部編大學用書

李氏羣講義

林一鵬譯

國立編譯館主編
黎明文化事業公司出版

部編大學用書

李氏羣講義

林一鵬譯

國立編譯館主編
黎明文化事業公司出版

312・(68-27)

李氏羣講義

譯　者：林　一　鵬
主編者：國立編譯館
出版者：黎明文化事業股份有限公司
行政院新聞局出版事業登記臺字第一八五號
總發行所：
臺北縣永和鎮秀朗路二段一六一巷一號
門市部：
臺北市長安東路一段五十六號
臺北市重慶南路一段四十九號
臺北市林森南路一〇七號文化大樓
高雄市五福四路九五號
郵政劃撥帳戶一八〇六一號
印刷者：永裕印刷廠
地　址：臺北市西昌街一六八號
中華民國六十八年三月初版

定　價：新臺幣 65 元

▶如有缺頁、倒裝請寄回換書◀

序

這講義是取自1965年我在曼徹斯特大學所授的緊緻李羣的表現理論所講的內容，而且要特別提的是這講義是從馬塞(Michael Mather)博士所記的筆記複印出來的。

也許有人要問爲什麼一個非李羣專家卻要出版這樣的書，其答案一部分是落在此課程的有限制而適中的目標裏；又另一部分是基於講義的複印本的需求，這似乎是證明有一些讀者對這些目標的共鳴，我覺得緊緻李羣的表現理論是數學中很美、很令人滿意而且實質上是很簡單的一章，而且它有一基本的最低限度是很多種數學家都應知道的。我原來的演講的主要對象是代數拓撲學家，若一個代數拓撲學者想唸，譬如波瑞爾（Borel）與希哲布魯（Hirzebruch）的論文「特徵類與均質空間」〔3〕他會發現他需要知道李羣的最大環面、權及根等基本事實，若他想讀，譬如波特（Bott）的「有關 $K(X)$ 的講義」〔4〕他會發現他需要知道緊緻李羣的表現理論的兩個主要定理〔4，第五十頁定理 1；第五十一頁定理 2〕，這些定理以近代的裝飾出現，但我們可以回溯至梵爾（H. Weyl）〔22〕，我舉這些例子只是爲了解釋，不過他們是很典型的；而且他們幫忙指出有關李羣的基本大要而這些大要對於很多專門研究泛函分析、微分、幾何與代數的學生是很有用的，這講義的目的是把這些大要與證明以簡明的方式表現出來。有關最大環面、權及根的材料出現於第四章與第五章，有關表現理論的兩

個定理以定理 6.20 與 6.41 出現在第六章，前面的三章可使讀者多多少少是從頭開始證明。

這講義的內容幾乎可說是沒有原創性，我只想把古典材料中最吸引人的討論與證明收集在一起而已，但也許有一些例外。

（i） 在第三章裏，有關基本表現理論，我以一個不變和無坐標的方式進行，在某些觀點上，通常是不這樣做的，這兒我的出發點是在證明特徵標的正交關係時，舒崔克（H. B. Shutrick）建議我不必先證明矩陣表現的分量的正交關係（參考以下的 3.33(ii) 與 3.34(i))。不幸的是依據彼得（Peter）與梵爾（Weyl）〔15〕特徵標的完整性的一般證明，是利用矩陣表現的分量的正交關係，因此我被迫又把這以不變方式改寫（參考以下的 3.46 與 3.47)。

我們從未在我參考的資料裏看到這些「不變的」證明，不過如果說這些是不為專家們所知道的我將會覺得不太妥當。

(ii) 在同一章裏，我特別重視實的與耦對的表現，他們對於拓撲學者是很重要的；並且我也較喜歡那些同時可應用到實的及耦對的情形的方法。

(iii) 定理 5.47 容許人們從史提非（Stiefel）圖得到緊緻連通羣的基本羣；這個聲明顯然已為專家們所熟悉，而且毫無疑問地它是隱涵在史提非（Stiefel）的工作裏，不過在我所參考的資料裏我不曾看到一個明確的聲明或證明。

(iv) 通常人們都是任意地規定權的次序，譬如說以字母次序來代表權的次序；我比較喜歡用偏序來代替，它是明顯地不變的，而且對我來說它有一些技巧上的好處（參考以下的 6.22 與 6.23)，我希望這種遠離傳統的做法會引起其他工作者的興趣。

