

高等学校教学用书

高等数学簡明教程

GAODENG SHUXUE JIANMING JIAOCHENG

B. A. 庫得洛亞夫采夫 著
B. II. 捷米導維奇

人民教育出版社

高等学校教学用书



高等数学简明教程

GAODENG SHUXUE JIANMING JIAOCHENG

B. A. 庫得洛亚夫采夫 著
B. II. 捷米多維奇

人民教育出版社



本书系根据苏联国营技术理论书籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 1949 年出版的庫得洛亚夫采夫 (В. А. Кудрявцев) 和捷米多維奇 (Б. П. Демидович) 著“高等数学簡明教程” (Краткий курс высшей математики) 譯出的。原书經苏联高等教育部批准为生物土壤系、地质系和地理系的教本。

本书主要内容包涵解析几何、微积分和微分方程等部分,可作为我国綜合大学、高等师范学校生物及地理各专业高等数学課程的教材。

簡 装 本 說 明

目前 850 × 1168 毫米規格紙張較少,本书暫以 787 × 1092 毫米規格紙張印刷,定价相应减少 20%。希鑒諒。

高 等 数 学 簡 明 教 程

В. А. 庫得洛亚夫采夫 著
Б. П. 捷米多維奇
趙 根 榕 譯

人民教育出版社出版 高等学校教学用书編輯部
北京宣武門內承恩寺 7 号
(北京市书刊出版业营业許可証出字第 2 号)

商务印书館上海厂印装
新华书店上海发行所发行
各地新华书店經售

統一書号 13010·1017 开本 787×1092 1/32 印張 10 15/16
字數 293,000 印數 1—13,500 定价(4) ¥ 0.80

1953 年 8 月 龍門聯合書局初版 (共印 88,300 册)
1961 年 6 月 新 1 版 1961 年 6 月 上海第 1 次印刷

目 录

引論	1
第一章 平面上直角坐标系与它在簡易問題上的应用	3
§ 1. 平面上点的直角坐标	3
§ 2. 平面上两点間的距离	4
§ 3. 綫段的定比分割	5
§ 4. 三角形的面积	7
習題	9
第二章 曲綫的方程	11
§ 1. 平面解析几何的基本方法	11
§ 2. 平面上点的軌迹	11
§ 3. 平面曲綫的方程	12
§ 4. 由曲綫的方程作其圖象的方法	16
§ 5. 平面解析几何的两个基本問題	17
習題	17
第三章 直綫	19
§ 1. 帶角系数的直綫的方程	19
§ 2. 二直綫間的夹角	21
§ 3. 經過定点且有定方向的直綫的方程	23
§ 4. 經過两个已知点的直綫的方程	24
§ 5. 直綫的截距式方程	25
§ 6. 直綫的标准方程	26
§ 7. 直綫的一般方程	27
§ 8. 直綫的一般方程的討論	30
§ 9. 將直綫的一般方程化为帶角系数的方程	31
§ 10. 一般方程所給出的两条直綫的平行与垂直的条件	31
§ 11. 两条直綫的相交	33
§ 12. 点到直綫的距离	33

習題	35
第四章 二次曲綫	37
§1. 圓	37
§2. 橢圓	40
§3. 双曲綫	45
§4. 双曲綫的漸近綫	48
§5. 拋物綫	50
習題	54
第五章 直角坐标系的变换。極坐标。曲綫的参量方程	57
§1. 直角坐标的变换	57
§2. 坐标軸的平移	57
§3. 坐标軸的旋轉	58
§4. 頂点不在坐标原点的拋物綫	59
§5. 等边双曲綫对于其漸近綫的方程	61
§6. 極坐标	62
§7. 直角坐标与極坐标之間的关系	63
§8. 曲綫的参量方程	64
習題	66
第六章 函数	68
§1. 常量与变量	68
§2. 函数概念	68
§3. 最簡單的函数关系	71
§4. 函数的表示法	73
§5. 多变量的函数	76
§6. 隱函数的概念	77
§7. 反函数的概念	78
§8. 單自变量函数的分类	79
習題	80
第七章 極限論	82
§1. 絕對值的概念	82

§ 2. 无限小量	84
§ 3. 变量的極限	85
§ 4. 无限大量	88
§ 5. 关于无限小量的基本定理	89
§ 6. 关于極限的基本定理	91
§ 7. 变量極限存在的判別准則	94
§ 8. 无限小弧的正弦对该弧本身的比的極限	96
習題	97
第八章 函数的連續性	99
§ 1. 自变量与函数的增量。函数的連續性	99
§ 2. 函数連續性的另一种定义	103
§ 3. 关于連續函数的基本定理	104
§ 4. 不定性的消除	106
習題	107
第九章 导数	108
§ 1. 导数的定义	108
§ 2. 导数的几何意义	110
§ 3. 导数的力学意义	113
§ 4. 导数的其他应用	113
§ 5. 函数的連續性与可微性之間的关系	114
第十章 导数的基本定理	116
§ 1. 引論	116
§ 2. 几个簡單函数的导数	116
§ 3. 函数微分法的基本法則	120
§ 4. 函数之函数的导数	126
§ 5. 反函数的导数	128
§ 6. 隱函数的导数	130
§ 7. 数 e	131
§ 8. 指数函数	135
§ 9. 对数函数	136
§ 10. 对数函数的导数	137

