《走进衡中》系列丛书

中国十大名牌中学
中国百强中学

衡水中学
高效学习方略

主编 衡水中学校长 张文茂

内部学案·理数

（高三总复习一轮）

河北教育出版社

丛 书 主 编：张文茂
丛书副主编：康新江　王建勇　郗会锁　王治军　王建鹏　张桂安
本 册 主 编：褚艳春
本册副主编：孙金宁　王　琳　卢红兰　刘静祎　王福胜
编　　　委：刘洪生　于文海　蒯　彦　孙　杰　蔡一政　赵立新
王丽娜　孟　严　康红叶　徐源航　张丽秀　王　辛
郑立新　陈铁乱　宁　芳　吴素丽

河北衡水中学
HENGSHUI HIGH SCHOOL HEBEI

中国十大名牌中学
中国百强中学

《走进衡中》系列丛书

衡水中学

高效学习方略

内部学案·理数

河北教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

衡水中学高效学习方略．高三总复习一轮·数学．理科/张文茂主编．
—石家庄：河北教育出版社，2008.5
（走进衡中系列丛书）
ISBN 978-7-5434-6913-6
Ⅰ.衡… Ⅱ.张… Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料
Ⅳ.G634
中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第046314号

《走进衡中》系列丛书

高效学习方略

XIAO XUE XI FANG LUE

内部学案·理科数学

走进衡中·衡水中学高效学习方略　高三总复习一轮·理科数学

丛书主编：张文茂

责任编辑：赵中伟

封面设计：河北衡中文化发展有限公司

版式设计：河北衡中文化发展有限公司

出　　版：河北教育出版社

地　　址：河北省石家庄市联盟路705号　邮编：050061

发　　行：河北衡中文化发展有限公司

电　　话：0318—6889880

印　　刷：衡水华源印刷厂

开　　本：880×1230　1/16

印　　张：19.5　　字数：624 千字

版　　次：2008年5月 第1版　印次：2008年5月 第1次

书　　号：ISBN978-7-5434-6913-6

定　　价：43.00元

经验分享　共同探讨

目录

Contents

第一章 集合与简易逻辑

第二章 函数

第三章 数列

第四章　三角函数

第五章　平面向量

第六章　不等式

第七章　直线和圆的方程

注：带 * 的为 B 版教材特有

第一章　集合与简易逻辑

第1课时　集合的概念

最新考纲

1. 理解集合、子集的概念.
2. 了解空集和全集的意义.
3. 了解属于、包含、相等关系的意义.
4. 掌握有关的术语和符号，并会用他们正确的表示一些简单的集合.

知识再现

1. 集合的含义

一般地，________就成为一个集合，简称集，集合用大写的拉丁字母表示.

2. 集合中元素的三要素

①确定性：对于一个给定的集合，任何一个对象，或者是这个集合中的元素，或者不是它的元素，这是集合的最基本的特征；

②互异性：集合中的任何两个元素都是能区分的(即互不相同的)，________对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合的________元素；

③无序性：在一个集合中，通常不考虑它的元素之间的顺序，也就是说$\{a,b,c\}=\{b,c,a\}$.

3. 集合的分类

①有限集：元素的个数是________个；

②无限集：元素的个数是________个；

③空集($\varnothing$)：不含任何元素的集合.

4. 常见数集符号

自然数集________，正整数集________或________，整数集________，有理数集________，实数集________，复数集________.

5. 集合的表示方法

①列举法：把集合中的所有元素一一列举出来，写在________内，________常用列举法表示.

②描述法：把集合中所有元素的公共属性用文字或数学式子描述出来，写在大括号内. 无限集常用描述法表示，用描述法表示要注意"代表元素"的符号及属性.

此外，集合的表示法还有区间表示和韦恩图表示.

6. 如果任取$a\in A$，都有________，则称A是B的子集，记作________

如果$A\subseteq B$，且存在$b\in B$，但________，则称A是B的真子集，记作________

7. 含有n个元素的集合共有________个子集，其中有2^n-2个________.

8. 空集$\varnothing$是任意集合的子集，五个关系$0\in\varnothing$、$\varnothing=\{0\}$、$\varnothing\in\{\varnothing\}$、$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$、$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$中的第________个关系是正确的.

【你填对了吗】

1. 某些指定的对象集在一起
2. ②相同的，一个
3. ①有限个
   ②无数
4. $\mathbf{N}$、$\mathbf{N}^*$、$\mathbf{N}_+$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$、C
5. 大括号，有限集
6. $a\in B$，$A\subseteq B$，$b\notin A$，$A\subsetneqq B$.
7. 2^n，非空真子集
8. 3、4、5

精题细讲

【例1】　已知集合$M=\left\{x\mid x=m+\frac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\mid x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$，$P=\left\{x\mid x=\frac{P}{2}+\frac{1}{6},P\in\mathbf{Z}\right\}$，则$M$、$N$、$P$满足的关系是(　　)

A. $M=N\subsetneqq P$　　　B. $M\subsetneqq N=P$

C. $M\subsetneqq N\subsetneqq P$　　　D. $N\subsetneqq P=M$

【分析】　本小题应从集合的概念及整数的性质入手.

【思路点拨】　(1)本小题加大了对集合语言的考查力度，因而难度稍有增加，反映出高考对集合知识考查的新动向，不能总认为集合试题只是送分题.

(2)本题直接解法应从分式结构出发，运用整数奇偶性求解，但由选择题的结构可知，用特殊值法，如取m、n、p等于0、1、2、3…，即可简捷获解，简解就是好解，时间就是分数，这是解数学高考选择题的基本原则.

【解】　方法一：对于集合M：$x=\frac{6m+1}{6}$，$m\in\mathbf{Z}$；对于集合N：$x=\frac{3n-2}{6}=\frac{3(n-1)+1}{6}$，$n\in\mathbf{Z}$；对于集合$P$：$x=\frac{3p+1}{6}$　$P\in\mathbf{Z}$，从而选B.