我非常感激波瑞爾（A. Borel)，哈瑞斯與軒德（Harih-Chondra）而且特別的是沙穆森（H. Samelson）他指導我一些有關李羣與表現

理論，我也從史旺（R. G. Swan）的「有關最大環面等的註釋」得到很多的好處。我也非常感激馬塞（Michael Mather）他爲我原來的課程做筆記，特別的是 2. 19 的證明的技巧是他提供的；它使我能夠排除很多有關李羣與它的李氏數之間的關係的標準材料而使得原來的講義變得更苗條，他也從 5. 55 的證明裏排除一些很難的工作，最後我感激舒侄克（H. B. Shutick）做了上述的建議。

目　　錄

第一章　基本定義

1-1　定義　令V, W爲實數域R上的有限維向量空間。令U爲V的一個開子集，f爲由U映至W的一個映射，並且x爲U的一個點，我們稱f在點x上是可微分的若且若存在一線性映射 $f'(x): V \longrightarrow W$ 使得

$$f(x+h)=f(x)+(f'(x))(h)+0(h)$$

若f在U的每一點x上都是可微分的，我們就稱f在U上是可微分的。在這種情形下，我們有一個函數

$$f': U \longrightarrow H_{om}(V, W)$$

而且我們可以問是否這函數也是可微分的。我們稱f在U上爲光滑的（或是屬於C^∞類的）若每一個函數 $f, f', f'', \cdots\cdots$ 在U上是可微分的。（當然，這當中每一個的定義都是依前者可定性及可微分性而定的。）

1-2　定義　若X爲一拓撲空間且V爲一有限維向量空間，我們稱一個同胚 $\varphi_\alpha: U_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ 爲一圖表，其中 $U_\alpha \subset V$ 與 $X_\alpha \subset X$ 分別爲V與X的開子集。

若 $\cup X_\alpha = X$ 則稱 $\{\varphi_\alpha: U_\alpha \longrightarrow X_\alpha\}_\alpha$ 爲一個圖集，我們稱圖集爲光滑的若諸函數 $\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha$（定義在 $\varphi_\alpha^{-1}(X_\alpha \cap X_\beta)$ 上）爲光滑。

令 X, Y 分別爲具有光滑圖集 $\{\varphi_\alpha\}$ 與 $\{\psi_\beta\}$ 的拓撲空間。稱一映射 $f: X \longrightarrow Y$ 爲光滑的若諸映射 $\psi_\beta^{-1} f \varphi_\alpha$，定義在$\varphi_\alpha^{-1}(X_\alpha \cap f^{-1} Y_\beta)$

爲光滑的。顯然兩個光滑映射的合成是光滑的，而且一個具有圖集的空間的么射爲光滑的。

我們稱X上的兩個圖集 $\{\varphi_\alpha\}$ 與 $\{\psi_\beta\}$ 是等價的若映射

$$1: X, \{\varphi_\alpha\} \longrightarrow X, \{\psi_\beta\}$$
$$1: X, \{\psi_\beta\} \longrightarrow X, \{\varphi_\alpha\}$$

爲光滑的。

一個微分或光滑流形是一個具有一等價類的光滑圖集的豪士道夫(Hausdorff) 空間，稱這個等價類爲它的微分結構。

1-3 命題 若 X, Y 爲光滑流形，則在 $X\times Y$ 上只有唯一的一個方法使其成爲一個光滑流形並且滿足:

(i) $\pi_1: X\times Y \longrightarrow X$ 與 $\pi_2: X\times Y \longrightarrow Y$ 爲光滑映射。

(ii) $f: Z \longrightarrow X\times Y$ 爲光滑的若且唯若 $\pi_1 f$ 與 $\pi_2 f$ 爲光滑的。

證明 在X與Y裏分別給以圖表 φ_α 與 ψ_β，然後在$X\times Y$裏形成一圖表 $\varphi_\alpha\times\psi_\beta$。對每一對 α, β 我們都這樣做。其餘的只是檢驗必要的性質。讓讀者自證之。

1-4 定義 一李羣G爲

(i) 一光滑流形，並且是

(ii) 一個羣，其中乘積 μ: $G\times G \longrightarrow G$ 及其逆 i: $G \longrightarrow G$ 爲

(iii) 光滑映射。

李羣的一個同態 $\theta: G \longrightarrow H$ 爲

(i) 羣的一個同態，並且是

(ii) 一個光滑映射。

1-5 範例

1. R^n 可看成是一個加法羣， 其圖集只是包含一個圖表其爲么

射。

2. $T^n=\mathrm{R}^n/Z^n$（其中 Z^n 為 R^n 中，坐標為整數的點的全體）可看成是 R^n 的商羣，其圖表為投射 $R^n\longrightarrow T^n$ 限制在諸小開集上的諸映射。

