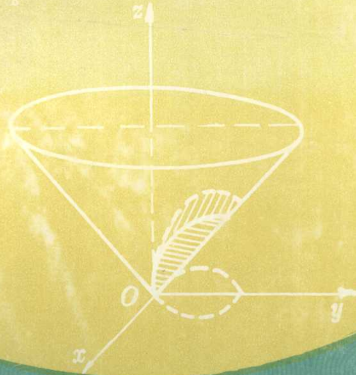

空间解析几何与微积分

鲁 石

陕西人民教育出版社

空间解析几何与微积分

高等学校试用教材

空间解析几何与微积分

鲁 石 编著
李元中 审校

陕西人民教育出版社

（陕）新登字004号

空间解析几何与微积分
鲁 石
陕西人民教育出版社出版发行
（西安长安路南段376号）
陕西省新华书店经销 陕教社印刷厂印刷
850×1168毫米 1/32开本 15印张 402千字
1994年8月第1版 1994年8月第1次印刷
印数：1—1000
ISBN 7—5419—3746—0／G·3227
定价：9.95元

前　言

空间解析几何与微积分是高等数学的基本内容。一般认为内容抽象、难懂、难教。作者根据多年的教学经验，参考了大量国内外最新有关资料，编写了本教材。内容有空间解析几何与向量代数、函数的极限与连续性、一元函数微分学、多元函数微分学不定积分、定积分、重积分等，各节均配有适量习题。书末附有参考答案。

讲授本书内容需90学时左右。

初稿曾在陕西师大20多个班级使用，许多报考研究生的考生也作为参考书，得到了广大学生和教师的肯定与支持。在广泛征求学生和同仁们意见的基础上，作者作了多次修改，后经李元中教授审校而定稿。

本教材在内容和结构上作了精心选择与安排，多用几何直观和实际意义讲理论，结合例子讲方法、讲思路，注重实际应用，深入浅出，通俗易懂，易教易学，适用于大专及本科非数学专业，更适合电大、职大、夜大、函大和自学高等数学者。

范秀云同志绘制了全部插图。

目　录

第一章　空间解析几何与向量代数初步

第二章　函数的极限与连续性

第三章　一元函数微分学

第四章　导数的应用

第五章　多元函数微分学

第一章　空间解析几何与向量代数初步

§1.1　空间点的直角坐标

在平面解析几何中，通过建立平面坐标系，使平面上的点与有序实数对建立了对应关系，从而使平面曲线与方程联系起来，于是，可以利用代数方法解决平面几何问题，同时也给出了代数方程的平面几何解释。同样，为了利用代数方法解决空间几何问题，并且给代数方程一定的空间几何解释，我们必须先建立空间坐标系，使空间中的点与数建立对应关系，从而使空间图形与方程联系起来。

一、空间直角坐标系

在空间适当选一点o，以o为公共原点作三条两两互相垂直的数轴ox、oy和oz，就建立了一个空间直角坐标系$o-xyz$。数轴ox、oy和oz（简称为x轴、y轴和z轴）称为坐标轴；点o称为坐标原点；每两条坐标轴所确定的平面，即oxy平面、oyz平面和oxz平面，称为坐标平面。

习惯上（如图1—1—1所示），把x轴和y轴取在水平面上。x轴称为横轴，并规定向前的方向为其正向。y轴称为纵轴，向右的方向为其正向。z轴取在铅垂线上，称为立轴，向上的方向为其正向。这种坐标系称为右手系。

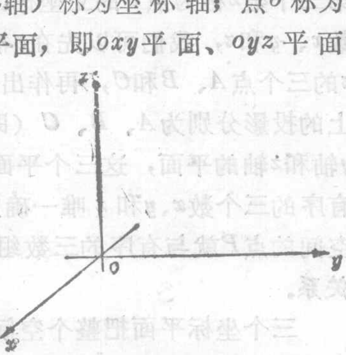

图1—1—1

例如，教室里的一个角可视为一个直角坐标系，其中地面相当于oxy坐标面，两个相邻的墙壁相当于oxz坐标面和oyz坐标面，这两个墙壁的交线相当于z轴，而墙壁与地面的交线相当于x轴和y轴。

