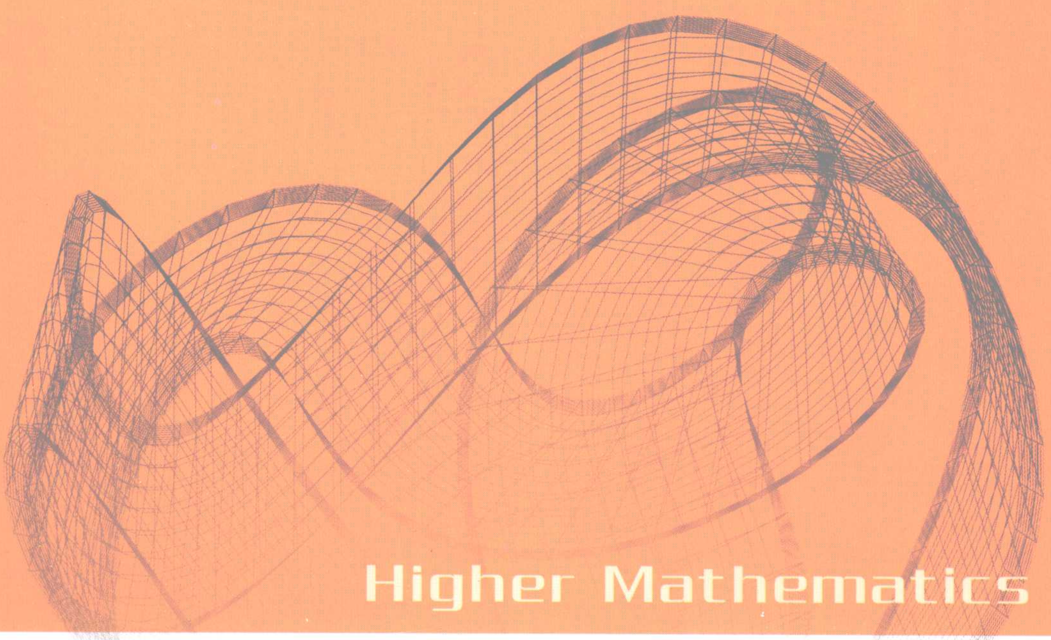
全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学

第三版/下　册

◎主编　盛祥耀



Higher Mathematics

高等教育出版社

高等数学

全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学

第三版

下　册

主　编　盛祥耀
副主编　潘鹊屏
编　者　汪瑶同　钱翼文　王庚生
潘鹊屏　黄奕佗　邢文斗
章　平

高等教育出版社

内容提要

本书是全国高职高专教育"十一五"规划教材。作者按照当前的教学实践和数学课程改革需要，对第二版教材作了适当的修订，保持了简练、明晰的特点，同时更多地采用了描述性概念，并利用几何直观，突出了形象化。

本书分上、下两册。上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用和常微分方程。下册内容包括向量代数、空间解析几何、多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等。为适应不同专业的需要，书中适量配置了一些标有"*"的内容，以便选学。

本书可作为高职高专各专业的教材，也可供工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/盛祥耀主编.—3版.—北京:高等教育出版社,2008.4

ISBN 978-7-04-024135-8

Ⅰ.高… Ⅱ.盛… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第036106号

策划编辑 邓雁城 **责任编辑** 董达英 **封面设计** 张申申 **责任绘图** 黄建英
版式设计 马静如 **责任校对** 王 超 **责任印制** 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京中科印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版 次	1992年8月第1版
开 本	787×1092 1/16		2008年4月第3版
印 张	9.75	**印 次**	2008年4月第1次印刷
字 数	230 000	**定 价**	13.80元

物料号 24135-00

目　　录

第八章　向量代数　空间解析几何

空间解析几何是用代数的方法研究空间图形的一门数学学科，它在其他学科特别是工程技术上的应用比较广泛. 此外，我们在讨论多元函数微积分时，空间解析几何也能给多元函数提供直观的几何解释. 因此在学多元函数的微积分之前，先介绍空间解析几何的知识.

