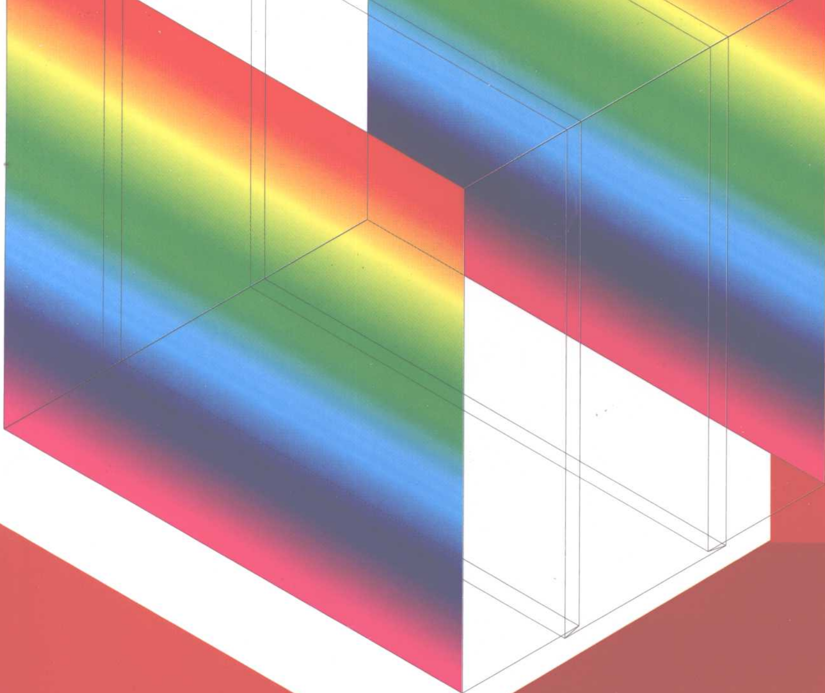

韩崇昭 编著

应用泛函分析

——自动控制的数学基础

清华大学出版社

韩崇昭 编著

应用泛函分析

——自动控制的数学基础

清华大学出版社
北京

内容简介

本书从介绍抽象代数的基本知识入手，主要讨论线性泛函分析的主要内容，包括度量空间、赋范线性空间、赋准范线性空间、内积空间等关于抽象空间的表述，以及有关线性算子各种性态的分析，还就抽象算子方程的求解问题进行讨论；也涉及非线性泛函分析的初步知识。本书特别强调泛函分析在自动控制中的应用，不仅在讲述过程中列举了大量例题，而且开辟专门章节进行专题讨论。本书适合工科信息类专业研究生作为学位课程教材，也可作为相关科学技术人员的参考读物。

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析：自动控制的数学基础/韩崇昭编著.—北京：清华大学出版社，2008.10
ISBN 978-7-302-17861-3

Ⅰ.应…　Ⅱ.韩…　Ⅲ.泛函分析　Ⅳ.O177

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第087910号

责任编辑：陈国新
责任校对：焦丽丽
责任印制：王秀菊
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市春园印刷有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：185×260　**印　张**：24.25　**字　数**：591千字
版　次：2008年10月第1版　**印　次**：2008年10月第1次印刷
印　数：1～3000
定　价：39.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177转3103　产品编号：022275－01

《泛函分析及其在自动控制中的应用》原版序言

本教材系按原电子工业部制定的工科电子类专业教材1986—1990年编审出版规划，由计算机与自动控制教材编审委员会自动控制编审小组组织征稿、评选、推荐出版的。

众所周知，控制理论和系统科学发展到今天，已不再仅仅局限于研究工业过程自动化中的理论问题，而是以惊人的速度渗透到社会、经济、工程、生物、生态和生命科学等研究领域。与此同时，控制理论和系统科学本身在最近二三十年也以惊人的速度不断地更新与发展，业已形成理论体系日臻完善的诸多分支，而其赖以发展的主要数学基础之一便是“泛函分析”。事实上，泛函分析在当今系统理论研究中占有如此重要的地位，以至于不掌握这一数学工具，就无法深入到控制理论和系统科学的研究前沿。

