新编
一元函数积分学

XINBIAN YIYUANHANSHU JIFENXUE

◎ 刘德厚 著

中国石油大学出版社

新编一元函数积分学

刘德厚 著

中国石油大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

新编一元函数积分学 / 刘德厚著.—东营：中国石油大学出版社，2008.7
ISBN 978-7-5636-2635-9

I. 新… II. 刘… III. 微积分—研究 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 105982 号

书　名：新编一元函数积分学
作　者：刘德厚

责任编辑：刘玉兰（0546-8391810）

出 版 者：中国石油大学出版社（山东 东营，邮编 257061）
印 刷 者：东营石大博雅印务有限公司
电子邮箱：eyi0213@163.com
发 行 者：中国石油大学出版社（电话 0546-8392062）
开　　本：130×185　印张：5　字数：108 千字
版　　次：2008 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：16.60 元

前　言

微积分学从 17 世纪末叶由英国数学家、物理学家、天文学家牛顿(Newton，1642－1727)和德国数学家、物理学家、哲学家莱布尼兹(Leibniz，1646－1716)所建立以来，经过漫长的 300 多年的发展，已经成为一门理论体系完善、应用广泛的经典学科.

本书吸收了前人研究的精华，加入了作者本人的一些粗浅的认识. 书中省略了某些理论及其严密的证明，这些省略的内容可参阅《微积分学教程》(Г. М. 菲赫金哥尔茨著)和《数学分析》. 传统的一元函数积分学理论体系是先有不定积分，然后是定积分. 由于原函数存在定理的证明要用到定积分的理论，因此，本书先给出定积分的概念，然后再给出不定积分的概念. 本书在定积分的概念和含有三角函数的表达式的积分等方面采用了作者本人的观点，给出了两个广义牛顿－莱布尼兹公式，并对《高等数学》积分公式表中的六个积分公式的其中三个进行了改进，另三个建立了新的积分公式，改进后的公式或建立的新公式应用时更方便.

本书适合作为高校教师和数学系学生的参考书.

由于作者本人水平所限，书中错误之处在所难免，敬请读者批评指正.

作　者

2008 年 2 月

目　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第 1 章　积分的概念与基本积分法

§1.1　定积分的概念与性质

定积分起源于求平面图形的面积、几何体的体积、变速直线运动的物体运动的路程、变力做功等实际问题.

1.1.1　两个基本问题

1. 平面图形的面积

一个由任意曲线围成的平面图形，总可以分解成若干个曲边梯形之和. 所谓曲边梯形就是由一条连续曲线弧(称为曲边)和三条直线围成的图形，其中两条互相平行且垂直于第三条(称为底边). 因此，要计算一个由任意曲线围成的平面图形的面积，其关键就是求曲边梯形的面积.

设曲边梯形的曲边为连续曲线弧 $y=f(x)$ $(f(x)\geq 0)$ ，底是 x 轴上的闭区间，如图 1-1 所示. 由于它在底边 $[a,b]$ 上各

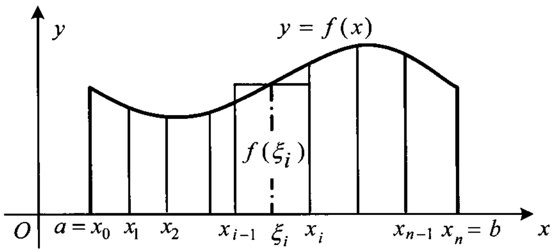

图 1-1

点处的高 $f(x)$ 是变化的，因此，曲边梯形面积 A 不能用矩形或梯形的面积公式计算. 但曲边梯形的高 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续变化的，如果曲边梯形的底边很短，则 $f(x)$ 变化不大，可用一个矩形的面积近似代替曲边梯形的面积. 求曲边梯形面积 A 的思想方法是：先将曲边梯形分成有限个细长条，每个细长条可以近似地看成一个小矩形，则这些小矩形面积的和就是曲边梯形面积的近似值. 分得越细，近似程度越高，无限细分，小矩形面积之和的极限就是曲边梯形的面积，这种方法称为**微元法**或**微元分析法**. 实现上述想法的具体步骤如下：

(1) 分割：

在区间 $[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

将区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其长度记为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，过各分点作 x 轴的垂线，把整个曲边梯形分成 n 个小窄曲边梯形，其中第 i 个小曲边梯形的面积记为 ΔA_i $(i=1,2,\cdots,n)$.