3. 令 V 為 R 上的一個有限維向量空間。則 $\mathrm{Aut}\,V$（V 的自同構的全體的集合）為 $\mathrm{Hom}(V,V)$ 中的一個開集它是由 $\det\neq 0$ 所定的，所以 $\mathrm{Aut}\,V$ 是一個光滑流形，並且在函數的合成下是一個羣。其乘積映射是光滑的，因為它是由多項式（$\sum a_{ij}b_{jk}$）所定出而且逆映射也是光滑的，因為它是由多項式除以行列式後所提供的。因此 $\mathrm{Aut}\,V$ 是一個李羣。我們稱 $\mathrm{Aut}\,R^n$ 為 $GL(n,R)$。

這個例子的造法在複數及四元數上也是行得通的。例如 $\mathrm{Hom}_C(V,V)$ 為 $\mathrm{Hom}_R(V,V)$ 之一個線性子空間，而且 $\mathrm{Aut}_C V=\mathrm{Aut}_R V\cap\mathrm{Hom}_C(V,V)$。所以 $\mathrm{Aut}_C V$ 為 $\mathrm{Hom}_C(V,V)$ 的一個開子集。

1-6　一個光滑流形的切線叢的定義

令 $\{\varphi_\alpha: U_\alpha\longrightarrow X_\alpha\}$ 為向量空間 V 上的一個圖集。對於 α 的全體，取諸空間 $X_\alpha\times V$ 的不相交聯集，並且每當 $x\in X_\alpha\cap X_\beta$；認同 $(x,v)\in X_\alpha\times V$ 與 $(x,(\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha)'v)\in X_\beta\times V$。記此疊合空間為 $T(X)$，並且定義 $p: T(X)\longrightarrow X$ 如後 $p(x,v)=x$。這就是切線叢。它是 X 的一個不變量。

我們稱 $p^{-1}x$ 為點 $x\in X$ 上的切空間，並且記為 X_x，而且稱 X_x 的一個點為 x 上的一個切向量。

注意，$T(X)$ 可依顯然的方式造成為一個光滑流形，而且 p 為一個光滑映射。

給以一個光滑映射 $f: X\longrightarrow Y$，我們可以造一個光滑且自然的叢映射 $f_*: T(X)\longrightarrow T(Y)$ 即對於 $x\in X_\alpha$ 及 $fx\in Y_\beta$ 置 $f_*(x,v)=(f_x,(\psi_\beta^{-1}f\varphi_\alpha)'v)$。

1-7 記號 令G爲一李羣，其么元爲e。則我們以$L(G)$代表G_e及$L(f)$代表$f_*|G_e$。則L爲一函子。我們也以f'代表f_*，這是可由下面的例子而看出。

1-8 範例 考慮例 1-5.1. 則在圖表下，我們可以將在R^n的原點上的一切空間認同爲R^n。若$f: R^m \longrightarrow R^n$爲一光滑映射，則在這認同下$f_*|R_0{}^n = f'$。

1-9 定義 我們稱一流形X的切線叢的一光滑横截面爲一光滑向量場。這是說，它是一個光滑映射$\lambda: X \longrightarrow T(X)$使得$p\lambda = 1$。

令G爲一李羣。對於$x \in G$，定義$L_x: G \longrightarrow G$爲$L_x(g) = xg$。這是光滑的。則在G上的一光滑向量場λ將是左不變的若下列的圖形對於任何的x都是可交換:

$$\begin{array}{ccc} T(G) & \xrightarrow{L_{x*}} & T(G) \\ \uparrow \lambda & & \uparrow \lambda \\ G & \xrightarrow{L_x} & G \end{array}$$

1-10 定義 令G爲一李羣。對於每一$x \in G$定義$A_x: G \longrightarrow G$爲$A_x(g) = xgx^{-1}$。這是一個光滑自同構，因而定義出一個線性映射$A_x': G_e \longrightarrow G_e$；這是說，$A_x' \in \mathrm{Aut} G_e$。因此$x \longrightarrow A_x'$定義一個映射$Ad: G \longrightarrow \mathrm{Aut} G_e$這是一個光滑同型。

