全国高校素质教育教材研究编审委员会审定

微分算子级数法在数学分支中的应用

柯红路 著

DSM DSM DSM

中国教育文化出版社

微分算子级数法在数学分支中的应用

柯红路　著

中国教育文化出版社

图书在版编目（CIP）数据

微分算子级数法在数学分支中的应用/柯红路　著，—中国：中国教育文化出版社，2005年8月

ISBN 988-98104-8-4

Ⅰ.微…　　Ⅱ.柯…　　Ⅲ.数学—数学分析—微分学—微分算子理论

Ⅳ.O175.3

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）

微分算子级数法在数学分支中的应用

柯红路　著

特约编辑：夏麦陵
责任编辑：邱巍
封面设计：张骐年
出版发行：中国教育文化出版社
排　　版：科士洁文印中心
印　　刷：新颖印务有限公司
开　　本：850mm×1168mm　1/32
册　　数：1040 册
印　　张：14.8
字　　数：385 千字
版　　次：2005 年 8 月第 1 版
书　　号：ISBN 988-98104-8-4/G・135
定　　价：29.80 元

地址：北京市海淀区交大东路 46 号 A 座 201 室

序

柯红路先生的新著《微分算子级数法在数学分支中的应用》着重阐述函数的积分化微分运算和常系数线性微分方程的求解，是一本具有许多特色的基础数学教材。观点新颖，分析透彻，内容丰富，应用广泛，也是一本微积分和微分方程方面的重要的教学参考书。值得向高等学校的数学、力学和物理学教师；学习数学的大学生、硕士生和博士生以及有关的数理工作者和工程技术人员推荐。

虽然用算子法（或运算微积）解常微分方程早已有之，但用发展的算子法，即著者所发展的微分算子级数法[英文全称为differentiator series method，缩写为DSM]解微分方程的历史甚短。微分算子，著者又称之为“数值算子”（numerical operator），既具有微分运算的作用（功能）又具有可赋范的数值特性，即它兼具可以取数值的双重性。著者建立的数值算子是一个新理念，不但解决了微分算子级数收敛的问题，也为常系数线性微分方程问题求解的新方法找到了理论依据。

值得一提的是，有史以来，对积分化微分问题，著者用DSM作了系统的讨论。本书的方法主要有四种：第一种，用逆微分算子的位移性构成多项或两项积分算子，从而把对多项式函数的积分化成微分运算。当多项式的次数n≥3时，DSM比分部积分法简单快捷得多；第二种，用微分算子 $e^{a^2t\Delta}$（$\Delta=\sum_{i=1}^{n}D_{x_i}^2$）计算一

类广义积分，简单、明快而有效；第三种，用微分算子 $\frac{1}{a\sqrt{\Delta}}sh(at\Delta)$ 直接快速地计算一类二重积分；第四种，简捷地计算一类变上限积分。

总之，本书用微分符号介绍了微分方程求解和函数积分的一种新方法，即微分算子级数法，也就是著者提出的一种新的积分方法。其特点是把过去计算很繁的一些积分（如一类泊松型积分）用 DSM 变得很简单、实用。

微分算子级数法在数学分支（微积分、概率论、复变函数、常微分方程、偏微分方程、积分变换、积分方程等）中有广泛的应用。例如在概率论和数理统计中，特别对具有正态分布的随机变量的数字特征的积分化为微分运算；在积分学中，使原来很难计算的一些著名的无穷限广义积分演算变得非常方便、简单、快速；又如在复变函数中把通常很难计算的一些积分亦化成简单的微分运算。

DSM 与积分变换法解微分方程的比较

1、DSM 能求常系数线性微分方程的通解，而积分变换法却不能；

2、积分变换法求常系数线性常微分方程的特解过程中由象函数求原象函数时运算很繁，而 DSM 求特解时变为应用级数公式进行简单的微分演算；

3、DSM 能解数学物理方程中的常系数线性热传导方程和波动方程且简单快速，而积分变换只能解少数问题且反演求象原函数一般运算很繁。

本书的其它特点

1、用微分算子 $e^{a^2t\Delta}$、$ch(at\Delta)$、$\frac{1}{a\sqrt{\Delta}}sh(at\Delta)$、$\cos(t\Delta)$、

$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sin(t\Delta)$（均为微分算子级数的简记法）等工具，以全新的面貌表示了一至三维热传导、波动方程柯西问题与混合问题或拉普拉斯方程、泊松方程的柯西问题和边值问题的求解公式与定解问题的运算，使公式或运算过程（配合运用这些微分算子的常用公式表）更加简明扼要；

2、本书较突出地介绍了热传导和波动方程新的解题思路和方法，这就是以内因（问题自身的特性）为主，外因（从方程或问题外部去构造解）为辅的解题思路和方法，即辩证唯物的解题思路和方法；