本书是根据笔者近年来在西安交通大学给自控类博士研究生讲授《泛函分析及其在自动控制中的应用》课程的讲稿整理而成，旨在向工科自动控制、系统工程等专业研究生提供一本适用的应用泛函分析教材。笔者努力使本教材既适应工科自控类研究生的数学基础和专业需要，又能保持泛函分析理论体系的严谨性和完整性。为此，我们并没有完全采用数学专业相应教材的体系，而是由介绍代数基础知识入手，引入各种抽象数学系统，包括抽象控制系统的概念，然后转入线性泛函分析的有关内容，最后讨论其在控制理论诸分支中的应用，并且涉及非线性泛函分析的初步知识。我们并不要求读者具备实分析的基础，而把其内容割裂开来，穿插在有关章节中。对于内容较难的章节，标题用“*”号标出，读者根据需要可以跨过这些章节，只需知道某些结论而不必追究其论证细节，并不影响以后各章节内容的学习。

本书初稿曾经北京理工大学吴沧浦教授和西安交通大学张文修教授仔细审阅，提出了许多宝贵的修改意见；而本书的整理出版也受到上海交通大学张钟俊教授和西安交通大学万百五教授、李人厚教授的鼓励和支持，笔者一并深表感谢。同时，笔者也要感谢曾经使用本书初稿的诸位博士研究生，他们不仅完成了书中大部分习题的演算或证明，而且对修改定稿提出了很多有益的建议。

限于笔者的学识水平，初稿虽几经修改，书中的错误或不妥之处仍在所难免，敬请广大读者不吝赐教。

韩崇昭　胡保生

1990年5月于西安交通大学

Foreword 前言

我和胡保生先生于1991年应原电子工业部工科电子类专业教材编审委员会要求，编著出版了《泛函分析及其在自动控制中的应用》一书，目的是向工科自动控制类专业研究生提供一本适用的应用泛函分析教材。本书是在该教材原版的基础上，经仔细修订出版的，更名为《应用泛函分析——自动控制的数学基础》。本书及其初稿在西安交通大学作为工科类博士研究生的公共学位课程教材，已经使用了25年，同时也有不少兄弟院校采用该书作为研究生的学位课程教材。

本书修订的原则是，基本保持原版教材体系的完整性，即不仅包含线性泛函的主要内容，也把相关代数基础知识融入其中，同时强调在自动控制中的应用。笔者在教学中体会到这种体系对于工科研究生是适宜的，容易引导学生掌握相关的数学基本理论，能保持泛函分析理论知识体系的完整性，并在学习基础理论时能联系自动控制的应用问题，因而能促使学生产生比较浓厚的学习兴趣。本书对原版修订的内容主要包括：(1)修改了原版中欠妥的表述方式，尽可能采用明晰的语句和表达式；(2)增加了近年来在信息科学领域与泛函分析有关的最新成果的一些内容，如多分辨分析与小波基，鲁棒控制理论基础等。

笔者尽管做出最大努力，但因学术水平有限，以及应用泛函分析涉及的理论知识和专业应用知识非常庞杂，书中不妥或错误之处在所难免。敬请广大读者不吝赐教，笔者将不胜感激。

韩崇昭

2008年1月于西安交通大学

符号说明

$\in$	属于；
$\varnothing$	空集；
$\subseteq$	蕴涵于；
$\subset$	真蕴涵于；
$\forall$	所有的；
$\exists$	存在；
$\Rightarrow$	推出；
$\Leftrightarrow$	等价；
$\cup$	集合并运算；
$\cap$	集合交运算；
$\backslash$	集合差运算；
Δ	集合对称差；
Π	连乘符号；
Σ	连加符号；
$\sim$	对等；
$\cong$	同构；
$\dot{+}$	直和；
$\oplus$	直交和；
$\perp$	垂直；
$<\cdot,\cdot>$	内积或线性泛函；
$\Vert\cdot\Vert$	范数；
$\vert\cdot\vert$	绝对值或模；
A^c	集合 A 的补集；
A^T	集合 A 的转置；
A^*	集合 A 的转置共轭；
${}^\perp A$	集合 A 的左直交补；
$\alpha(T)$	算子 T 的零数；
$B^\perp$	集合 B 的右直交补；
$B(x_0,r)$	以 x_0 为中心 r 为半径的闭球；
$\beta(T)$	算子 T 的亏数；
$C_{[a,b]}$	$[a,b]$区间上的连续函数空间；