方法二：列举法

$$M=\left\{\cdots\frac{1}{6},\frac{7}{6},\frac{13}{6},\frac{19}{6}\cdots\right\}$$

$$N=\left\{\cdots-\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{7}{6}\cdots\right\}$$

$$P=\left\{\cdots\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{7}{6},\frac{5}{3}\cdots\right\}$$

$\because\frac{7}{6}\in\mathbf{N}$，$\frac{1}{6}\in\mathbf{N}$，$\therefore M\subseteq N$

又$\because -\frac{1}{3}\notin M$，$\therefore M\subsetneqq N$

$\because -\frac{1}{3}\in \mathbf{N}$，$\therefore N\subseteq P$；又 $\frac{7}{6}\in\mathbf{N}$，$\therefore P\subseteq \mathbf{N}$，$\therefore N=P$

【例2】 x、y 是实数，集合 $M=\left\{x,\frac{y}{x},1\right\}$，$N=\{x^2,x+y,0\}$，若 $M=N$，则 $x^{2003}+y^{2004}=$（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. ±1

【分析】 从集合相等入手，进行分类求解.

【解】 由集合中元素的确定性，得

$\left\{x,\frac{y}{x},1\right\}=\{x^2,x+y,0\}$　　①

从而有 $0\in\left\{x,\frac{y}{x},1\right\}$.

$\because x\neq0$，$\therefore \frac{y}{x}=0$ 即 $y=0$.

将 $y=0$ 代入①，得

$\{x,0,1\}=\{x^2,x,0\}$，　　②

由②易知 $x^2=1$ 即 $x=\pm1$.

当 $x=1$ 时，与集合中元素的互异性不符，

$\therefore x=-1$，$y=0$，故 $x^{2003}+y^{2004}=-1$.

故选 B.

【题后反思】 本题考查集合中元素的三要素，根据两个集合相等的必要条件，也可通过解如下方程组求 x、y 之值.

$$\begin{cases}x+\frac{y}{x}+1=x^2+(x+y)+0\\ x\cdot\frac{y}{x}\cdot1=x^2\cdot(x+y)\cdot0\end{cases}$$

【例3】 已知 $A=\{x\mid x^2-2x+a\leqslant0\}$，$B=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant0\}$，且 $A\subsetneqq B$，求实数 a 的取值范围.

【解】 由已知可得 $B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant2\}$，

对于 A，分以下三种情况：

(1) $\Delta<0\Rightarrow a>1$，此时 $A=\varnothing$，满足 $A\subsetneqq B$；

(2) $\Delta=0\Rightarrow a=1$，此时 $A=\{1\}$，满足 $A\subsetneqq B$；

(3) $\Delta>0\Rightarrow a<1$，

此时 $A=\{x\mid 1-\sqrt{1-a}\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-a}\}$，

要满足 $A\subsetneqq B$，只需 $\begin{cases}1+\sqrt{1-a}\leqslant2\\1-\sqrt{1-a}\geqslant1\end{cases}$ 且两者等号不同时成立，解得 a 无解.

综上可得 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

【题后反思】 空集是集合运用中的一个"陷阱"，其地位非常重要，必须引起注意，特别遇到 $A\subseteq B$、$A\subsetneqq B$、B 非空等情况，首先要考虑 $A=\varnothing$ 的情况. 理解条件 $A\subsetneqq B$ 是解决问题的突破口，$A\subsetneqq B$ 分两类：①A 是 $\varnothing$；② $\begin{cases}1-\sqrt{1-a}\geqslant1\\1+\sqrt{1-a}\leqslant2\end{cases}$，特别注意等号不能同时成立，所以此题在解题最后，去掉同时成立的 a 值.

【例4】 已知集合 $A=\{a,a+b,a+2b\}$，$B=\{a,ac,ac^2\}$，若 $A=B$，求 c 的值.

【思路点拨】 欲求 c 值，可列关于 c 的方程或方程组，根据两集合相等的意义及集合中元素的互异性，有下面两种情况：(1) $a+b=ac$，且 $a+2b=ac^2$；(2) $a+b=ac^2$，且 $a+2b=ac$

【解】 (1) $a+b=ac$，且 $a+2b=ac^2$，消去 b 得

$a+ac^2-2ac=0$.

$\because a=0$ 时，集合 B 中三元素均为零，根据集合中元素的互异性，舍去 $a=0$.

$\therefore c^2-2c+1=0$，即 $c=1$ 时 $A=B$，但 $c=1$ 时，集合 B 中的三个元素也相同，舍去 $c=1$，此时无解.

(2) 若 $a+b=ac^2$，且 $a+2b=ac$，消去 b 得 $2ac^2-ac-a=0$，

$\because a\neq0$，$\therefore 2c^2-c-1=0$ 又 $\because c\neq1$，$\therefore c=-\frac{1}{2}$.

综上所述，c 的值为 $-\frac{1}{2}$.

【题后反思】 在求集合中元素字母的值时，可能产生与互异性矛盾的增解，这需要解题后进行检验，去伪存真.

【例5】 已知 $A=\{x\mid x=m+n\cdot\sqrt{2},m,n\in\mathbf{Z}\}$.

(1) 设 $x_1=\frac{1}{3-4\sqrt{2}}$，$x_2=\sqrt{9-4\sqrt{2}}$，$x_3=(1-3\sqrt{2})^2$，试判断 x_1，x_2，x_3 与 A 之间的关系；

(2) 任取 $x_1,x_2\in A$，试判断 x_1+x_2，x_1x_2 与 A 之间的关系；

(3) 能否找到 $x_0\in A$ 使 $\frac{1}{x_0}\in A$ 且 $|x_0|\neq1$？

【解答】

【题后反思】 (1) 第(1)、(2)中的解题依据是：若 $x\in A$，则存在 $m,n\in\mathbf{Z}$，满足 $x=m+n\sqrt{2}$. 第(3)小题中，只要找到一个 x_0 符合题意，则就已经实现了这种"存在性".