(2) 近似代替：

在第 i 个小曲边梯形的底 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i，用相应的宽为 Δx_i，长为 $f(\xi_i)$ 的小矩形的面积来近似代替这个小曲边梯形的面积，即

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\,\Delta x_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

(3) 求和：

将 n 个小矩形的面积相加就得到曲边梯形面积 A 的近似

值，即

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

(4) 取极限：

记 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\}$，当 $\lambda \to 0$ 时，上述和式的极限就是所求曲边梯形的面积 A，即

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \tag{1}$$

2. 变速直线运动的路程

设某物体作变速直线运动，已知速度 $v = v(t)$ 是连续函数，求物体在时间段 $[T_1, T_2]$ 内所经过的路程 s.

由于物体是变速直线运动，因此，不能用物体在某一时刻的速度代替在时间段 $[T_1, T_2]$ 上的速度，但速度是连续变化的，可以用类似于求曲边梯形面积的方法来解决.

(1) 分割：

在时间区间 $[T_1, T_2]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2 ,$$

将时间区间 $[T_1, T_2]$ 分成 n 个小时间段 $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，其长度记为 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$，相应地物体经过的路程记为 Δs_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

(2) 近似代替：

在第 i 个小时间段 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一时刻 τ_i，用 τ_i 时刻的速度 $v(\tau_i)$ 近似代替物体在 $[t_{i-1}, t_i]$ 上各个时刻的速度，则

$$\Delta s_i \approx v(\tau_i)\ \Delta t_i \quad (i = 1,2,\cdots,n) .$$

(3)求和:

因为总路程等于各部分路程之和，于是，总路程的近似值

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i .$$

(4)取极限:

记 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\}$，当 $\lambda \to 0$ 时，上述和式的极限就是所求变速直线运动的路程，即

$$s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i . \tag{2}$$

以上两例虽然实际意义不同，但解决问题所用的方法是相同的，并且所求量最终都归结为求具有相同结构形式的和式的极限. 用这种求和式的极限的方法还可以解决其他一些几何问题、物理问题、力学问题等等. 抛开它们的实际意义，单从数学结构上的共同特性，可抽象出定积分的概念.

1.1.2 定积分的概念

定义 1 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义，在 (a,b) 内任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b ,$$

将区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$，其长度 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，在第 i 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i 作乘积 $f(\xi_i)\ \Delta x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，则称 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的**定积分**，记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i .$$

其中，$\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量，a 称为积分下限，b 称为积分上限，$[a,b]$ 称为积分区间，$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分和.

当极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在时，称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积或定积分存在，否则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上不可积或定积分不存在.

由定积分的定义可以看出，定积分的数值与被积函数 $f(x)$ 及积分区间 $[a,b]$ 有关，而与区间 $[a,b]$ 的分法和点 ξ_i 的取法无关，而且与积分变量的记号也无关，所以

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u .$$

根据定积分的定义，曲边梯形的面积可表示为

$$A=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x ;$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

变速直线运动的路程可以表示为

$$s=\int_{T_1}^{T_2} v(t)\,\mathrm{d}t.$$

函数满足什么条件时一定可积？有下述两个定理.

定理 1 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 2 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有有限个第一类间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

上述两个定理的证明请参看《微积分学教程》(Г. М. 菲赫金哥尔茨著)，这里不再赘述.

1.1.3 广义积分

定积分的积分区间是有限区间，但实际问题中还会遇到积分区间是无穷区间的积分，以及被积函数在积分区间上有个别无定义的点且是无穷间断点的积分问题，因此，需要将定积分概念加以推广. 为了区别于前面的积分，通常把这两种推广了的积分称为广义积分或瑕积分.