第二章　一參數子羣，指數映射，等等

2-1　引理　假使在 R^n 的原點 0 的一個鄰域 U 給一個光滑向量場 $V(x)$。考慮下列的函數方程式 $f'(t,1)=V(f(t))$, $f(0)=0$，其中 $f:R'\longrightarrow R^n$。則有一 $\varepsilon>0$ 使得在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 裏，上列的函數方程式有一解，而且這個解是唯一的且是光滑的。

這是下面引理的一個特殊情形:

2-2　引理　令 $U\subset R^n$ 及 $V\subset R^m$ 分別爲 $0, y_0$ 的鄰域。令 $V(x,y)$ 爲 R^n 裏的一個向量場它是光滑地決定於 $x\in U$ 與 $y\in V$。對於每一個 $y\in V$，考慮函數方程式 $f(0)=0$, $f'(t,1)=V(f(t),y)$，其中 $f:R^1\longrightarrow R^n$，則有一 $\varepsilon>0$ 及 R^m 中 y_0 的一個鄰域 V' 使得對於每一個 $y\in V'$ 上述方程式在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 中有一解，這個解是唯一而且是光滑地依 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 及 $y\in V'$ 而定的。

證明　讀者可參考〔12, p. 94, 命題 1〕,〔5, 第二章, 定理 4. 1〕,〔2, 附錄, 第二節〕, 或〔8, 第九章, 定理 1〕。

2-3　定義　G 的一個一參數子羣爲李羣的一同型 $\theta:R'\longrightarrow G$，其中 R' 爲一加法李羣。而其圖集爲只包含一個由么射所提供的圖表。

2-4　範例　在 $T^2=R^2/Z^2$ 裏，對於任何常數 C 置 $\theta(t)=(t, ct)$。

2-5　令 θ 爲 G 的一個一參數子羣。令 $(0,1)$ 爲在 R' 的原點的單位切向量。對於 θ 我們連結一個向量 $(\theta'(0,1)\in G_e$。則:

2-6 定理 這在 G 的諸一參數子羣與 G_e 裏的諸向量之間建立了一對一對應。

證明 首先我們需要下面的引理

2-7 引理 令 X 為一個光滑流形，$V(x)$ 為 X 上的一個光滑向量場而且 θ, φ: $[a, b] \longrightarrow X$ 為兩個滿足下列條件的光滑函數，

$$\theta'(t, 1) = V(\theta(t))$$
$$\varphi'(t, 1) = V(\varphi(t))$$
$$\theta(a) = \varphi(a)。$$

則對於一切的 $t \in [a, b]$，$\theta(t) = \varphi(t)$.

證明 令 $S = \{d \in [a, b] \mid \theta(t) = \varphi(t)$，一切的 $t \in [a, b]\}$ 並且 c 為 S 的最小上界。則 $\theta(c) = \varphi(c)$ 這是由於連續性之故。若 $c < b$，我們可以在 $\theta(c) = \varphi(c)$ 取局部坐標並且應用 2-1 而得知對於一切 $t \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, $\theta(t) = \varphi(t)$，這與 c 的定義不合。因此 $c = b$。

2-6 的證明

(i) 唯一性。假定 θ 對應於 $v \in G_e$。向量 $(0, 1)$ 可被擴張成 R' 上的一個左不變的向量場 $(t, 1)$，而且 v 可被擴張成 G 上的一個左不變的向量場 $v(x)$。取與下圖相應的切空間的圖

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "L_t"'] & G \arrow[d, "L_{\theta(t)}"] \\ R \arrow[r, "\theta"] & G \end{tikzcd}$$

我們看出 $\theta'(t, 1) = L'_{\theta(t)} v = v(\theta(t))$。因此，由 2.7 知 θ 是唯一的。

(ii) 存在性。給一個 $v \in G_e$，擴張 v 至 G 上的一左不變的向量場 $v(x)$。則依 2-1 知 $\theta'(t, 1) = v(\theta(t))$，$\theta(0) = 0$ 在

$t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 有一解。

首先我們將證明，對於 $|s|<\frac{1}{2}\varepsilon$，$|t|<\frac{1}{2}\varepsilon$ 我們有 $\theta(s)\theta(t)=\theta(s+t)$。然而，對於固定的 s，$\theta(s)\theta(t)$ 與 $\theta(s+t)$ 皆是方程式 $\varphi'(t,1)=v(\varphi(t))$，$\varphi(0)=\theta(s)$ 的解。因此依 2-7 而得 $\theta(s)\theta(t)=\theta(s+t)$。