(2) 解决存在性问题主要采用假设法：假设法是假设存在某数使结论成立，以此为基础进行演绎推理，若出现矛盾，则否定假设，得出相反的结论；若推出合理的结果，则说明假设正确. 这种方法可概括为"假设—推理—否定(肯定)假设—得出结论".

【例6】 设 $P=\{x\mid 12+x-x^2\geqslant0\}$，$Q=\{x\mid m-1\leqslant x\leqslant 3m-2\}$，若 $Q\subseteq P$，求实数 m 的取值范围.

【解答】

随堂练习

1. 集合 $S=\{0,1,2,3,4,5\}$，A 是 S 的一个子集，当 $x\in A$ 时，若有 $x-1\notin A$，且 $x+1\notin A$，则称 x 为 A 的一个"孤立元素"，那么 S 中无"孤立元素"的 4 元子集的个数是（　　）

A. 4 个　　B. 5 个　　C. 6 个　　D. 7 个

2. 对于集合 M、N，定义 $M-N=\{x\mid x\in \mathbf{N}$，且 $x\notin \mathbf{M}$，$M\oplus N=(M-N)\cup(N-M)\}$，设 $A=\{t\mid t=x^2-3x,x\in \mathbf{R}\}$

$B=\{x\mid y=\lg(-x)\}$，则 $A\oplus B=$________

3. 已知三元素集合 $A=\{x,xy,x-y\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，且 $A=B$，求 x 与 y 的值.

4. 已知关于 x 的不等式 $\dfrac{ax-5}{x^2-a}<0$ 的解集为 M.

(1)当 $a=4$ 时，求集合 M.

(2)若 $3\in M$ 且 $5\notin M$，求实数 a 的取值范围.

总结升华

1. 集合中元素具有确定性、互异性和无序性等特征，确定性是集合形成的基础，互异性在解含参数集合题时要重新检验，互异性减少了集合列举的繁杂性.

2. 集合中的元素可以是数、式、点、物…，这是译读集合语言的出发点. 如集合 $\{x^2+2x=0\}$ 恰含 1 个元素(1 个方程式)、$\{x\mid x^2+2x=0\}$ 恰含 2 个元素(2 个实数根)等.

3. 子集具有传递性：(1)$A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$；(2)$A\subsetneqq B\subseteq C\Rightarrow A\subsetneqq C$；(3)$A\subseteq B\subsetneqq C\Rightarrow A\subsetneqq C$；(4)$A\subsetneqq B\subsetneqq C\Rightarrow A\subsetneqq C$

4. 空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集，关系 $\varnothing\in\{\varnothing\}$、$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$、$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$、$\varnothing\subsetneqq\{0\}$ 都是正确的. 更一般地，复合性集合 $\{x\mid x\subseteq A\}\neq\{x\mid x\in A\}$

5. 空集 $\varnothing$ 在解题时有特殊的地位，它是任何集合的子集，应时刻关注对空集的讨论，防止漏掉.

6. 解题时注意区分两大关系：一是元素与集合的从属关系，二是集合与集合的包含关系.

7. 解答集合题目，认清集合的属性(是点集、数集或其他情形)和化简集合是正确求解的两个先决条件.

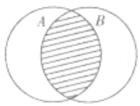
第2课时　集合的运算

最新考纲

1. 理解补集、交集、并集的概念.
2. 掌握有关的术语和符号,并会用他们正确的表示一些简单的集合.

知识再现

1. 运算的定义和图示

	$A\cap B$	$A\cup B$	$\complement_U A$
定义	$\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$	$\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$	$\{x\mid x\in U$,但 $x\notin A\}$
图示			

2. 运算律

(1)交换律:$A\cap B=B\cap A$,$A\cup B=$________;

(2)结合律:$A\cap B\cap C=$________,

　　　$A\cup B\cup C=$________;

(3)分配律:$A\cap(B\cup C)=$________;

(4)习题结论:$\complement_U(A\cap B)=$________;

　　　　$\complement_U(A\cup B)=$________;

3. 交集的性质

(1)________　(2)________　(3)________　(4)________

4. 并集的性质

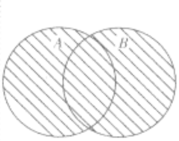
(1)________　(2)________　(3)________　(4)________

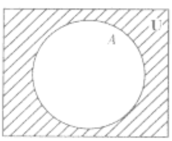
5. 补集的性质

(1)________　(2)________　(3)________

【你填对了吗】

1.





2. (1)$B\cup A$　(2)$A\cap(B\cap C)$;$A\cup(B\cup C)$
(3)$(A\cap B)\cup(A\cap C)$　(4)$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$,$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

3. (1)$A\cap\varnothing=\varnothing$　(2)$A\cap A=A$　(3)$A\cap B=B\cap A$　(4)$A\cap B=A\Leftrightarrow\subseteq B$

4. (1)$A\cup\varnothing=A$　(2)$A\cup A=A$　(3)$A\cup B=B\cup A$　(4)$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$

5. (1)$A\cup\complement_U A=U$　(2)$A\cap\complement_U A=\varnothing$　(3)$\complement_U(\complement_U A)=A$.

精题细讲

【例1】设 I 为全集,S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集,且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$,则下面论断正确的是　(　　)

A. $(\complement_I S_1)\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$

B. $S_1\subseteq((\complement_I S_2)\cap(\complement_I S_3))$

C. $(\complement_I S_1)\cap(\complement_I S_2)\cap(\complement_I S_3)=\varnothing$

D. $S_1\subseteq((\complement_I S_2)\cup(\complement_I S_3))$

【思路点拨】(1)构造出符合条件的集合即特殊值法,(2)用 Venn 图处理.