1. 积分区间为无穷区间的广义积分

定义 2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $b>a$，则称 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 为函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的广义积分，记为 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

若极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

收敛，否则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

类似地，可定义广义积分

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

若极限 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称广义积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则称广义积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 3　函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x ,$$

其中 a 为任意实数. 当上式右端两个广义积分都收敛时，称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

2. 无界函数的广义积分

定义 4　设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，则称极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的广义积分，记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x .$$

若极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

类似地，当 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$ 时，可以定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x.$$

若极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 5 若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 的两个端点处都无界，而在 (a,b) 内连续，任取常数 c $(a<c<b)$，定义

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{a+\varepsilon_1}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_c^{b-\varepsilon_2} f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

当上式右端两个极限都存在时，称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 6 若 $f(x)$ 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$，定义

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

当上式右端两个广义积分都收敛时，称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则称其发散.

1.1.4　定积分的几何意义

在$[a,b]$上，当$f(x)\geq 0$时，我们已经知道$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$在几何上表示以$y=f(x)$为曲边，以$[a,b]$为底的曲边梯形的面积；当$f(x)\leq 0$时，即曲边梯形在$x$轴的下方时，在几何上$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$表示以$y=f(x)$为曲边，以$[a,b]$为底的曲边梯形面积的负值；当$f(x)$有时取得正值，有时又取得负值时，如图 1-2 所示，

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 .$$

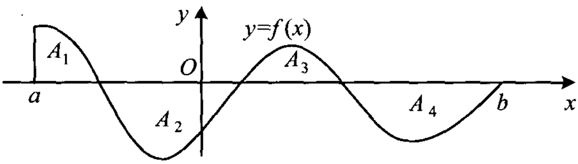

图 1-2

一般地，定积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$的几何意义是介于直线$x=a$及$x=b$之间，$x$轴之上、下相应的有符号的曲边梯形面积的代数和.

由定积分的几何意义，可得

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 .$$

在定积分的定义中，总是假设$a<b$，为了以后应用方便起见，补充规定：当$a>b$时，从a到b的积分就是$-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$，并且也用$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$来表示，于是

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.1.5 定积分的性质

以下总假设 $f(x)$、$g(x)$ 等都在所涉及的积分区间上可积，积分上限未必大于下限.

性质 1 $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b-a$.

证 根据定积分的定义

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n \Delta x_i = b-a.$$

性质 2 $\int_a^b [k_1 f(x) \pm k_2 g(x)]\,\mathrm{d}x$

$$= k_1\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm k_2\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad (k_1, k_2\text{是常数}).$$

证 根据定积分的定义和极限的运算法则，有

$$\int_a^b [k_1 f(x) \pm k_2 g(x)]\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n [k_1 f(\xi_i) \pm k_2 g(\xi_i)]\Delta x_i$$

$$= k_1 \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \pm k_2 \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= k_1\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm k_2\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

性质 3（定积分对区间的可加性） 对任意常数 c，有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中，c 可以在 $[a,b]$ 内，也可以在 $[a,b]$ 之外.

证 (1) 当点 c 在 $[a,b]$ 内部时：

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，因此 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值与 $[a,b]$ 的分法无关，我们将 c 取为一个分点，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分和应等于 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上的积分和与在 $[c,b]$ 上的积分和之和，记为

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

令 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} \to 0$，对上式两端取极限，即得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x .$$

(2) 当 c 在 $[a,b]$ 之外，例如 $a<b<c$ 时，根据 (1)，有

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x ,$$

移项，得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x .\end{aligned}$$

性质 4 若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\le g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x .$$

证 因为 $f(x)\le g(x)$，所以对区间 $[a,b]$ 的任意分割及点 ξ_i 的任意取法，都有

$$f(\xi_i)\le g(\xi_i) \quad (i=1,2,3,\cdots,n),$$

于是有

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i .$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com