現在定義 $\phi: R'\longrightarrow G$ 如下：對於 $t\in R'$ 選一個正整數N使得 $\left|\frac{t}{N}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，並且置 $\phi(t)=\left(\theta\left(\frac{t}{N}\right)\right)^N$。$\phi$ 是良好定義的因爲若M爲另一個這樣的整數，則依前一段我們有$\left(\theta\left(\frac{t}{MN}\right)\right)^N=\theta\left(\frac{t}{M}\right)$，所以$\left(\theta\left(\frac{t}{N}\right)\right)^N=\left(\theta\left(\frac{t}{MN}\right)\right)^{MN}=\left(\theta\left(\frac{t}{M}\right)\right)^M$。更進一步地說，$\phi$ 是一個羣同型，因爲若 $\left|\frac{s}{N}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ 而且 $\left|\frac{t}{N}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，我們有

$$\phi(s+t)=\left(\theta\left(\frac{s+t}{N}\right)\right)^N=\left(\theta\left(\frac{s}{N}\right)\right)^N\left(\theta\left(\frac{t}{N}\right)\right)^N$$
$$=\phi(s)\phi(t)$$

現在 ϕ 也是光滑的，且擴張至 θ。所以 ϕ 是一個一參數子羣而且 $\phi'(0,1)=v$。

2-8 指數映射的定義 定義 $c\times p: G_e\longrightarrow G$ 如下：令 $v\in G_e$ 而且令 θ_v 爲G的相對應的一參數子羣。則 $c\times p(tv)=\theta_v(t)$。

我們需要證明 $\theta_v(t)$ 只是取決於 tv。對於固定的 s，$\theta_v(st)$ 顯然是對應於 sv 的一參數子羣。因此 $\theta_v(st)=\theta_{sv}(t)$，所以 $\theta_v(s)=\theta_{sv}(1)$

2-9 定理 $c\times p$ 爲光滑的。

證明 令 $v_0\in G_e$。我們要證明 $c\times p$ 爲在 v_0 的一個鄰域的光滑函數。

然而，$\theta_v(t)$ 爲微分方程式

$$\begin{aligned}\theta_v'(t,1) &= v(\theta_v(t)) \\ &= L'_{\theta_v(t)}v\end{aligned}$$

的解。現在 $L_x'v$ 爲 $x\in G$ 及 $v\in G_e$ 的一個光滑函數。所以由 (2.2) 得知當 $|t|<\varepsilon$ 且 v 在 v_0 的一個鄰域內，此解爲 v 及 t 的一光滑函數。

取一正整數 N 使得 $\frac{1}{N}<\varepsilon$。則 $e\times p\ v=\theta_v(1)=(\theta_v(t))^N$，它在 v_0 的一個鄰域內爲 v 的一個光滑函數。

2-10　註　$\exp: G_e\longrightarrow G$ 引出 $\exp'=1: G_e\longrightarrow G_e$ 而且

2-11　命題　exp 是自然的。這是說，給一李羣的同型 $\varphi: G\longrightarrow H$ 引出 $\varphi': G_e\longrightarrow H_e$，則下圖爲可交換的。

$$\begin{tikzcd} G_e \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\exp"'] & H_e \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & H \end{tikzcd}$$

證明　令 $v\in G_e$ 而且令 $\theta: R'\longrightarrow G$ 爲 G 的相對應的一參數子羣。則 $\varphi\theta: R'\longrightarrow H$ 爲 H 的對應於 $\varphi'v$ 的一參數子羣，因爲導函數是自然的。因此 $\exp\varphi'v=\varphi\theta(1)=\varphi\exp v$。

2-12　範例　令 V 爲一有限維實數向量空間，而且取 $G=\mathrm{Aut}V$，它是 $\mathrm{Hom}(V,V)$ 的一個開子空間。我們能夠將 G_e 與 $\mathrm{Hom}(V,V)$ 認同。令 $A\in\mathrm{Hom}(V,V)$。則

$$\exp A=1+A+\frac{A^2}{2}+\cdots\cdots+\frac{A^n}{n!}+\cdots\cdots$$

證明　考慮 $1+At+\frac{A^2t^2}{2}+\cdots\cdots+\frac{A^nt^n}{n!}+\cdots\cdots$。我們很容易看出這是由 R' 映至 $\mathrm{Aut}\,V$ 的一個光滑同型而且是對應於 A 的一參數子羣。因此

$$\exp A = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \cdots\cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots\cdots$$