【解】C　方法一　令 $S_3=S_1\cap S_2$,依题意画一张文氏图,如图所示,则有 $S_1\cup S_2=I$,故 $(\complement_I S_1)\cap(\complement_I S_2)=\complement_I(S_1\cup S_2)=(\complement_I I)=\varnothing$,所以 $(\complement_I S_1)\cap(\complement_I S_2)\cap(\complement_I S_3)=\varnothing\cap(\complement_I S_3)=\varnothing$.

方法二　$\because S_1\cup S_2\cup S_3=I$,

$\therefore \complement_I(S_1\cup S_2\cup S_3)=\varnothing$,

$\therefore \complement_I(S_1\cup S_2)\cap(\complement_I S_3)=\varnothing$,

$\therefore(\complement_I S_1)\cap(\complement_I S_2)\cap(\complement_I S_3)=\varnothing$.

方法三　令 $S_1=\{1,2\}$,$S_2=\{2,3\}$,$S_3=\{2\}$,$I=\{1,2,3\}$,则 $(\complement_I S_1)\cap(\complement_I S_2)\cap(\complement_I S_3)=\{3\}\cap\{1\}\cap\{1,3\}=\varnothing$,这种方法称为"特值法",是解答选择题的一种重要方法.

【题后反思】(1)抽象集合的交、并、补运算用图示法求解形象、直观;(2)为使补集参与的交、并、补运算更加简化且直观,一般要用到如下两种等价变形:① $\complement_I(A\cap B)=(\complement_I A)\cup(\complement_I B)$;② $\complement_I(A\cup B)=(\complement_I A)\cap(\complement_I B)$.

【例2】已知 $A=\{a^2,a+1,-3\}$,$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$,若 $A\cap B=\{-3\}$,求 a 的值.

【思路点拨】$\because A\cap B=\{-3\}$,则 $-3\in B$,$\therefore a-3=-3$ 或 $2a-1=-3$,显然 $a^2+1\neq-3$,结合互异性,列方程组求解.

【解】$\because A\cap B=\{-3\}$,$\therefore -3\in B$.

$\because a^2+1\neq-3$,且 $a^2\neq a^2+1$,

$\therefore\begin{cases}a-3=-3,\\a^2\neq 2a-1,\\a+1\neq a^2+1;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a-1=-3,\\a^2\neq a-3,\\a+1\neq a^2+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\a\neq1,\\a\neq0\text{ 且 }a\neq1;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a\in\mathbf{R}\\a=-1\\a\neq0\text{ 且 }a\neq1\end{cases}\Rightarrow a=-1$.

【题后反思】本题考查集合元素的基本特征——确定性、互异性、无序性,切入点是分类讨论思想,由于集合中元素用字母表示,检验结果必不可少.

【例3】(衡中精选)已知集合 $A=\{x\mid x^2-6x+8<0\}$,$B=\{x\mid(x-a)\cdot(x-3a)<0\}$.

(1)若 $A\subseteq B$,求 a 的取值范围;

(2)若 $A\cap B=\Phi$,求 a 的取值范围;

(3)若 $A\cap B=\{x\mid 3<x<4\}$,求 a 的取值范围

【思路点拨】此题主要考查集合间的包含关系、集合运算、分类讨论等基础知识,考查运算、分析问题、解决问题的能力,本题可结合数轴进行分析.

【解】$\because A\{x\mid x^2-6x+8<0\}$,

$\therefore A=\{x\mid 2<x<4\}$,

(1)当 $a>0$ 时,$B=\{x\mid a<x<3a\}$,

$\because A\leqslant B$

$\therefore$应满足$\begin{cases}a\leqslant 2\\3a\geqslant 4\end{cases}\Rightarrow\frac{4}{3}\leqslant a\leqslant 2$.

当$a<0$时，$B=\{x|3a<x<a\}$，

应满足$\begin{cases}3a\leqslant 2\\a\geqslant 4\end{cases}\Rightarrow a\in\varnothing$，$\therefore$当$A\subseteq B$时，$\frac{4}{3}\leqslant a\leqslant 2$.

$\therefore a$的取值范围是$\frac{4}{3}\leqslant a\leqslant 2$

(2)要满足$A\cap B=\varnothing$，

当$a>0$时，$B=\{x|a<x<3a\}$，$a\geqslant 4$或$3a\leqslant 2$，

$\therefore 0<a\leqslant\frac{2}{3}$或$a\geqslant 4$；

当$a<0$时，$B=\{x|3a<x<a\}$，$a\leqslant 2$或$a\geqslant\frac{4}{3}$，

$\therefore a<0$时成立，

验证知当$a=0$时，也成立.

综上所述，$a\leqslant\frac{2}{3}$或$a\geqslant 4$时$A\cap B=\varnothing$.

(3)要满足$A\cap B=\{x|3<x<4\}$，显然$a>0$且$a=3$时成立，

$\because$此时$B=\{x|3<x<9\}$，而$A\cap B=\{x|3<x<4\}$，

故所求a的值为3.

【题后反思】(1)本题为集合在一定约束条件下求参数的问题，涉及集合的运算，其转化途径常通过两个方面：一是分析、化简每个集合；二是利用两集合元素的性质.

(2)本题体现了分类讨论的思想，分类的关键点在于比较出a与$3a$的大小，进而将集合B表示出来.

【例4】$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x|x^2+4ax-4a+3=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x^2-(a-1)x+a^2=0,x\in\mathbf{R}\}$，$C=\{x|x^2+2ax-2a=0,x\in\mathbf{R}\}$，若$A$、$B$、$C$中至少有一个不是空集，求实数$a$的取值范围.

【思路点拨】由题意知，a的取值范围是$A\neq\varnothing$、$B\neq\varnothing$、$C\neq\varnothing$的并集，亦可利用补集思想求解.

【解答】

【题后反思】对于某些问题，如果从正面求解比较困难，则可考虑先求解问题的反面，采用“正难则反”的解题策略，具体地说，就是将研究对象的全体视为全集，求出使问题反面成立的集合A，则A的补集即为所求.