向量代数在后继课程和工程技术中有着广泛的应用. 本章首先介绍二、三阶行列式并建立空间直角坐标系，然后引进向量及其代数运算，最后以向量为工具来研究空间解析几何.

第一节　二阶及三阶行列式　空间直角坐标系

一、二阶及三阶行列式

1. 二阶行列式

我们把 $a_1b_2 - a_2b_1$ 记作

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

即

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

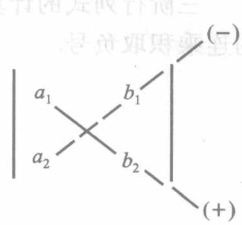
其中 a_1, b_1, a_2, b_2 均为实数，这就叫二阶行列式. a_1, b_1, a_2, b_2 叫做行列式的元素，行列式中横排叫做行，纵排叫做列，二阶行列式含有两行两列.

二阶行列式的值是两项的代数和. 这两项可以按下面右边的图示来记忆：一项是实线上的两个元素的乘积，取正号；另一项是虚线上的两个元素的乘积，取负号.

例如，行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - (-2) \times 3 = 8,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 13 \end{vmatrix} = 2 \times 13 - 0 \times (-1) = 26.$$



可以证明当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 时，二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

的解可以表示成：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

记 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$,$D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$,$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$,若 $D\neq 0$,则

$$x=\frac{D_x}{D},y=\frac{D_y}{D}. \tag{8.1.1}$$

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x+3y-7=0, \\ 5x-4y-6=0. \end{cases}$$

解 原方程组即为

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 5x-4y=6. \end{cases}$$

因为 $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=-23$,$D_x=\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}=-46$,$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-23$,所以

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-46}{-23}=2,$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-23}{-23}=1.$$

2. 三阶行列式

我们把 $a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$ 记作

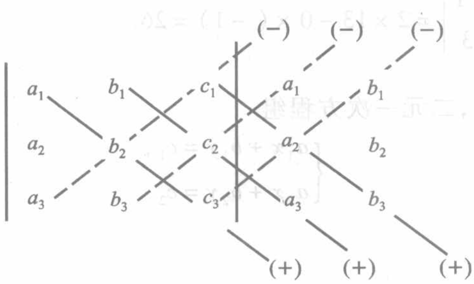
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

即

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{c_3} \end{vmatrix}=\boldsymbol{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3}.$$

这就是三阶行列式,其中 $a_i,b_i,c_i(i=1,2,3)$ 称为行列式的元素,横排称为行,纵排称为列.

三阶行列式的计算可依下面的图示进行:实线上三个元素的连乘积取正号,虚线上三个元素的连乘积取负号.



设 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$. 可以证明当 $D\neq 0$ 时，三元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

的解可表示为

$$x=\frac{D_x}{D}, y=\frac{D_y}{D}, z=\frac{D_z}{D}. \tag{8.1.2}$$

例 2 计算行列式 $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ 的值.

解

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} &= 7\times 2\times 0+0\times 3\times 4+9\times 1\times 5-4\times 2\times 9-5\times 3\times 7-0\times 1\times 0 \\ &= -132.\end{aligned}$$

例 3 解方程 $\begin{vmatrix} 2+x & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ x+5 & -4 & 2 \end{vmatrix}=0$.

解

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2+x & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ x+5 & -4 & 2 \end{vmatrix} &= (2+x)\times 5\times 2+(-3)\times 3\times (x+5)+1\times 1\times (-4)-(x+5)\times 5\times 1- \\ &\quad (-4)\times 3\times (2+x)-2\times 1\times (-3)=8x-24.\end{aligned}$$

所以原方程为

$$8x-24=0,$$

解之，得

$$x=3.$$

根据行列式定义，三阶行列式也可以用二阶行列式表示. 其具体表达式如下：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_3c_2a_1-c_3a_2b_1 \\ &= a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2) \\ &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

因此,三阶行列式可以借助于上面的结果进行计算.例如,例 2 中的行列式可按如下方法计算:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 7 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 9 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 7 \times (-15) + 9 \times (-3) = -132.$$

这与前面计算的结果是相同的.