$C^m_{[a,b]}$	$[a,b]$区间上具有 m 次连续导数的函数空间；
$C^\infty_{[a,b]}$	$[a,b]$区间上任意次连续可微函数空间；
$\mathbb{C}$	复数域；
$\mathbb{C}^n$	n 维复空间；
$\mathrm{d}T(x_0)$	算子 T 在 x_0 的 Fréchet 微分；
$\mathrm{D}T(x_0)$	算子 T 在 x_0 的 Gateaux 微分；
dia	直径；
diag	对角；
dim	维数；
dis	距离；
$\mathcal{D}(T)$(或 $\mathrm{dom}T$)	算子 T 的定义域；
$\varepsilon=(E_\lambda)$	谱族；
ess sup	本质上确界；
$\mathcal{F}$	数域$\mathbb{R}$ 或$\mathbb{C}$ ；
$\mathbb{G}$	有理数域；
$\mathcal{G}(T)$(或 $\mathrm{graph}T$)	算子 T 的图像；
$\mathcal{H}(X,Y)$	赋范线性空间 X 到 Y 的紧算子空间；
inf	下确界；
iff	当且仅当；
int A	集合 A 的内部；
I	指标集或恒等算子；
$\mathrm{Im}x$	复变量 x 的虚部；
J	目标函数；
χ	示性函数；
$\chi(T)$	算子 T 的指标；
lim	极限；
$\overline{\lim}$	上极限；
$\underline{\lim}$	下极限；
l^p	p 方和收敛数列空间；
l^∞	有界数列空间；
$L^p_{[a,b]}$	$[a,b]$区间上 p 方可积函数空间；
$L^\infty_{[a,b]}$	$[a,b]$区间上本质有界函数空间；
$\mathcal{L}(X,Y)$	赋范线性空间 X 到 Y 的有界线性算子空间；
max	最大；
min	最小；
$N(x_0,r)$	以 x_0 为中心 r 为半径的开球；
$\mathbb{N}$	自然数集；
$\mathcal{N}(T)$	算子 T 的零空间；
$\rho(T)$	算子 T 的预解集；

$\rho(x,y)$	x 与 y 的距离函数；
$\sigma(T)$	算子 T 的谱集；
$\sigma_c(T)$	算子 T 的连续谱集；
$\sigma_p(T)$	算子 T 的点谱集；
$\sigma_r(T)$	算子 T 的剩余谱集；
R	关系；
$\mathbb{R}$	实数域；
$\mathbb{R}^n$	n 维实空间；
$\mathbb{R}^+$	非负实数集；
$\overline{\mathbb{R}}$	广义实数集 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$；
$\mathcal{R}(T)$（或 $\mathrm{rang}T$）	算子 T 的值域；
$\mathrm{Re}x$	复变量 x 的实部；
sgn	符号函数；
span	张成；
s. t.	受约束于；
sup	上确界；
$\mathrm{supp}\varphi$	函数 φ 的支集；
$S(x_0,r)$	以 x_0 为中心 r 为半径的球面；
$T:A\to B$	A 到 B 的映射或算子；
T^*	算子 T 的伴随算子；
$\mathcal{T}_t$	算子半群；
X^*	线性空间 X 的对偶空间；
$\mathbb{Z}$	整数集；
$\mathbb{Z}^+$	非负整数集。

Contents 目录

第 1 章

Chapter 1

绪　　论

人们在研究各种自然系统、社会经济系统和工程系统时，发现其内在机理有神奇的相似之处，它们都可以用同一数学工具进行描述和分析，而针对某一特定类型系统研究的结论，也很容易移植到另一类型的系统。系统科学或系统工程，正是研究各种系统共同规律的一门边缘学科，而控制理论则偏重于研究人或外部因素对系统行为的作用。

控制理论、系统工程以及其他应用学科的现代研究方法，往往首先需要建立一个用于描述对象特征的数学模型，进而利用这些模型来分析其静态或动态的行为，诸如稳定性、能控性、能观性、能镇定性等；或者设计某个控制策略或决策方案，从而产生对系统的有效控制作用，使之按人们预期的目标发展。而现实的对象，除了极少数可利用物理定律或社会经济规律进行机理建模之外，大多数需要利用实测数据，按照某种方法，借用计算机辨识建模。对于系统的分析或控制，除了要求掌握专门领域的知识之外，都需要掌握各种数学方法和计算工具。当代计算机技术的辉煌成就，给人们提供了这种研究的可能性，而现代数学理论的发展，已经和正在不断地为控制理论和系统科学提供强有力的分析和计算方法。本书将向读者介绍泛函分析的基本理论体系，及其在控制理论和系统科学诸分支中的应用。