【例5】(高中精题)某实验班有21个学生参加数学竞赛，17个学生参加物理竞赛，10个学生参加化学竞赛，他们之间既参加数学又参加物理竞赛的有12人，既参加数学又参加化学竞赛的有6人，既参加物理竞赛又参加化学竞赛的有5人，三科都参加的有2人，现在参加竞赛的学生都要到外地学习参观，问需要预订多少张火车票？

【解答】

【题后反思】(1)解决这类题一般借用数形结合法，借助于Venn图.

(2)数形结合是通过“以形助数”或“以数助形”，把抽象的数学语言与直观的图形结合起来思考，也就是将抽象思维与形象思维有机地结合起来解决问题的一种数学思想方法.

具体地说，数形结合的基本思路是：根据数的结构特征，构造出与之相应的几何图形，并利用图形的特征和规律，解决数的问题；或将图形信息全部转化成代数信息，解决形的问题转化为数量关系的讨论.

随堂练习

1. 已知集合$M=\{(x,y)|x+y=2\}$，$N=\{(x,y)|x-y=4\}$，那么集合$M\cap N$为 ( )

A. $\{x=3,y=-1\}$　　B. $\{(3,-1)\}$

C. $\{3,-1\}$　　D. $\{(3,-1)\}$

2. (高中精题)设集合$A=\{x|x^2=8x-15,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|\cos\frac{x}{2}>0,x\in\mathbf{R}\}$，则$A\cap B$的元素个数为________个.

3. (高中精题)已知集合$A\{x||x^2-2x|\leqslant x\}$，$B=\left\{x\left|\left|\frac{x}{1-x}\right|=\frac{x}{1-x}\right.\right\}$，$C=\{x|ax^2-x+b>0\}$，且$(A\cup B)\cap C=\varnothing$，$(A\cup B)\cup C=R$，求$a$、$b$的值.

4.（2008山东高考）在一次数学竞赛中，共出甲、乙、丙三题，在所有25个参赛的学生中，每个学生至少解出一题；在所有没有解出甲题的学生中，解出乙题的人数是解出丙题的人数的两倍；只解出甲题的学生比余下的学生中解出甲题的学生的人数多1；只解一题的学生中，有一半没有解出甲题．问共有多少学生只解出乙题？

总结升华

1．解答集合的交、并、补运算问题，应首先识别集合元素的属性，（是数集，还是点集），然后采用不同的方法求解．

2．交、并运算要注意数轴的应用，特别是有关不等式的题目．

3．记住几个常见结论：$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$；$A\cap B=A\cup B\Leftrightarrow A=B$．

4．对于离散的数集问题或抽象集合问题一般用图示法求解，直观、简捷；对于不等式的解集问题或函数的定义域与值域问题，一般用数轴求解；对于点集问题，一般转化为解析几何问题求解．

5．注意渗透"数形结合"、"转化和化归"的数学思想方法．

第3课时　一元二次不等式、高次不等式的解法

最新考纲

1．熟练掌握一元二次不等式的解法．

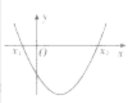
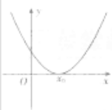
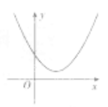
2．掌握高次不等式、分式不等式的解法．（穿根法）

知识再现

1．(1)不等式 $ax>b$ 当 $a>0$、$a<0$ 时的解集依次是________、________；

(2)不等式 $0\cdot x>b$ 当 $b\geqslant 0$、$b<0$ 时的解集依次是________、________．

2．二次不等式的解法

不等式 \ 解集 \ 图象 \ 判别式		$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图象				
$ax^2+bx+c>0$	解集	$(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$		R
$ax^2+bx+c\geqslant 0$			R	
$ax^2+bx+c\leqslant 0$		$[x_1,x_2]$		
$ax^2+bx+c<0$				$\varnothing$

3．解高次不等式常用的方法是________

4．分式不等式的解法．

(1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow$________　(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0\Leftrightarrow$________

【你做对了吗】 1．(1) $\left\{x\mid x>\dfrac{b}{a}\right\}$　$\left\{x\mid x<\dfrac{b}{a}\right\}$

(2) $\varnothing$，R．

2．$\{x\in R\mid x\neq x_0\}$；$(\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$；$R$；$\{x_0\}$；$\varnothing$；$(x_1,x_2)$；$\varnothing$

3．数轴标根法（穿根法）

4．(1) $f(x)g(x)>0$

(2) $\begin{cases}g(x)\neq 0\\ f(x)g(x)>0\end{cases}$

精题细讲

【例1】（衡中精题）已知集合 $M=\{x\mid x^2-3x-28\leqslant 0\}$，$N=\{x\mid x^2-x-6>0\}$，则 $M\cap N=$　（　　）

A．$\{x\mid -4\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant 7\}$

B．$\{x\mid -4<x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x<7\}$

C．$\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x>3\}$

D．$\{x\mid x<-2$ 或 $x\geqslant 3\}$

【解】 由于 $M=\{x\mid x^2-3x-28\leqslant 0\}$

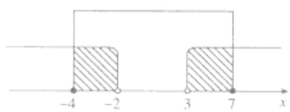
$=\{x\mid (x+4)(x-7)\leqslant 0\}=\{x\mid -4\leqslant x\leqslant 7\}$

$N=\{x\mid x^2-x-6>0\}$

$=\{x\mid (x+2)(x-3)>0\}$

$=\{x\mid x<-2$ 或 $x>3\}$，则由数轴法求交集得

$M\cap N=\{x\mid -4\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant 7\}$，故选A．



【做后反思】 ①此例中交集 $M\cap N$ 就是不等式组 $\begin{cases}x^2-3x-28\leqslant 0\\ x^2-x-6>0\end{cases}$ 的解集；②二次不等式与集合的混杂题是高考命题中选择题的常见题型．

