若取 $T=\pi$（不赖于x）则 $\sin(x+T)=-\sin x$ 成立，取 $T=2\pi$ 则 $\sin(x+T)=\sin x$ 成立。所以，$T=\pi$，$T=2\pi$ 才能使 $f(x)-f(x+T)=0$ 成立，其中最小者为 $T=\pi$，所以 $f(x)=\sin^2x$ 是周期函数，且周期为π。

〔例17〕：判别 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 是否为周期函数？

解：$f(x+T)-f(x)=\sin\frac{1}{x+T}-\sin\frac{1}{x}$

$$=-2\sin\frac{T}{2\times(x+T)}\cos\frac{2x+T}{2\times(x+T)}$$

若T为周期，则有

$$\sin\frac{T}{2\times(x+T)}=0$$

或 $$\cos\frac{T}{2\times(x+T)}=0 \quad 则\frac{T}{2\times(x+T)}=K\pi\ (K=0,\pm1\cdots\cdots)$$

则 $T=2\times K\pi(x+T)$ $\quad\therefore\ T=\frac{2K\pi x^2}{1+2K\pi x}$

说明T是依赖X的，同理可讨论 $\cos\frac{2x+T}{2\times(x+T)}=0$ 中的T也是依赖于x的，所以 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 不是周期函数。

5．反函数

一个变化过程中有两个变量，一般来讲很难说哪一个是主动变化的，哪一个是被动变化的。圆的面积S随着半径R的变化而变化，当然也可以说圆的半径是随着圆的面积S变化而变化。前一种说法，S是R的函数，记作

$$S=f(R)$$

而后一种说法，R又是S的函数，记作

$$R=\varphi(S)$$

如果把 $S=f(R)$ 叫做直接函数，那末 $R=\varphi(S)$ 和前边的关系恰好相反，所以把 $R=\varphi(S)$ 叫做直接函数 $S=f(R)$ 的反函数。

定义5：如果在已给的函数 $y=f(x)$ 中，若把y看作自变量，x看作因变量，则所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做 $y=f(x)$ 的反函数。

$y=f(x)$ 与 $x=f(y)$ 互为反函数。

因为习惯上通常把自变量记作x，因变量记作y，所以把 $x=\varphi(y)$ 也可以写成 $y=\varphi(x)$，其中对应规律不变。

为了便于区别，如果把 $y=f(x)$ 叫做直接函数，$x=\varphi(y)$ 叫做 $y=f(x)$ 的本义反函数，则 $y=\varphi(x)$ 叫做 $y=f(x)$ 的矫形反函数。直接函数与本义反函数图形在同一坐标系下是一致的。而矫形反函数与直接函数的图形在同一坐标系下是以 $y=x$ 直线为对称轴的。其实通常所称的反函数是指矫形反函数。

读者不妨将下列函数图形作出来加以对比。函数 $y=2x+1$ 叫做直接函数，其本义反函数为 $x=\frac{y-1}{2}$，则矫形反函数为 $y=\frac{x-1}{2}$。

§1.2 基本初等函数及其图形

在实际问题中，函数的形式是比较复杂的，但是经过仔细观察与分类以后，我们会发现任一函数都是由最简单、最基本的函数即幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数所构成。这五种函数统称为基本初等函数。