二、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

过空间定点 O 作三条互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点,并且通常取相同的长度单位.这三条数轴分别称为 x 轴、y 轴、z 轴.各轴正向之间的顺序通常按下述法则确定:以右手握住 z 轴,让右手的四指从 x 轴的正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴的正向,这时大拇指所指的方向就是 z 轴的正向.这个法则叫做右手法则(图 8-1).这样就组成了空间直角坐标系.O 称为坐标原点,每两条坐标轴确定的平面称为坐标平面,简称为坐标面.x 轴与 y 轴所确定的坐标面称为 xy 坐标面.类似地有 yz 坐标面、zx 坐标面.这些坐标面把空间分成八个部分,每一部分称为一个卦限(图 8-2).x,y,z 轴的正半轴的卦限称为第Ⅰ卦限,从第Ⅰ卦限开始,从 Oz 轴的正向向下看,按逆时针方向,先后出现的卦限依次称为第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限;第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限下面的空间部分依次称为第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限.

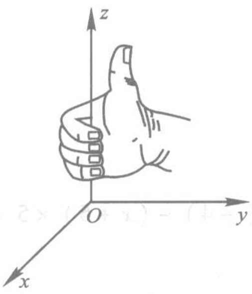


图 8-1

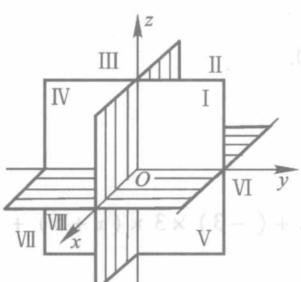


图 8-2

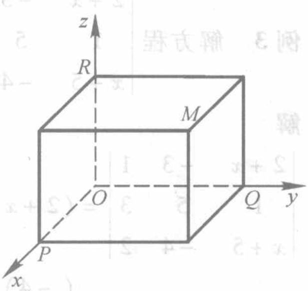


图 8-3

设 M 为空间中的一点,若过点 M 分别作垂直于三坐标轴的平面,与三坐标轴分别相交于 P,Q,R 三点,且这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x,y,z,则点 M 唯一地确定了一组有序数组 x,y 和 z.反之,设给定一组有序数组 x,y 和 z,且它们分别在 x 轴、y 轴和 z 轴上依次对应于 P,Q 和 R 点,过 P,Q 和 R 点分别作平面垂直于所在坐标轴,则这三张平面确定了唯一的交点 M.这样,空间的点就与一组有序数组 x,y,z 之间建立了一一对应关系(图 8-3).有序数组 x,y,z 就称为点 M 的坐标,记为 $M(x,y,z)$,它们分别称为 x 坐标,y 坐标和 z 坐标.

显然,原点 O 的坐标为$(0,0,0)$,坐标轴上的点至少有两个坐标为 0,坐标面上的点至少有一个坐标为 0.例如,在 x 轴上的点,均有 $y=z=0$;在 xy 坐标面上的点,均有 $z=0$.

2. 两点间的距离公式

设空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$,求它们之间的距离 $d=|M_1M_2|$.过点 M_1,M_2 各作

三张平面分别垂直于三个坐标轴，形成如图 8-4 所示的长方体，易知

$$\begin{aligned} d^2 &= |M_1M_2|^2 \\ &= |M_1Q|^2 + |QM_2|^2 (\triangle M_1QM_2 \text{ 是直角三角形}) \\ &= |M_1P|^2 + |PQ|^2 + |QM_2|^2 (\triangle M_1PQ \text{ 是直角三角形}) \\ &= |M_1'P'|^2 + |P'M_2'|^2 + |QM_2|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \end{aligned}$$

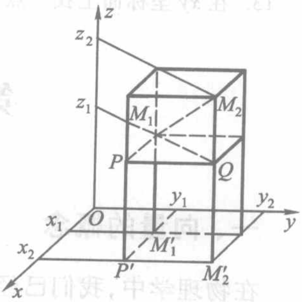


图 8-4

所以

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (8.1.3)$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 的距离

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (8.1.4)$$

例 4 已知 $A(-3,2,1)$，$B(0,2,5)$，求 $\triangle AOB$ 的周长.