【例2】 解三次不等式 $x^3-3x^2-4x+12>0$．

【解】 原不等式可化为

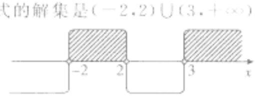
$x^2(x-2)-x(x-2)-6(x-2)>0$．

即　$(x-2)(x^2-x-6)>0$．

即　$(x-2)(x-3)(x+2)>0$．

运用数轴法求解得　$-2<x<2$ 或 $x>3$．

故原不等式的解集是 $(-2,2)\cup(3,+\infty)$．



【做后反思】 ①若多项式 $P(x)$ 满足 $P(x_0)=0$，则多项式 $P(x)$ 必含有因式 $(x-x_0)$；②用数轴法解不等式，数轴上所标出的实数只考虑大小顺序而不考虑线段的实际长度的比例．

【例3】（衡中精选）已知不等式 $ax^2-5x+b>0$ 的解集是 $\{x|-3<x<-2\}$，求不等式 $bx^2-5x+a>0$ 的解集。

【思路点拨】 知道 $ax^2-5x+b>0$ 的解是 $-3<x<-2$，则可知对应的一元二次方程 $ax^2-5x+b=0$ 的解是 $x=-3$ 或 $x=-2$。这样用韦达定理可求出 a、b 的值，从而可求得 $bx^2-5x+a>0$ 的解。另外也可对 $bx^2-5x+a>0$ 进行如下变形 $a\left(\frac{1}{x}\right)^2-5\left(\frac{1}{x}\right)+b>0$，根据已知不等式 $ax^2-5x+b>0$ 的解是 $-3<x<-2$ 可知 $-3<\frac{1}{x}<-2$，然后解出 x。

【解法一】 ∵$ax^2-5x+b>0$ 的解集是 $\{x|-3<x<-2\}$，

∴$a<0$，且方程 $ax^2-5x+b=0$ 的两根是 -3、-2，由此可知 $(-3)+(-2)=\frac{5}{a}$，$(-3)\cdot(-2)=\frac{b}{a}$。

解得 $a=-1$，$b=-6$。

∴不等式 $bx^2-5x+a>0$，即 $-6x^2-5x-1>0$ 的解集是 $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}\right\}$

【解法二】 由已知 $a<0$，所以 $x=0$ 不是不等式 $bx^2-5x+a>0$ 的解，故要求不等式 $bx^2-5x+a>0$ 的解集，即

求 $a\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2-5\cdot\frac{1}{x}+b>0$ 的解集。

由题意可得 $-3<\frac{1}{x}<-2$

∴所求不等式的解集为

$\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}\right\}$

【题后反思】 解法一体现了一元二次不等式和一元二次方程、二次函数的密切联系，解法二体现了转化的思想。

【例4】 解关于 x 的不等式 $\frac{x^2-2ax+12a}{2a+1}>12a$。

【思路点拨】 这是含参数 a 的分式不等式，可移项化简成 $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ 来求解。因分母含有参数，故讨论应从分母的零点展开。

【解】 原不等式等价于 $\frac{x^2-2ax-24a^2}{2a+1}>0$ 即 $\frac{(x+4a)(x-6a)}{2a+1}>0$。

(1)当 $a>-\frac{1}{2}$ 时，有 $(x+4a)(x-6a)>0$

①当 $a>0$，有 $-4a<6a$，原不等式解集为 $(-\infty,-4a)\cup(6a,+\infty)$

②当 $a=0$，有 $-4a=6a=0$，原不等式解集为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

③当 $-\frac{1}{2}<a<0$，有 $-4a>6a$，原不等式解集为 $(-\infty,6a)\cup(-4a,+\infty)$

(2)当 $a<-\frac{1}{2}$ 时，有 $(x+4a)(x-6a)<0$，原不等式的解集为 $(6a,-4a)$

【题后反思】 先将 $\frac{x^2-2ax+12a}{2a+1}>12a$ 等价化成 $\frac{(x+4a)(x-6a)}{2a+1}>0$ 是十分重要的。关于如何进行讨论，既要从去分母这一角度又要从“根”的大小来考虑，这样才不至于“漏”和“重”。

【例5】 已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为 a，且不等式 $f(x)>-2x$ 的解集为 $(1,3)$。

(1)若方程 $f(x)+6a=0$ 有两个相等的根，求 $f(x)$ 的解析式；

(2)若 $f(x)$ 的最大值为正数，求 a 的取值范围。

【解答】

【题后反思】 本题考查二次函数、一元二次不等式、一元二次方程等知识，要进一步理解和掌握三者间的关系，学会利用二次函数图象的直观性研究一元二次方程根的性质和一元二次方程解集的变化。

【例6】 解不等式 $ax^2+2x+1>0$

【解答】

随堂练习

1. 不等式 $(x^3-4x^2+4x)(3+2x-x^2)>0$ 的解集为(　　)

A. $\{x|x<-1$ 或 $1<x<3\}$

B. $\{x|0<x<3$ 且 $x\neq2\}$

C. $\{x|-1<x<0$ 或 $x>3\}$

D. $\{x|x<-1$ 或 $0<x<2$ 或 $2<x<3\}$

2. 不等式 $ax^2+ax-4<0$ 的解集为 **R**，则 a 的取值范围为______。

3.（2008·浙江模拟）记关于 x 的不等式 $\frac{3}{x}>1(x\in \mathbf{Z})$ 的解集为 A，关于 x 的方程 $x^2-mx+2=0$ 的解集为 B，且 $B\subseteq A$.

（1）求集合 A；

（2）求实数 m 的取值范围.

4.（2008·广东广州）已知 p：方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负实根，q：方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根. 若 p 或 q 为真，p 且 q 为假. 求实数 m 的取值范围.

总结升华

（1）解不等式的基本思想是化归、转化，其转化趋势是：分式化整式，高次化低次，二次化一次.