2-13　範例　考慮 $G=T^n=R^n/Z^n$。則 $G_e=R^n$，而且 exp 可被認同爲覆蓋映射 $R^n \longrightarrow T^n$。

2-14　定理　exp 爲 G_e 中 0 的一個鄰域與 G 中 e 的一個鄰域的微分同構。

證明　這即刻可由 2-10 與賈柯勃（Jcobian）定理導出。（參考〔12, p. 12，定理 1〕）。

2-15　定理　令 $G_e=V_1 \oplus V_2$，並且定義 $\varphi: G_e \longrightarrow G$ 如 $\varphi(v_1, v_2) = \exp v_1 \exp v_2$。則 φ 爲 G_e 中 0 的一個鄰域與 G 中 e 的一個鄰域的一個微分同構。

證明　φ 爲一個合成函數 $V_1 \oplus V_2 \xrightarrow{\exp \times \exp} G \times G \xrightarrow{\mu} G$，因而是可微分的。進而，$\varphi'$ 在 V_1 與 V_2 上爲么射，因而在 G_e 上也是么射。現在我們可以依 2-14 的證明而得證。

2-16　命題　令 G_1 代表 G 的么分量，而且令 $S \subset G_1$ 爲 e 的一個鄰域。則由 S 所生成的子羣爲 G_1。

證明　顯然 $gp\{S\} \subset G_1$。現在 $gp\{S\}$ 爲 G_1 的一個開子羣，所以它的所有陪集都是開的。因此 $gp\{S\}$ 也是閉的，所以 $gp\{S\}=G_1$。

2-17　定理　若 G 爲連通的，則一個李羣同型 $\theta: G \longrightarrow H$ 是被誘導同型 $\theta': G_e \longrightarrow H_e$ 所決定的。

證明　依 2-11 我們有可交換圖:

$$\begin{array}{ccc} G_e & \xrightarrow{\theta'} & H_e \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{\theta} & H \end{array}$$

因此至少在由 exp 的像集所生成的子羣上 θ 是被 θ' 所決定的。但 exp 的像集是在 G 中 e 的一個鄰域，所以在 G 上，θ 是被 θ' 所決定的。

2-18 引理 令 $\varphi_\alpha: U_\alpha \longrightarrow G_\alpha$ 爲 G 上一圖表它把 $0 \in V$ 送至 $e \in G$。則在省略 φ_α 下我們能夠在 G 裏 e 的一個鄰域內寫成 $xy = x + y + 0(r)$，其中 $r = r(x, y)$ 表示在 $G \times G$ 裏的一個度量下，(x, y) 與 (e, e) 之距離。

證明 既然在 G 裏的乘積爲可微分的，有一常向量及常線性函數 b, c 使得 $xy = a + bx + cy + 0(r)$。置 $x = e$ 我們得 $y = a + cy + 0(r)$，所以 $a = 0$，$c = 1$。同理 $b = 1$，所以 $xy = x + y + 0(r)$。

2-19 定理 任意的連通交換李羣 G 的形式皆爲 $T^a \times R^b$。

證明 首先我們證明 $\exp: G_e \longrightarrow G$ 爲一同型。令 s 與 t 爲固定的而 N 爲變動的。

$$\exp s \exp t = \left(\exp \frac{s}{N}\right)^N \left(\exp \frac{t}{N}\right)^N$$
$$= \left(\exp \frac{s}{N} \exp \frac{t}{N}\right)^N$$

既然 G 爲交換的，依 2-18 與 2-14

$$\text{上式} = \left[\exp\left(\frac{s}{N} + \frac{t}{N} + 0\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right]^N$$
$$= \exp(s + t + 0(1))$$
$$= \exp(s + t)$$

因此 exp 爲一同型，而由 2-16，exp 爲一蓋射。

考慮 $K = Ker \exp$。依 2-14，因爲 exp 爲一同型，K 爲離散的。現在一實數空間的一離散子羣爲一自由 Abel 羣，其諸生成元 $g_1, \cdots g_r$ 在 R 上是線性無關的。(這可把數學歸納法用在向量空間的維度而證出。) 擴張這個至 G_e 的一組基底。則 K 可被表爲坐標如 $(n_1, \cdots\cdots, n_r, 0, \cdots\cdots, 0)$，其中 $n_i \in Z$，諸點的集合。因此 $G = G_e/K = T^r \times R^{n-r}$。

2-20 系 任意的緊緻且連通的阿貝爾李羣是一個環面。