解 由公式(8.1.3)可得

$$|AB| = \sqrt{(-3-0)^2 + (2-2)^2 + (1-5)^2} = 5,$$

由公式(8.1.4)可得

$$|AO| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14},$$
$$|BO| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{29}.$$

所以，$\triangle AOB$ 的周长

$$l = |AB| + |AO| + |BO| = 5 + \sqrt{14} + \sqrt{29} \approx 14.$$

习　题　8－1

计算 1～4 题行列式的值.

1. $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$.　　2. $\begin{vmatrix} 4a-5b & 2b \\ -6a & -3b \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}$.　　4. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

利用行列式解 5～8 题中的方程组.

5. $\begin{cases} 3x - y = 3, \\ x + 2y = 8. \end{cases}$　　6. $\begin{cases} 2x - y - 10 = 0, \\ x + 3y - 5 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + z = 1, \\ x - y + 2z = 3. \end{cases}$　　8. $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x - y - z = 1, \\ x - y + z = 2. \end{cases}$

9. 在空间直角坐标系中，作出点 $A(3,1,2)$，并写出其关于：(1) 各坐标面；(2) 各坐标轴；(3) 原点的对称点的坐标.

10. 一立方体的一个面放置在 xy 坐标面上，其底面的中心与原点相合，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，已知立方体的边长为 a，求各顶点的坐标.

11. 求点 $M(4,-3,5)$ 到(1)坐标原点；(2) 各坐标轴；(3) 各坐标面的距离.

12. 试证以 $A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$,$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

13. 在 xy 坐标面上找一点,使它的 x 坐标为 1,且与点 $(1,-2,2)$ 和点 $(2,-1,-4)$ 等距离.

第二节　向量及其坐标表示法

一、向量的概念

在物理学中,我们已经遇到过**既有大小又有方向的量,如力、位移、速度、加速度等. 这类量称为向量,或称为矢量.**

我们常用有向线段来表示向量. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量,记为 $\overrightarrow{AB}$(图 8-5). 也可用一个黑体字母或用一个拉丁字母上面加一个箭头来表示向量,如向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{i},\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a},\vec{i},\vec{v},\vec{F}$ 等等.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小称为该向量的模,记作 $|\boldsymbol{a}|$;**模等于 1 的向量称为单位向量**,与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$;**模等于 0 的向量称为零向量**,记为 $\mathbf{0}$,其方向不定.

我们规定,两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不论起点是否一致,如果其方向相同、模相等,则称它们是相等的. 记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 即经平行移动后,两向量完全相重合. 允许平行移动的向量称为自由向量,本书所讨论的向量均为自由向量.

在物理学中,如果有两个力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$ 作用在同一质点上,则它们的合力 $\boldsymbol{F}$ 可按平行四边形或三角形法则求得. 同样的方法也可用于研究速度的合成. 由此可以定义向量的加法.

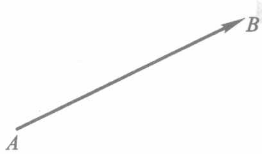


图 8-5

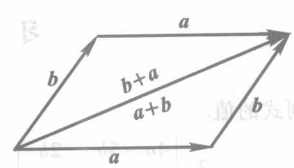


图 8-6

定义 1　设有两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的对角线所表示的向量(图 8-6),称为两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量,记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,这就是向量加法的平行四边形法则.

由图 8-6 可以看出,若以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点,则由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量也是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量. 这是向量加法的三角形法则. 这个法则可以推广到任意有限个向量相加的情形.