（2）一元一次不等式（组）、一元二次不等式的求解要准确、熟练、迅速，这是解其他不等式的基础.

（3）解分式不等式时，注意先移项，使右边为零.

（4）用数轴标根法解高次不等式，最右区的符号是由最高次项系数的正负决定的，若为正数，则最右区的符号为正；若为负数，则最右区的符号亦为负，然后从右向左 $f(x)$ 的正负符号区相间出现.

第4课时　含有绝对值的不等式解法

最新考纲

掌握含有绝对值的不等式的解法.

知识再现

1. 绝对值的意义 $|a|=\begin{cases} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{cases}$

2. 当 $a>0$ 时，$|x|>a\Leftrightarrow$ ________ $\Leftrightarrow$ ________；$|x|<a\Leftrightarrow$ ________ $\Leftrightarrow$ ________.

3. 当 $a=0$ 时，不等式 $|x|>a$ 的解集为________；$|x|<a$ 的解集为________；

4. 当 $a<0$ 时，不等式 $|x|>a$ 的解集为________；$|x|<a$ 的解集为________；

5. 设 $a>0$，则不等式 $|f(x)|<a$ 等价于 $\begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ f(x)<a \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x)<0, \\ -f(x)<a. \end{cases}$ 也可以等价于________.

6. 设 $a>0$，则不等式 $|f(x)|>a$ 等价于________，也可以等价于 $f(x)<-a$ 或 $f(x)>a$.

7. 设 $0<a<b$，则不等式 $a<|f(x)|<b$ 等价于________.

【你填对了吗】

1. $\begin{cases} a & (a>0) \\ 0 & (a=0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

2. $x^2>a^2$，$x>a$ 或 $x<-a$；$x^2<a^2$，$-a<x<a$.

3. $\{x|x\in R, x\neq 0\}$，$\varnothing$

4. R，$\varnothing$

5. $-a<f(x)<a$

6. $\begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ f(x)>a \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x)<0 \\ -f(x)>a \end{cases}$

7. $-b<f(x)<-a$ 或 $a<f(x)<b$

精题细讲

【例1】 解不等式：

（1）$2<|2x-5|\leqslant 7$；（2）$x^2-2|x|-15\geqslant 0$.

【思路点拨】 本题主要考查绝对值不等式、一元二次不等式的解法，考查分类思想、运算能力.

（1）由绝对值的几何意义或讨论 $2x-5$ 的符号或乘方转化.（2）令 $|x|=t$ 或讨论 x 的符号.

【解】(1)方法一：原不等式等价于$\begin{cases}|2x-5|>2\\|2x-5|\leqslant 7\end{cases}$

$\begin{cases}2x-5<-2\text{ 或 }2x-5>2\\-7\leqslant 2x-5\leqslant 7\end{cases}$

即$\begin{cases}x<\frac{3}{2}\text{ 或 }x>\frac{7}{2}\\-1\leqslant x\leqslant 6\end{cases}$

$\therefore -1\leqslant x<\frac{3}{2}$或$\frac{7}{2}<x\leqslant 6$.

∴原不等式的解集为

$\{x|-1\leqslant x<\frac{3}{2}$或$\frac{7}{2}<x\leqslant 6\}$.

方法二：原不等式等价于

$\begin{cases}2x-5\geqslant 0\\2<2x-5\leqslant 7\end{cases}$或$\begin{cases}2x-5<0\\2<-(2x-5)\leqslant 7\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x\geqslant\frac{5}{2}\\\frac{7}{2}<x\leqslant 6\end{cases}$或$\begin{cases}x<\frac{5}{2}\\-1\leqslant x<\frac{3}{2}\end{cases}$

$\therefore\frac{7}{2}<x\leqslant 6$或$-1\leqslant x<\frac{3}{2}$.

故原不等式的解集为

$\left\{x\middle|\frac{7}{2}<x\leqslant 6\text{ 或 }-1\leqslant x<\frac{3}{2}\right\}$.

(2)方法一：原不等式等价于$\begin{cases}x\geqslant 0\\x^2-2x-15\geqslant 0\end{cases}$　①

或$\begin{cases}x<0\\x^2+2x-15\geqslant 0\end{cases}$　②

由①得$\begin{cases}x\geqslant 0\\x\leqslant -3\text{ 或 }x\geqslant 5\end{cases}$ $\therefore x\geqslant 5$.

由②得$\begin{cases}x<0\\x\leqslant -5\text{ 或 }x\geqslant 3\end{cases}$ $\therefore x\leqslant -5$.

∴原不等式的解集为$\{x|x\leqslant -5$或$x\geqslant 5\}$.

方法二：$\because x^2=|x|^2$,

∴原不等式可视为关于$|x|$的一元二次不等式

$|x|^2-2|x|-15\geqslant 0$,

解得$|x|\geqslant 5$或$|x|\leqslant -3$(舍去),

$\therefore x\leqslant -5$或$x\geqslant 5$.

故原不等式的解集为$\{x|x\leqslant -5$或$x\geqslant 5\}$.

【题后反思】(1)本题利用绝对值的意义进行分类讨论，转化为代数不等式或不等式组.

(2)本题主要体现的思想方法有分类讨论的思想，换元的方法.

(3)解含有多个绝对值的不等式，一般可采有“零点分段”的方法，例如解不等式$|x-2|+|x+1|>4$. 令$x-2=0$，$x+1=0$，得$x=2$，$x=-1$，由零点-1，2将数轴分为三段，故可分为三类：①$x<-1$②$-1\leqslant x<2$，③$x\geqslant 2$，再进一步求解.