一、幂函数

形如$y=x^n$（n为实数）的函数称为幂函数。当$n=0$时，$y=x^0=1$，其图形是平行x轴，过点（0,1）的一条直线。

当$n=1$时，$y=x$，其图形是第一、三象限的角分线。

当$n=2$时，$y=x^2$，其图形是抛物线。

当$n=3$时，$y=x^3$，其图形是立方抛物线。见图1.6

当$n=-1$时，$y=x^{-1}=\frac{1}{x}$称反比函数，其图形是双曲线。见图1.7。

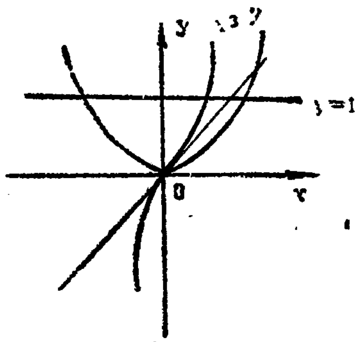

图 1.6

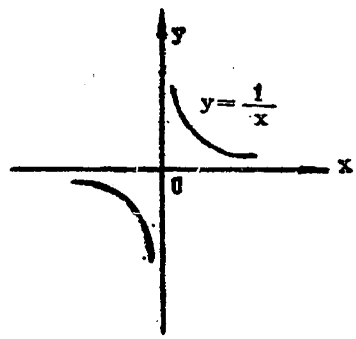

图 1.7

我们知道$y=x$，$y=x^3$是奇函数，从图形上可以发现，奇函数是以原点为对称的。$y=x^2$是偶函数，它的图形是以oy轴为对称轴的。

二、指数函数

形如$y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）的函数称为指数函数。其定义域（$-\infty$，$+\infty$）。常用的指数函数有$y=e^x$和$y=(\frac{1}{e})^x=e^{-x}$，$e=2.71828\cdots\cdots$是无理数。$y=e^x$和$y=e^{-x}$的图形见图1.8

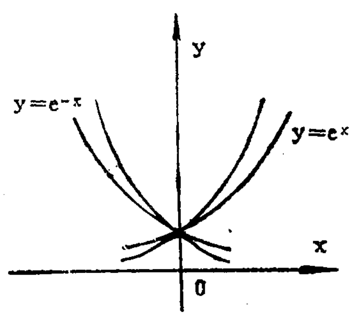

图 1.8

指数函数的特点：

1^0、不论x取任何实数，y总是正数，因此曲线位于Ox轴上方；

2^0、当$x=0$时，$y=e^0=1$，图形通过点（0,1）；

3^0、$y=e^x$的值随着x增大而增大，随着x减小而减小。

对于一般指数函数$y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）都有1^0和2^0的特点。当$a>1$时$y=a^x$的值随着x增大而增大，当$0<a<1$时，$y=a^x$的值随着x增大而减小。

三、对数函数

形如$y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$) 的函数称为对数函数。根据对数定义，$y=\log_a x$ 可以写成 $x=a^y$它和指数函数 $y=a^x$ 仅仅差在因变量与自变量互换。所以指数函数 $y=a^x$ 的矫形反函数叫做对数函数。$y=\log_a x$的图形和 $y=a^x$的图形是以直线 $y=x$为对称轴，因为$y=a^x$在x轴上方，则$y=\log_a x$ 的图形在 y 轴的右侧，见图1.9

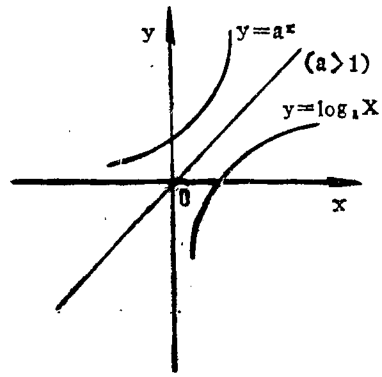

图 1.9

由此可知，$y=\log_a x$($a>0$ $a\neq 1$)的定义域为$(0, +\infty)$。

当 $a=10$时，$y=\log_{10}x$记作 $y=\lg x$，叫做常用对数。当 $a=e$时，$y=\log_e x$记作$y=\ln x$，叫做自然对数，也叫做讷伯尔对数。

四、三角函数

1．正弦函数

$y=\sin x$ 称为正弦函数，定义域 $(-\infty, +\infty)$ 。由于$\sin(-x)=-\sin x$，因此正弦函数是奇函数。又因为$\sin(x+2\pi)=\sin x$，所以正弦函数又是以 2π为周期的周期函数。函数y的值域为$[-1,1]$，其图形称为正弦曲线，见图 1.10

2．余弦函数

$y=\cos x$称为余弦函数，定义域 $(-\infty, +\infty)$ 。由于 $\cos(-x)=\cos x$，因此余弦函数是偶函数，它也是以2π为周期的周期函数。y的值域为$[-1,1]$，其图形称做余弦曲线，见图 1.11。