从图 8-6、图 8-7 可以看出:向量的加法满足交换律和结合律,即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

根据向量加法的三角形法则,若向量 $\boldsymbol{b}$ 加向量 $\boldsymbol{c}$ 等于向量 $\boldsymbol{a}$,则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差,记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 8-8).

下面,我们给出数量与向量乘积的定义.

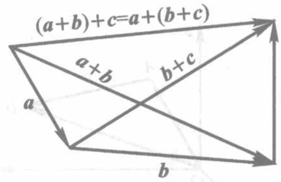


图 8－7

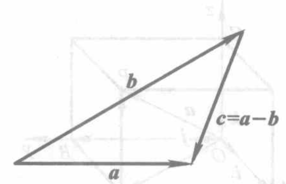


图 8－8

定义 2 设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，λ 是一个非零实数，则 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积仍是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，且

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2) $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向$\begin{cases}与\ \boldsymbol{a}\ 同向，当\ \lambda>0,\\ 与\ \boldsymbol{a}\ 反向，当\ \lambda<0.\end{cases}$

如果 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

容易验证，数乘向量满足结合律与分配律，即

$$\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a},$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},$$
$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},$$

其中 λ,μ 都是数量.

设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，由数乘向量的定义可知，向量$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$的模等于 1，且与 $\boldsymbol{a}$ 同方向，所以有

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},$$

二、向量的坐标表示法

向量的运算仅靠几何方法研究有些不便. 为此需将向量的运算代数化. 下面先介绍向量的坐标表示法.

在空间直角坐标系中，与 x 轴、y 轴、z 轴的正向同向的单位向量分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，称为基本单位向量.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点在坐标原点 O，终点为 $P(x,y,z)$. 过 $\boldsymbol{a}$ 的终点 $P(x,y,z)$ 作三个平面分别垂直于三条坐标轴，设垂足依次为 A,B,C（图 8－9），则点 A 在 x 轴上的坐标为 x，根据向量与数的乘法运算得向量$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$，同理$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$. 于是，由向量加法的三角形法则，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

称 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式**，记作

$$\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}.$$

其中 x,y,z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

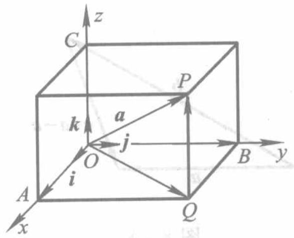


图 8 -9

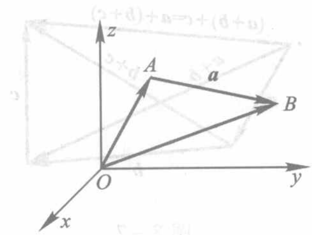


图 8 -10

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 是以 $A(x_1,y_1,z_1)$ 为起点，$B(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量(图 8 -10)，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

解
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

或

$$\boldsymbol{a}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.\tag{8.2.1}$$

由此可知，起点不在坐标原点的向量的坐标，恰好等于向量相应的终点坐标与起点坐标之差.

利用向量的坐标表示式、向量加法的交换律与结合律，以及数乘向量的结合律与分配律，可以将上述关于向量的运算得出下列结果. 设

$$\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\},$$

即

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\pm(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=((x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}),\\\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(\lambda x_1)\boldsymbol{i}+(\lambda y_1)\boldsymbol{j}+(\lambda z_1)\boldsymbol{k},\quad(\lambda\text{ 为数量})\end{aligned}$$

或

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\},$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}.$$

这样向量的加减，数与向量的乘积代数化了.

例 2 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-3)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,-4)$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

解
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=\{2+2,-1+1,-3+(-4)\}=\{4,0,-7\},\\\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=\{2-2,-1-1,-3-(-4)\}=\{0,-2,1\},\\3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}&=\{6,-3,-9\}-\{4,2,-8\}\\&=\{2,-5,-1\}.\end{aligned}$$

向量是由它的模与方向确定的. 如果已知非零向量 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$，那么，它的模与方向也可以

用其坐标来表示.