二、空间点的直角坐标

我们知道，直线上一点的位置可以用一个数来确定；平面上一点的位置，可以用有序的两个数来确定。类似地，空间一点的位置，可以用有序的三个数来确定。例如，要说明某时刻空中一架飞机的位置，如果只说明多高，或者只说明离机场多远，都不能精确地说明飞机的位置。但如果说，飞机在以机场为基点，向东200米，向北300米，离地面400米处，就精确地说明了飞机的位置。

建立了空间直角坐标系，空间的点就可以用有序的三个数来表示。设点P为空间任意的一点，作出点P在各坐标轴上的投影。即过点P分别作垂直于x轴、y轴和z轴的三个平面。它们分别与三个坐标轴的交点A、B、C就是P在x轴、y轴、z轴上的投影（图1—1—2）。若点A、B和C在三个坐标轴上的坐标分别为x、y和z，则三个有序的数x、y和z称为点P的坐标，记为$P(x,y,z)$，其中第一个数x称为点P的横坐标，第二个数y称为点P的纵坐标，第三个数z称为点P的立坐标。反过来，若任意给定有序的三个数x、y和z，我们可以先在x轴、y轴和z轴上分别取坐标为x、y和z的三个点A、B和C，再作出空间点P，使得P在x轴、y轴和z轴上的投影分别为A、B、C（即过点A、B和C分别作垂直于x轴、y轴和z轴的平面，这三个平面的交点就是P）。于是，点P由有序的三个数x、y和z唯一确定，其坐标为(x, y, z)。这样，空间的点P就与有序的三数组(x, y, z)之间建立了一一对应关系。

三个坐标平面把整个空间分成八个部分，每个部分称为一个卦限。其顺序规定如图1—1—3所示。即第一、二、三、四

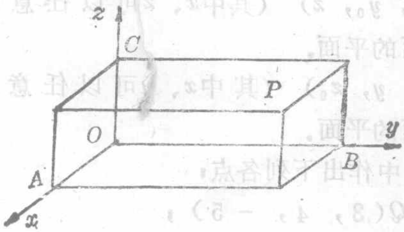

图 1—1—2

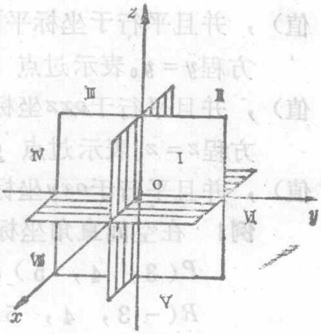

图 1—1—3

卦限在坐标平面oxy之上，其顺序与坐标平面oxy上各象限的顺序相同，而第五、六、七、八卦限在坐标平面oxy之下，依次排在第一、二、三、四卦限的下面。

显然，各个卦限内点的坐标符号分别为：Ⅰ（+，+，+）；Ⅱ（-，+，+）；Ⅲ（-，-，+）；Ⅳ（+，-，+）；Ⅴ（+，+，-）；Ⅵ（-，+，-）；Ⅶ（-，-，-）；Ⅷ（+，-，-）。

原点的坐标为（0，0，0）；x轴、y轴和z轴上点的坐标形式分别为（x，0，0）；（0，y，0）和（0，0，z）；坐标平面oxy、oyz和oxz上点的坐标形式分别为（x,y,0）、（0，y，z）和（x，0，z）。

注意，图1—1—2中的点A，虽然它在x轴上的坐标是x，但是它的空间直角坐标却是（x，0，0），而不是x。

在空间直角坐标系中，方程$x=0$表示坐标平面oyz。因为坐标平面oyz上任意点的横坐标都是0；反之，凡是横坐标为0的点都在该平面上。也就是坐标平面oyz是横坐标满足方程$x=0$的点的集合。同理，方程$y=0$、$z=0$，分别表示坐标平面oxz和oxy。