1.1　泛函分析的研究对象

何谓“泛函分析”？根据关肇直给出的定义，“泛函分析是研究无穷维线性空间上的泛函数与算子理论的一门分析数学。无穷维线性空间是描述具无限多自由度的物理系统的数学工具。因此，泛函分析是定量地研究诸如连续介质力学、电磁场理论等一类具有无穷多自由度的物理系统的有力工具。”

所谓物理系统（包括社会经济系统）的自由度，是指用于完全描述系统行为的一组无关量的个数。要澄清泛函分析研究对象的特征，需要考察数学诸分支与自然科学之间的联系。

事实上，经典的数学分析是与经典力学的成就密切相关的，主要用来描述和分析物质作有限自由度连续运动的各种特性。在此，主要研究一元函数或多元函数的性态，诸如单调性、连续性、可微性和可积性等，对连续函数

建立了各种微积分运算。与此同时，数学的抽象把三维立体空间中向量的概念，推广到任意有限维线性空间；同时把力学中简单的坐标变换，推广到一般的线性变换，并且由此引出矩阵对线性变换的表示，以及矩阵的运算等，这些都是线性代数的研究内容。常微分方程理论讨论集中参数对象连续运动过程的数学描述，以及运动轨线即微分方程解的存在性与惟一性问题，而且讨论连续运动过程的稳定性问题，并给出自由运动或受迫运动中运动轨线的求解方法。这种运动也只具有限多自由度，因为我们只考虑特定的系统，以及单个特定函数作用于系统所产生的行为。在电学理论和经典调节原理中，一种广泛适用的频域分析方法要求把函数的定义域由实数扩展到复数，而复变函数论则是专门讨论复变函数性态的数学分支，它给包括 Fourier 变换和 Laplace 变换在内的各种频域分析方法，提供了坚实的理论基础。同样，电学理论和经典调节原理的对象，一般也只具有有限多自由度。

然而，连续介质力学、电磁场理论等的研究对象，一般是分布参数系统，需要用偏微分方程来描述，而完全描述系统行为的一组无关量有无限多个，即系统具无限多自由度。与此同时，现代控制理论和系统科学，已经由研究单个特定函数作用于系统时所产生的行为，扩展到研究一类函数作用于系统时可能产生的行为。这样的一类函数或称函数类、函数空间同样具有无限多自由度。而定义于其上的泛函数或算子，则可用来描述系统的行为或其中的各种关系。

不仅如此，因为有限维线性空间是无限维线性空间的特例，有限自由度运动是无限自由度运动的特例，泛函分析的结论对作有限多自由度运动的对象，也仍然是适用的。

1.2 泛函分析的研究内容

泛函分析的基本概念形成于 19 世纪末到 20 世纪初，而作为一门独立的数学分支则出现于 20 世纪 30 年代。经过 20 世纪 40 至 50 年代的发展，使其成为一门足够成熟的学科。它不断地渗透到各种应用领域，包括连续介质力学、电磁场理论、控制理论和系统科学等。

在某种意义上说，泛函分析提供了一种知识框架，它把数学分析中有关函数性态分析的结论，线性代数中有关向量与向量空间、线性变换的概念，古典变分法中关于泛函变分的概念，微分方程中定性分析与求解的概念等，纳入统一的框架中；同时按照泛函分析的理论体系，给出统一的分析和处理。

在泛函分析中，首先要把有限维向量空间的概念，推广到一般线性空间，包括由函数类形成的无限维线性空间，接着要讨论一类在元素间定义了距离的集合，称为“度量空间”。在度量空间中，才有可能定义点序列的收敛，并由此引出点集的某些拓扑概念，同时还讨论定义于其上的泛函数与算子的某些性质。一类特殊的度量空间称为“赋范线性空间”，它兼有线性空间的代数结构和赋范数的拓扑结构，是用以描述具无限多自由度运动过程的一般数学工具。而在赋范线性空间中，又有一类更接近有限维空间(欧氏空间)特性的无限维线性空间，称为“内积空间”，其上定义了内积，类似欧氏空间上向量间的标量积，从而可以引入向量间的夹角、向量直交等概念。对各种抽象空间的研究，是泛函分析的研究内容之一。