我们不妨通过平移将 $\boldsymbol{a}$ 的起点放在坐标原点(图 8－11),那么它的终点 A 的坐标就是 (x,y,z). 由公式(8.1.4)可知

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{8.2.2}$$

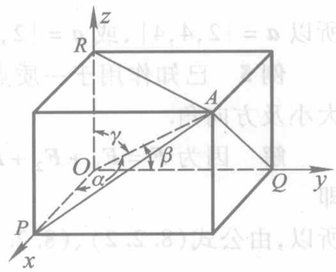


图 8－11

显然,非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向可由该向量与三坐标轴正向的夹角 α,β,γ(其中 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant\gamma\leqslant\pi$),或这三个角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 来表示. α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角;$\cos\alpha$, $\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

因为 $\triangle OPA,\triangle OQA,\triangle ORA$ 都是直角三角形,所以

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \cos\beta&=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \cos\gamma&=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\end{aligned}\right\} \tag{8.2.3}$$

不难发现,

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{8.2.4}$$

这就是说,任一非零向量的方向余弦的平方和等于 1.

例 3 已知 $M_1(1,-2,3),M_2(4,2,-1)$,求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模及方向余弦.

解 由公式(8.2.1)可知

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{4-1,2-(-2),-1-3\}=\{3,4,-4\}.$$

由公式(8.2.2)、(8.2.3)可得

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{3^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{41},$$

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{41}},\cos\beta=\frac{4}{\sqrt{41}},\cos\gamma=\frac{-4}{\sqrt{41}}.$$

例 4 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的两个方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{1}{3},\cos\beta=\frac{2}{3}$,又 $|\boldsymbol{a}|=6$,求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

解 因为 $\cos\alpha=\frac{1}{3},\cos\beta=\frac{2}{3}$,由公式(8.2.4)可知

$$\begin{aligned}\cos\gamma&=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}\\&=\pm\frac{2}{3},\end{aligned}$$

由公式(8.2.3)得

$$x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=6\cdot\frac{1}{3}=2,$$

$$y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta=6\cdot\frac{2}{3}=4,$$

$$z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma=6\cdot\left(\pm\frac{2}{3}\right)=\pm4.$$

所以 $\boldsymbol{a}=\{2,4,4\}$，或 $\boldsymbol{a}=\{2,4,-4\}$.

例 5 已知作用于一质点的三个力为 $\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{F}_2=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求其合力 $\boldsymbol{F}$ 的大小及方向角.

解 因为 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\{1,0,-2\}+\{2,-3,4\}+\{0,1,1\}=\{3,-2,3\}$，

即
$$\boldsymbol{F}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}.$$

所以，由公式(8.2.2)、(8.2.3)可得

$$|\boldsymbol{F}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{22}\approx4.7,$$

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{22}},\ \cos\beta=\frac{-2}{\sqrt{22}},\ \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{22}},$$

查表可得 $\alpha\approx50°14'$，$\beta\approx115°14'$，$\gamma\approx50°14'$.

因此，合力大小的近似值为 4.7 个单位，合力的三个方向角为 $\alpha\approx50°14'$，$\beta\approx115°14'$，$\gamma\approx50°14'$.

习　题　8－2

14. 已知平行四边形 $ABCD$，其对角线交点为 M，又 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$.

15. 试用向量证明：三角形两边中点的连线平行且等于第三边的一半.

16. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\{3,5,-1\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,2,2\}$，$\boldsymbol{c}=\{4,-1,-3\}$，求 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$.

17. 求下列各向量的模、方向余弦以及它们同方向的单位向量：

(1) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$；　　(2) $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

18. 已知 $A(-1,2,3)$，$B(5,-3,4)$，$C(2,1,6)$，试求向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$ 的坐标，并验证：

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}.$$

19. 已知点 $M_1(-1,1,0)$，$M_2(0,-1,2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及其方向余弦.

20. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 的始点为 $(1,-1,5)$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点坐标.

21. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点为 $\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2},-1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$，$|\boldsymbol{a}|=3$，方向余弦中的 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\beta=\frac{1}{2}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标及其起点.