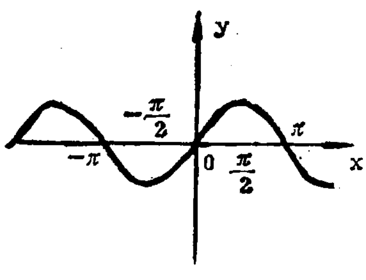

图 1.10

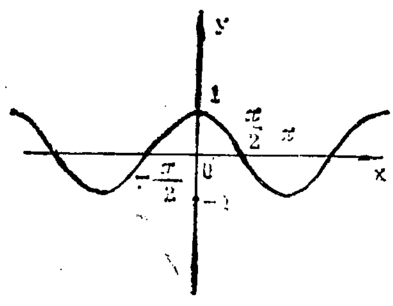

图 1.11

3．正切函数

$y=\mathrm{tg}x$ 称为正切函数，定义域是实数轴上除去 $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ ($n=0$，±1，±2，……) 的点所组成。因为$\mathrm{tg}(-x)=-\mathrm{tg}x$，所以它是奇函数。它是以$\pi$为周期的周期函数。其图形有无穷多支，也称为多支函数。见图1.12

4．余切函数

$y=ctgx$称为余切函数，定义域为实数轴上除去$x=n\pi$（$n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$）的各点所组成。因为ctg（-x）＝－ctgx，所以是奇函数，它也是以π为周期的周期函数，其图形也有无穷多支，也是多支函数。见图1.13

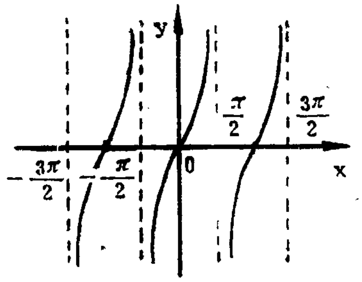

图 1.12

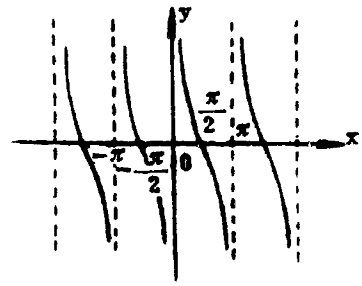

图 1.13

其它的三角函数及其三角公式这里就不介绍了。希望读者参考中学的三角课本。

五、反三角函数

常用的反三角函数有

$y=\text{Arcsin}x$，　$y=\text{Arccos}x$，　$y=\text{Arctg}x$，　$y=\text{Arcctg}x$。

1．$y=\text{Arcsin}x$称为反正弦三角函数。定义域是〔-1,1〕。因为它也有无穷多支，是一多值函数。为了研究方便起见，规定$y=\arcsin x$的值只取区间〔$-\pi/2,\pi/2$〕内的数值，称它为反正弦函数的主值，用arcsinx表示，即$-\pi/2\leqslant\arcsin x\leqslant\pi/2$，其图形见图1·14

2．$y=\text{Arccos}x$称为反余弦函数，定义域是〔-1,1〕，其主值$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$。其图形见图1.15

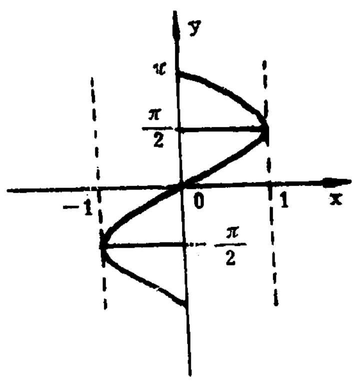

图 1.14

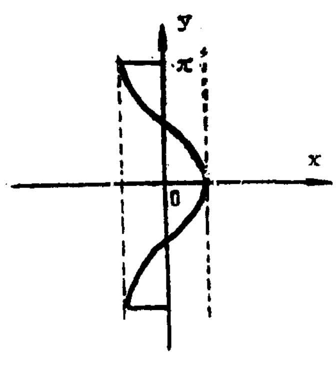

图 1.15

3．$y=\text{Arctg}x$称为反正切函数，定义域是$(-\infty,+\infty)$，其主值$-\pi/2<\text{arctg}x<\pi/2$，图形见图1·16

4．$y=\text{Arcctg}x$ 称为反余切函数，定义域是$(-\infty,+\infty)$，其主值$0<\text{arcctg}x<\pi$，图形见图1·17