3、本书对一些著名的椭圆型方程，如拉普拉斯方程和泊松方程的边值问题，首次用 DSM 和新颖的迭加方式进行有效地求解，也对一些线性积分方程问题简单而快速地作了解算；

4、本书的书末对高阶、多维、变系数、线性发展方程的柯西问题和混合问题的微分算子级数解法进行了初步的理论性的探讨，并把前面的热传导和波动方程柯西问题与混合问题的微分算子级数解的公式分别统一为一个公式，也就是给前面有关方程的柯西问题与混合问题的 DSM 求解作了一个高度概括的小结。

微分算子级数法，可以视为运算微积（算子法）在数学的新态势、新条件下的推广，它兼顾了算子法（运算微积）和积分变换法的许多优点，成为一个理想的方法和工具。它的功用大大超过以前的算子法，它将成为求解微分方程的一种普遍的方法，因为它不只是能简单地求一类非齐次常微分方程的特解，还能求对应齐次常微分方程的通解；不但能解常微分方程问题，还能解同类条件的偏微分方程问题；不但能解线性微分方程还能计算一类函数的积分，所以 DSM 不是早先的算子法和运算微积方法，而是一种解微分方程和计算积分的新方法。

本书全面、系统地阐述了函数的积分化微分运算和常系数线

性常、偏微分方程的微分算子级数解的问题，在国内外尚未见到有同类书籍问世。尽管在 DSM 的深刻的理论研究和电脑的使用上尚待作一些工作，但就某种意义上说，在国内本书也可算是一本不多见的专著，在未来的数学教学、科研上，必将充分发挥其应有的作用，特此推荐。

段虞荣序于重庆大学数理学院

2005 年 7 月 28 日

段虞荣，重庆大学教授。中国著名的应用数学专家。是运筹学、优化、偏微分程等多楼学者。早年曾翻译苏联彼得罗夫斯基院士著《偏微分方程讲义》(高等教育出版社，1956 年出版)。

绪 言

《微分方程的新解法——微分算子级数法》一书 2003 年问世以来，收到不少函电和电子邮件，除了对“微分算子级数法”的价值，作用等作了充分地肯定和对著者众多勉励外，也提出了不少值得考虑的问题。其中较突出的问题是研讨数学的同行提的，他们说：“微分算子级数法方法不错，但使用起来不方便，不同数学学科的人，要应用它，首先，要去找到用微分算子级数法计算的公式，其次，要找演算速度最快的方法。”针对这些问题，著者萌生了写“微分算子级数法在数学分支中的应用”一书的想法。

微分算子级数法，英文全称是 Differentiator Series Method 缩写为 DSM，这是中国人创立的一种新的数学方法。微分算子级数法是在解常系数线性常、偏微分方程过程中产生的，其理论基础是无界线性算子理论或新建的数值算子理论。能用微分算子级数法计算的问题所涉及到的函数要无穷次可微即属于 C^{∞}，至于计算的程序，没有统一的模式，要随不同类型的问题和公式而定，但无论哪类问题，计算都是刻板地，程序化地运作，简单易行，效率高，不易出错。

本书的写作计划。“微分算子级数法在数学分支中的应用”一书，不是每个数学分支都讲，也不多讲方法的理论基础，而是选择微分算子级数应用较多的几个数学分支，如积分学，概率论，复变函数，积分变换，常系数常、偏微分方程，对这几个学科，将分类型或专题举例较详细地介绍 DSM 的使用方法和解题步骤，这样作比较实际，让在该数学分支中工作的读者，不必用太多的时间去找计算公式和范例，根据实际问题对号入座并对照例题的作法会很快得到结果。总之，通过上述工作想着重讲常微方程，

发展方程（热传导方程、波动方程等与时间有关的方程）的 DSM 解法和积分化微分运算等应用广泛的，实用性强的三个问题。

为了对 DSM 的应用有一个较全面地了解，把与 DSM 有关的几个问题如椭圆型方程，变系数发展方程，非线性微分方程和积分方程等与 DSM 的关系，也分别作了简单的介绍。最后，附上偏微分方程的发展简史及有关的材料。

感谢广东省湛江海洋大学胡日章、何真、李思东等教授、林强副教授、李晓培博士、重庆大学廖述清老师、柯胜、柯舸、李治霞硕士、李琳莉老师、谢和熙、冯春、唐钰其等教授对我的工作关心和支持；感谢全国高校素质教育教材研究编审委员会的孔惠老师的大力支持和帮助；对中国教育文化出版社的领导和师傅们为此书的出版付的辛勤劳动，表示诚挚地谢意。

微分算子级数法是著者等人创建的一个数学方法，新产生的方法肯定不完善不周全，从而书中遗漏和错误之处一定难免，请专家、读者一旦发现，就不吝批评、赐教，对大家的关心、帮助，著者预先表示衷心地感谢！

本书由中国教育文化出版社和北京全华高协教育咨询有限公司资助出版。

重庆大学理学院　柯红路

2005 年 5 月 9 日

目　录