22. 设向量的方向角为 α,β,γ，若(1) $\alpha=60°$，$\beta=120°$，求 γ；(2) $\alpha=135°$，$\beta=60°$，求 γ.

第三节　向量的数量积与向量积

一、两向量的数量积

1. 数量积的定义及其性质

设有非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，且平行移动其中的一个向量，使它们的起点相同(图 8－12)，在这两

个向量所决定的平面内. 两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 正方向之间不超过 $180°$ 的夹角规定为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$.

若有一质点在常力(大小与方向均不变)$\boldsymbol{F}$ 的作用下,由点 A 沿直线移动到点 B,记其位移 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{AB}$(图 8-13). 由物理学可知,力 $\boldsymbol{F}$ 所作之功为

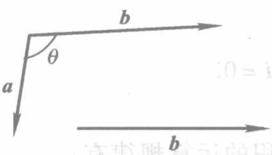


图 8-12

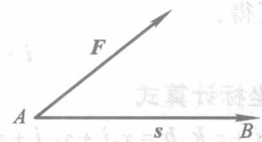


图 8-13

$$W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}}).$$

像这样由两个向量的模及其夹角余弦的乘积构成的算式,在其他问题中还会遇到.

定义 1　两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模及其夹角余弦的连乘积,称为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积或点积,记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).\tag{8.3.1}$$

由数量积的定义,上述做功问题可表示为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

定义 2　$|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影(图 8-14). 记为 a_b,即

$$a_b=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).\tag{8.3.2}$$

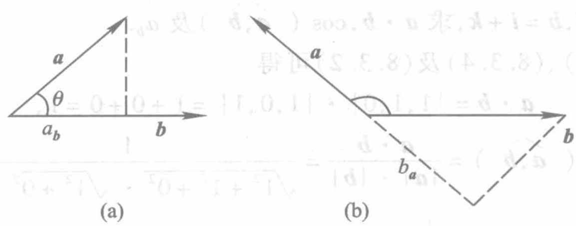


图 8-14

所以,两向量的数量积也可以用投影表示为:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cdot a_b=|\boldsymbol{a}|b_a.$$

容易证明,数量积有下列运算规律:

交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

结合律　$m(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(m\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$,($m$ 为数量);

分配律　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

由数量积的定义可知:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}})=|\boldsymbol{a}|^2$,所以 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$.

(2) 若两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相互垂直,即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$,即有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;反之,当 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 均为非零向量,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时,则 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$,从而断定 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$,即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互垂直. 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中至少有一个是零向量时,我们规定零向量与任何向量都垂直. 这样,两个向量相互垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

由这个结论可得:

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

2. 数量积的坐标计算式

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$,利用数量积的运算规律有:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=x_1x_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_1z_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+y_1x_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}\\&\quad+y_1z_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+z_1x_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+z_1y_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+z_1z_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,\end{aligned}\tag{8.3.3}$$

即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

两向量的数量积等于它们对应坐标乘积之和.

3. 两非零向量夹角余弦的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$ 均为非零向量,由两向量的数量积定义可知:

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})&=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}\\&=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.\end{aligned}\tag{8.3.4}$$

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 及 a_b.

解 由公式(8.3.3)、(8.3.4)及(8.3.2)可得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\{1,1,0\}\cdot\{1,0,1\}=1+0+0=1,$$

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})&=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}\\&=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$a_b=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 2 设力 $\boldsymbol{F}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 作用在一质点上,质点由 $A(1,2,-1)$ 沿直线移动到 $B(3,1,2)$. 求:(1) 力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功;(2) 力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角(力的单位为 N,坐标的单位为 m).

解 因为 $\boldsymbol{F}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$,

$$\overrightarrow{AB}=(3-1)\boldsymbol{i}+(1-2)\boldsymbol{j}+(2+1)\boldsymbol{k}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},$$

所以力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=2\cdot2+(-3)\cdot(-1)+4\cdot3=19(\mathrm{J}),$$

又