当然对于$|x-a|+|x-b|>k$或$|x-a|+|x-b|<k$(k为正常数)，利用绝对值的几何意义求解较简捷，还应注意以下四类绝对值不等式的解法：

①$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$；

②$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)<-g(x)$或$f(x)>g(x)$；

③$|f(x)|>|g(x)|\Leftrightarrow[f(x)]^2>[g(x)]^2$

④$|f(x)|<|g(x)|\Leftrightarrow[f(x)]^2<[g(x)]^2$

【例2】　解不等式$|x^2-9|\leqslant x+3$

【解】　方法一：原不等式$\Leftrightarrow$(1)$\begin{cases}x^2-9\geqslant 0\\x^2-9\leqslant x+3\end{cases}$或(2)$\begin{cases}x^2-9<0\\9-x^2\leqslant x+3\end{cases}$

不等式(1)$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant -3\text{ 或 }x\geqslant 3\\-3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}\Rightarrow x=-3$或$3\leqslant x\leqslant 4$,

不等式(2)$\Leftrightarrow\begin{cases}-3<x<3\\x\leqslant -3\text{ 或 }x\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow 2\leqslant x<3$.

∴原不等式的解集是$\{x|2\leqslant x\leqslant 4$或$x=-3\}$.

方法二：原不等式等价于

$\begin{cases}x+3\geqslant 0\\-(x+3)\leqslant x^2-9\leqslant x+3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant -3\\x\leqslant -3\quad\text{或 }x\geqslant 2\\-3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=-3$或$2\leqslant x\leqslant 4$.

∴原不等式的解集为$\{x|2\leqslant x\leqslant 4$或$x=-3\}$.

【题后反思】　方法一是根据绝对值的定义去掉绝对值的符号，方法二是根据性质$|x|\leqslant a\Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a(a\geqslant 0)$推广到$|f(x)|\leqslant g(x)\Leftrightarrow -g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$

【例3】　(高中精题)解不等式$|1-x|+|x-2|>x+3$.

【思路点拨】　此不等式左边含有两个绝对值符号，如何脱去绝对值符号呢？这时我们可考虑采用“零点分段法”.

【解】　已知数字1，2将数轴分成$(-\infty,1]$、$(1,2]$、$(2,+\infty)$三部分，如右图所示：

(1)当$x\leqslant 1$时，原不等式可化为

$1-x-(x-2)>x+3\Rightarrow\begin{cases}x<0\\x\leqslant 1\end{cases}$解得$x<0$；

(2)当$1<x\leqslant 2$时，原不等式可化为$-(1-x)-(x-2)>x+3\Rightarrow\begin{cases}x<-2\\1<x\leqslant 2\end{cases}$得不等式的解集为$\varnothing$.

(3)当$x>2$时，原不等式可化为

$-(1-x)+x-2>x+3\Rightarrow\begin{cases}x>6\\x>2\end{cases}$得$x>6$.

综合上述(1)、(2)、(3)，得原不等式的解集为$\{x|x<0$或$x>6\}$.

【例4】　(2003·北京春季高考)若不等式$|ax+2|<6$的解集为$(-1,2)$则实数a等于　(　　)

A. 8　　B. 2

C. -4　　D. -8

【思路点拨】　按绝对值的意义求解.

【解答】

【题后反思】　本题考查的含参数的一元一次绝对值不等式的解法，注意讨论$a>0$和$a<0$两种情况.

【例5】 关于实数 x 的不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right| \leqslant \frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$（其中 $a\in\mathbf{R}$）的解集依次记为 A 与 B，求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围.

【思路点拨】 此题主要考查集合的概念，绝对值不等式，一元二次不等式的知识，考查分类讨论的思想，分析问题、解决问题的能力，解绝对值不等式由几何意义转化，解一元二次不等式由根的大小作分类讨论.

【解答】

随堂练习

1. 不等式 $|2x-\log_2 x|<2x+|\log_2 x|$ 成立，则（　　）

A. $1<x<2$　　B. $0<x<1$

C. $x>1$　　D. $x>2$

2. 如果不等式 $|x-t|\leqslant 1$ 成立的充分条件是 $1<x\leqslant 2$，则实数 t 的取值范围是________.

3. 已知命题 p：x_1 和 x_2 是方程 $x^2-mx-2=0$ 的两个实根，不等式 $a^2-5a-3\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意实数 $m\in[-1,1]$ 恒成立；命题 q：不等式 $ax^2+2x-1>0$ 有解；若命题 p 是真命题，命题 q 是假命题，求 a 的取值范围.

4.（2008北京宣武区）设 P 表示幂函数 $y=x^{c^2-5c+6}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数的 c 的集合；Q 表示不等式 $|x-1|+|x-2c|>1$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立的 c 的集合.

(1)求 $P\cap Q$；(2)试写出一个解集为 $P\cap Q$ 的不等式.

总结升华

1. 解绝对值不等式的基本思想是设法去掉绝对值符号，去绝对值符号的常用手段有如下三种：

(1)根据实数绝对值的意义，

即 $|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$；

(2)根据不等式性质：$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$；$|x|>a\Leftrightarrow x<-a$，或 $x>a(x,a\in\mathbf{R})$；

(3)根据 $|a|^2=a^2(a\in\mathbf{R})$，可在不等式两边同时平方.

2. 解含有两个或两个以上绝对值符号，并且其形式是和或差的不等式，可先求出使每一个绝对值符号内的数学式子等于零的未知数的值（称为零点），将这些值依次在数轴上标注出来，它们把数轴分成若干个区间，讨论每一个绝对值符号内的式子在每一个区间的符号，去掉绝对值符号，使之转化为不含绝对值的不等式，求解过程中不要漏掉区间端点的讨论，以免漏解.

3. 另外，对形如 $|x-a|+|x-b|<c$ 或 $|x-a|-|x-b|>c$ 的不等式，由于它们分别表示数轴上的点 x 到 a，b 点的距离之和或距离之差，因而利用不等式的几何意义去解不等式，更为直观、简捷.

4. 绝对值不等式的证明较为困难，要善于用分析转化法.

5. 绝对值不等式的性质在求最值时有独特作用，注意灵活运用.