方程$x=x_0$表示过点（x_0，y，z）（其中y、z可以任意取

值），并且平行于坐标平面oyz的平面；

方程$y=y_0$表示过点（x，y_0，z）（其中x、z可以任意取值），并且平行于oxz坐标面的平面。

方程$z=z_0$表示过点（x，y，z_0）（其中x、y可以任意取值），并且平行于oxy坐标面的平面。

例1 在空间直角坐标系中作出下列各点：

$P(3,\ 4,\ 5)$；$Q(3,\ 4,\ -5)$；

$R(-3,\ 4,\ 5)$；$S(3,\ -4,\ -5)$。

解 如图1—1—4所示。先在坐标平面oxy上作出坐标为（3，4，0）的点P'。再过点P'作z轴的平行线，在这平行线上向上量5个单位即得点P，向下量5个单位即得点Q；在坐标平面oxy上作出坐标为（−3，4，0）的点R'，再过点R'作z轴的平行线，在这平行线上向上量5个单位就得点R；在坐标平面oxy上作出坐标为（3，−4，0）的点S'，再过点S'作z轴的平行线，在这平行线上向下量5个单位就得点S。

这几个点之间，点P与点Q关于坐标平面oxy对称；点P与

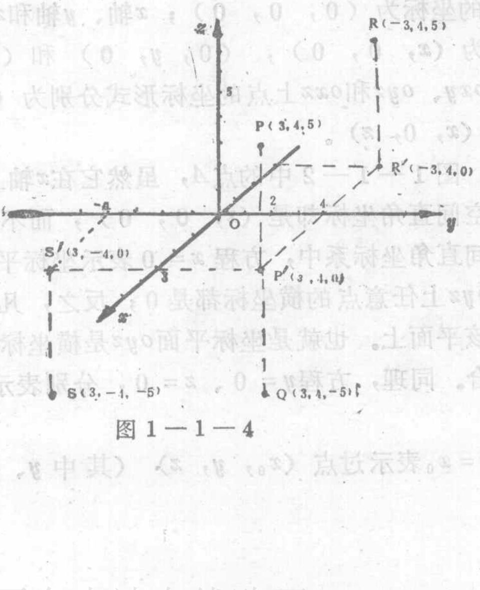

图1—1—4

点R关于坐标平面oyz对称；点Q与点S关于坐标平面oxz对称；点P与点S关于x轴对称；点Q与点R关于y轴对称；点R与点S关于坐标原点o对称。

一般说，两个点关于某平面（或轴）对称，是指这两点的连线垂直于该平面（或轴）且被该平面(或轴)所平分；两个点关于某个点对称，是指这两个点的连线通过该点且被该点所平分。

三、空间两点之间的距离

如图1—1—5所示。设空间有两点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$，求这两点间的距离d。设M_1和M_2在oxy平面上的投影分别为m_1和m_2，显然，它们的坐标分别为$(x_1, y_1, 0)$和$(x_2, y_2, 0)$。过M_1作直线M_1M_3平行于m_1m_2，并且交m_2M_2于M_3，由于$\angle M_1M_3M_2$为直角，所以$\triangle M_1M_3M_2$为直角三角形，故由勾股定理得

$$d=\sqrt{(M_1M_3)^2+(M_3M_2)^2}$$
$$=\sqrt{(m_1m_2)^2+(M_3M_2)^2}. \qquad (1.1.1)$$

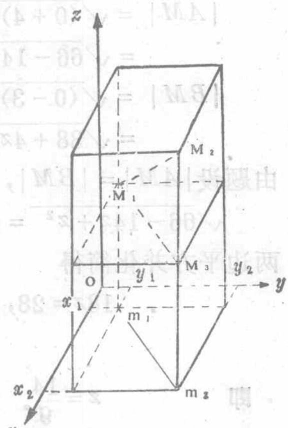

图1—1—5

因为点m_1和m_2都在oxy平面上，并且在平面直角坐标系oxy中的坐标分别是(x_1, y_1)和(x_2, y_2)，所以，由平面直角坐标系中两点间的距离公式得

$$(m_1m_2)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \qquad (1.1.2)$$

又由图1—1—5可以看出

$$m_2M_3=m_1M_1=z_1,$$
$$M_3M_2=m_2M_2-m_2M_3=z_2-z_1,$$

所以，$(M_3M_2)^2=(z_2-z_1)^2$. $\qquad$ (1.1.3)

将(1.1.2)、(1.1.3)代入(1.1.1)中，得空间直角坐标系中两点间的距离公式为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\text{。}$$