其次，在泛函分析中，还要把有限维空间上的线性变换推广到一般度量空间上的算子理论，特别是赋范线性空间上的线性算子理论。事实上，相当广泛的一类实际系统，都可以用某些抽象空间，以及存在于这些空间上的算子描述。算子理论，特别是线性算子理论，这是

泛函分析的主要研究内容。算子的性态，诸如连续性、有界性、紧性和闭性等，又是算子理论研究的重点。算子方程求解及线性算子的能解性研究，给各种代数方程和微分方程求解，以及控制系统综合等，提供了理论基础。对偶空间和伴随算子的研究，是算子理论的一个主要组成部分。在算子理论中，还要把矩阵特征值的概念，推广到一般线性算子的谱特性。

线性泛函分析是本书讨论的重点，同时还涉及非线泛函分析的基本知识，特别是有关凸集和凸泛函的凸分析理论，这对比较广泛的一类泛函求极值问题有着重要意义。非线性泛函分析还要把有限维线性空间上函数微积分的概念，推广到无限维线性空间上算子的微积分。

1.3 泛函分析在控制理论中的应用

因为控制理论中几乎所有的问题，都可以用泛函分析中有关空间和算子的术语来描述，而泛函分析严谨广博的理论体系，对所研究问题的归属有明确的规定，同时可以向研究者提供解决问题的途径。例如，利用对偶空间和伴随算子的理论，可以解释控制理论中几乎所有的对偶定理，而这些定理的发现，大多也是数学结论直接演绎的结果。

控制理论所研究的问题，可以概括为系统分析、系统综合、建模和优化。系统分析，包括系统的稳定性分析、能控能观性分析、鲁棒性分析等，主要是分析用以描述系统行为的算子的特性。传统的分析方法是实用的，但只限于某些特定的系统类型。例如传统的频域分析法只限于讨论单输入单输出的线性定常系统。而泛函分析所提供的分析方法，有可能对包括多输入多输出的线性时变系统、分布参数性系统，以及某些类型的非线性系统进行统一的处理，从而获得更加一般的结论。系统的综合，包括控制器和补偿器的设计等，使系统得以镇定或获得某种性能，这是分析的逆问题。传统的综合方法不仅费时费事，而且解决问题的范围比较狭窄。现代的综合方法倾向于构造能用计算机实现的某些算法。迭代算法或递推算法的收敛性分析，以及闭环控制的稳定性分析等，只有借助于泛函分析所提供的工具，才有可能使问题得以解决。系统建模和系统的最优控制，一般是在某些约束条件下，对某个泛函指标进行优化，这更是泛函分析研究范围内的问题。

综上所述，泛函分析已渗透到控制理论和系统科学的各个分支。“欲穷千里目，更上一层楼”，控制理论研究者只有掌握泛函分析这一工具，才有可能一览当今研究潮流中“群峰竞秀，万水争流”的局面。

Chapter 2 第 2 章

代数基础

鉴于工科大学包括自动控制在内的信息类专业研究生并不具备系统的抽象代数的知识，而泛函分析这门课程又经常涉及抽象代数的某些基本概念，所以首先在本章对必要的代数基础知识进行简要介绍，作为学习泛函分析的预备知识。

2.1 集合与映射

2.1.1 集合

集合是数学上最基本的概念，难以给出确切的定义。一般说，所谓**集合**就是指**具有某种属性的事物全体**。构成集合的每个事物称为该集合的**元素**。集合也简称**集**，其元素也简称为**元**。

集合可用列写其所有元素或注明其属性来表示，如

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},\quad A=\{a:a\text{ 具有属性 }P\}。\tag{2.1.1}$$

如果一个集合由有限多个元构成，称之为**有限集**；如果由无限多个元构成，称之为**无限集**；不含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$；只含一个元的集合称为**单点集**。

用$a\in A$表示"a是A中的元"或"a属于A"；用$a\notin A$表示"a不是A中的元"或"a不属于A"。

有两个集合A和B，若A中的所有元均为B中的元，则称A是B的**子集**，或 ***A* 蕴含于 *B***，或 **B 包含 A**，记为$A\subseteq B$，或$B\supseteq A$。