即，两点的同名坐标差的平方和之平方根就是这两点间的距离。显然，它是平面上两点间距离公式的推广。

由此公式可得空间一点$P(x, y, z)$和原点$O(0, 0, 0)$之间的距离公式为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\text{。}$$

例2 在z轴上，求与点$A(-4, 1, 7)$和点$B(3, 5, -2)$距离相等的一点。

解 设所求的点为M。因为M在z轴上，所以它的坐标可写成$(0, 0, z)$，其中z是待定的数。由两点间的距离公式得

$$|AM|=\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}$$
$$=\sqrt{66-14z+z^2},$$
$$|BM|=\sqrt{(0-3)^2+(0-5)^2+(z+2)^2}$$
$$=\sqrt{38+4z+z^2},$$

由题设$|AM|=|BM|$，得

$$\sqrt{66-14z+z^2}=\sqrt{38+4z+z^2},$$

两边平方并化简得

$$18z=28,$$

即
$$z=\frac{14}{9}\text{。}$$

从而所求的点为$M(0, 0, \frac{14}{9})$。

习 题 1—1

1．在空间直角坐标系中，作出下列各点

$A(2, 0, 0)$、$B(0, 3, 4)$、$C(2, 3, 0)$、$D(2, -3,$

-4)、$E(-2, 3, 4)$、$F(2, 3, 4)$、$G(4, 4, 4)$、$H(-4, -4, -4)$。

2. 求点$M(a, b, c)$的对称点的坐标：(1) 分别关于各坐标平面对称；(2) 分别关于各坐标轴对称；(3) 关于坐标原点对称。

3. 求点$P(4, -3, 5)$分别到

(1) 坐标原点、(2) 各坐标轴、(3) 各坐标平面的距离。

4. 试证以$A(4, 1, 9)$、$B(10, -1, 6)$、$C(2, 4, 3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形。

5. 指出下列各点位置的特点。

(1)$(4, 0, 0)$；(2)$(0, -7, 0)$；(3)$(0, -7, 2)$；(4)$(-5, 0, 3)$。

6. 在oyz平面上求一点，使得它与点$A(3, 1, 2)$、$B(4, -2, -2)$及$C(0, 5, 1)$等距离。

§1.2 向量代数初步

一、向量概念

有许多量，在取定单位之后，用一个实数就可以表示。如某物体质量是300克，某个三角形面积是15厘米²，某地昨天的最高气温是35℃等等，这种只有大小的量称为标量，或称为数量。

另外也有许多量，用一个实数是不能完全表示的。例如位移，向东走10里和向西走10里，虽然都走了10里，但方向不同，其效果也不同。又例如力，用同样大的力，是推着一个车子前进，还是拉着车子后退，还是从侧面把车子推倒，其结果很不一样，这里力的方向在起作用。当然，沿同一方向，用大小不同的力作用，效果也是不同的。象这种既有大小又有方向的量称为向量或矢量。除位移、力以外，速度、加速度等也都是向量。

在数学中常用字母a、b…等表示数量，而在字母上面加上一个箭头表示向量，如$\vec{a}$、$\vec{b}$、…等表示向量。有时也用符号$\overrightarrow{AB}$表示向量，这时，这个向量的起点是A，终点是B，是沿着由A到B的方向。如果是$\overrightarrow{BA}$，则表示向量的起点是B，终点是A，它的方向是从B到A。

向量的大小我们称为模，用记号$|\vec{a}|$或$|\overrightarrow{AB}|$表示$\vec{a}$或$\overrightarrow{AB}$的模，它是数量。模等于1的向量叫单位向量；模等于零的向量叫零向量，记作$\vec{0}$。

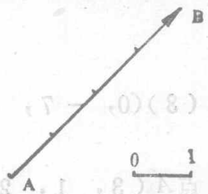

图1—2—1

在几何上，用一个带箭头的线段表示向量。如图1—2—1所示。线段的长度表示向量的大小，箭头的方向表示向量的方向。用这种方法表示向量就更直观了。

向量有两个要素：大小和方向。两个向量$\vec{a}$、$\vec{b}$，如果模相等，方向相同，则称为相等向量，记作$\vec{a}=\vec{b}$。

一个向量，只经过平行移动，即大小和方向都不变，还认为是同一个向量。也就是说，向量与起点位置无关。因此，我们现在所讨论的向量也称为自由向量。

二、向量的加、减运算

1．向量的加法

由物理学知道，如果有两个力$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$同时作用在某物体的重心上。如图1—2—2所示。那么，这两个力作用的效果与另外一个力$\vec{F}$作用的效果相同，这个力$\vec{F}$的方向是以$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$为邻边的平行四边形对角线方向，其大小刚好等于对角线的长度，如图1—2—3所示。