任意集A必是其自身的子集，而空集$\varnothing$又是任意集A的子集。

若集A是集B的子集，而B中至少有一个元不属于A，则称A是B的**真子集**，或 ***B* 真包含 *A***，记为$A\subset B$，或$B\supset A$。

若集A是集B的子集，且B也是A的子集，则称集A与集B**相等**，记为$A=B$。

这个定义也经常用作集合相等的证明方法，即任取$x\in A$，证得$x\in B$，则推知$A\subseteq B$；其次任取$x\in B$，证得$x\in A$，则推知$B\subseteq A$；从而证明$A=B$。在以后的证明中，我们经常采用某些惯用符号："$\forall$"表示"所有的"；"$\exists$"表示"存在"；"$\Rightarrow$"表示"由左面的结论推出右面的结论"；"$\Leftrightarrow$"表示"左右两面

相互推出”。

以集合为元素的集合称为**集类**。如$\mathcal{F}=\{A,B,C\}$，其中的元A,B,C均是集合，$\mathcal{F}$是集类。

A、B两个集合的所有元素共同构成的集合称为A和B的**并集**，记为

$$A\cup B=\{x:x\in A \text{ 或 } x\in B\};\tag{2.1.2}$$

集合$A_1,A_2,\cdots,A_n$的并集定义为

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x:x\in A_1,\text{或 } x\in A_2,\cdots,\text{或 } x\in A_n\}。\tag{2.1.3}$$

A、B两个集合的公共元素构成的集合称为A和B的**交集**，记为

$$A\cap B=\{x:x\in A \text{ 且 } x\in B\};\tag{2.1.4}$$

集合$A_1,A_2,\cdots,A_n$的交集定义为

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{n}A_i&=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\\&=\{x:x\in A_1,\text{且 } x\in A_2,\cdots,\text{且 } x\in A_n\}。\end{aligned}\tag{2.1.5}$$

如果集合A与集合B没有公共元素，即$A\cap B=\varnothing$，则称为A与B**不相交**。

属于集A而不属于集B的所有元构成的集合称为A与B的**差集**，记为

$$A\backslash B=\{x:x\in A \text{ 且 } x\notin B\};\tag{2.1.6}$$

集合A和B的**对称差**记为

$$A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)。\tag{2.1.7}$$

设U是一个特定的集合，$A\subseteq U$；称$U\backslash A$为A关于U的**补集**，记为A^c。此时有

$$A^c\cup A=U,\quad A^c\cap A=\varnothing,\tag{2.1.8}$$

$$U^c=\varnothing,\quad \varnothing^c=U。\tag{2.1.9}$$

对于集类也可以定义并、交运算。设$\mathcal{B}$是一个集类，其元的并和交分别为

$$\bigcup\{B:B\in\mathcal{B}\}=\{x:\exists B\in\mathcal{B},\text{使得 } x\in B\};\tag{2.1.10}$$

$$\bigcap\{B:B\in\mathcal{B}\}=\{x:\forall B\in\mathcal{B},\text{使得 } x\in B\}。\tag{2.1.11}$$

例 2.1.1　设$\mathbb{R}$表示实数集，$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$表示实数序对$(x,y)$的集合，集合$A_m=\{(x,y):y=mx,m\in\mathbb{R}\text{ 固定}\}$表示欧氏平面$\mathbb{R}^2$上$y=mx$直线上的点集；所有这些集合（直线）构成一个集类$\mathcal{A}=\{A_m:m\in\mathbb{R}\}$。在此情况下，集类$\mathcal{A}$的交集为$\bigcap\limits_{m\in\mathbb{R}}A_m=\{(0,0)\}$，即$\mathbb{R}^2$的坐标原点；其并集为$\bigcup\limits_{m\in\mathbb{R}}A_m=\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y):|y|>0\}$，即除去坐标纵轴但保留坐标原点的整个$\mathbb{R}^2$平面。 ▲

前面给出的集合运算具有如下性质：

(ⅰ) 幂等律：$A\cup A=A,A\cap A=A$；

(ⅱ) 交换律：$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$；

(ⅲ) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(ⅳ) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(ⅴ) 恒等律：$A\cup\varnothing=A,A\cap U=A$，
$A\cup U=U,A\cap\varnothing=\varnothing$；