我们把$\vec{F}$叫做$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$的合力，并且记作

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2.$$

抽去力的物理意义，就得到如下的向量加法运算的平行四边

形方法。

两个向量 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 之和 $\vec{a}+\vec{b}$ 是一个向量，它的大小等于以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为邻边的平行四边形对角线的长（图 1—2—4），方向是

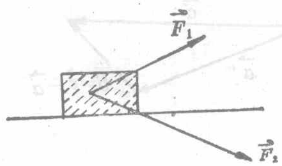

图 1—2—2

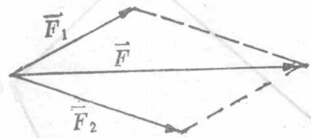

图 1—2—3

从 $\vec{a}$ 的起点指向对角线的另一端点。

或者如图 1—2—5 所示，将 $\vec{b}$ 平移，并把 $\vec{b}$ 的起点放在 $\vec{a}$ 的终点上，则由 $\vec{a}$ 的起点到 $\vec{b}$ 的终点的向量就是 $\vec{a}+\vec{b}$。这个方法叫三角形法。

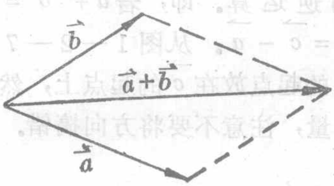

图 1—2—4

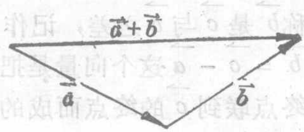

图 1—2—5

求多个向量的和，当然可以逐个去加，但这样作比较麻烦，可如图 1—2—6 所示，用折线法一次作出，即

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}.$$

向量加法满足下列运算规律：

（1）交换律　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；

（2）结合律　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$。

这和实数加法的运算规律一样。这些运算规律读者很容易从图上加以验证。

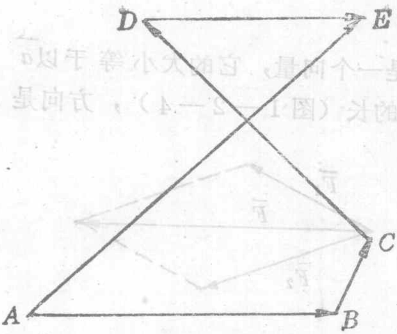

图 1—2—6

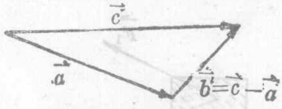

图 1—2—7

要注意，一般$\vec{a}+\vec{b}$的模并不等于$\vec{a}$的模加$\vec{b}$的模，而有

$$|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|.$$

这称为三角不等式，它表示三角形两边之和不大于第三边。

2．向量的减法

向量的减法可以看作向量加法的逆运算．即，若$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$，则称$\vec{b}$是$\vec{c}$与$\vec{a}$之差，记作$\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}$．从图1—2—7可以看出$\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}$这个向量是把$\vec{a}$的起点放在$\vec{c}$的起点上，然后从$\vec{a}$的终点联到$\vec{c}$的终点而成的向量，注意不要将方向搞错。

3．数乘向量

一个数乘上一个向量就是将这个向量伸长、缩短或反向。

定义 实数λ与向量$\vec{a}$的乘积$\lambda\vec{a}$是一个向量，它的模$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$，$\lambda\vec{a}$的方向是：当$\lambda>0$时与$\vec{a}$相同，当$\lambda<0$时与$\vec{a}$相反；当$\lambda=0$时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$，方向任意。

例如，已知$\vec{a}$，那么，$2\vec{a}$和$-\frac{3}{2}\vec{a}$为如图1—2—8所示的向量。

容易证明，数乘向量满足下列运算规律：

（1）结合律

$$\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}.$$