§ 11. 对数导数的概念.....	139
§ 12. 指数函数的导数.....	140
§ 13. 反三角函数的导数.....	140
§ 14. 微分法公式彙集.....	145
§ 15. 高阶导数的概念.....	145
§ 16. 二阶导数的力学意义.....	146
習題	147
第十一章 导数的应用	150
§ 1. 关于函数有限增量的定理及其推論.....	150
§ 2. 單变量函数的增减.....	152
§ 3. 單变量函数的極值.....	155
§ 4. 凹与凸。拐点.....	161
§ 5. 函数圖象的作法.....	164
習題	166
第十二章 微分	169
§ 1. 函数的微分的概念.....	169
§ 2. 函数的微分与导数的关系。独立变量的微分.....	171
§ 3. 微分的几何意义.....	174
§ 4. 微分的力学意义.....	175
§ 5. 函数增量与函数微分的等价性.....	175
§ 6. 微分的性質.....	176
§ 7. 函数的二阶微分与高阶微分。独立变量的二阶微分与高阶微分.....	178
習題	180
第十三章 不定积分	182
§ 1. 原函数。不定积分.....	182
§ 2. 不定积分的基本性質.....	185
§ 3. 簡易不定积分表.....	187
§ 4. 不定积分的形式与独立变量的选择无关.....	188
§ 5. 一般积分法概念.....	190
§ 6. 柯希定理。关于“求不出的”积分的概念.....	198
習題	199

第十四章 定积分	203
§ 1. 定积分的概念	203
§ 2. 曲边梯形面积的导数	205
§ 3. 定积分的几何意义	207
§ 4. 定积分的性质	209
§ 5. 将定积分看成和的极限	213
习题	219
第十五章 定积分的应用	220
§ 1. 旋转体的体积	220
§ 2. 在直角坐标中的弧长	222
§ 3. 在极坐标中的扇形面积	226
§ 4. 在极坐标中的弧长	229
§ 5. 流体的压力	231
习题	233
第十六章 空间解析几何概要	235
§ 1. 空间的直角坐标	235
§ 2. 空间两点间的距离	236
§ 3. 空间线段的方向。方向余弦	236
§ 4. 空间两直线夹角的余弦	237
§ 5. 平面的标准方程	239
§ 6. 平面的一般方程。将它化为标准形式的方法	240
§ 7. 平面的一般方程的讨论	242
§ 8. 空间直线的方程	245
§ 9. 空间直线方程的其他形式	246
§ 10. 球面的方程	249
§ 11. 椭面的方程	250
习题	252
第十七章 多变量函数	254
§ 1. 多变量函数的概念	254
§ 2. 连续性	256
§ 3. 一阶偏导数	257
§ 4. 全微分	258

§ 5. 二阶与高阶偏导数	262
§ 6. 两变量与多变量函数的極大值与極小值	263
§ 7. 用最小二乘法作經驗公式的方法	266
習題	269
第十八章 級数	271
§ 1. 无穷級数的例子	271
§ 2. 級数的收斂性	272
§ 3. 級数收斂性的必要判別准則	275
§ 4. 級数的比較判別准則	278
§ 5. 达郎倍尔的收斂性判別准則	281
§ 6. 絕對收斂性	284
§ 7. 交錯級数。来布尼茲收斂性判別准則	286
§ 8. 幂級数	287
§ 9. 幂級数的微分法与积分法	290
§ 10. 已知函数的幂級数展开式	290
§ 11. 馬克劳林級数	292
§ 12. 应用馬克劳林級数将一些函数展开为幂級数	293
§ 13. 幂級数在近似算法中的应用	296
§ 14. 台劳級数	299
§ 15. 复数域的級数	302
§ 16. 尤拉公式	303
習題	305
第十九章 微分方程	308
§ 1. 基本概念	308
§ 2. 一阶微分方程。变量分离的方程	310
§ 3. 最簡單的二阶微分方程	315
§ 4. 二阶綫齐性微分方程之解的一般性質	322
§ 5. 常系数二阶綫齐性微分方程	324
§ 6. 常系数二阶綫性而非齐性的微分方程	329
習題	335
索引	338

引 論

在十七、八世紀，由于生产、技术与自然科学的蓬勃發展，要求創立适于研究函数关系中的变量的数学工具。因此就产生了新的，所謂“高等数学，”它有以下各分支：解析几何学、微积分学、微分方程論等等。

在解析几何学中，得到了解决几何問題的一般方法（“坐标法”）。在微积分学中，建立了强有力的新概念：“无限小量，”“导数，”“积分，”“无穷級数”等等，使数学家們很容易地解决了古代关于切綫、面积、体积与其他方面著名的問題。借助于微分方程，順利地解决了当时力学与技术上所提出的迫切問題。

我們这本“簡明教程”的目的，在于闡明高等数学的基本概念与它在各方面的应用，在現在高等数学已成为大部分技术科目与自然科学科目的理論基础。掌握它的方法，并善于将它应用于实践，对于每一个自然科学工作者都是迫切需要的。

俄罗斯是有功于高等数学的主要进步的国家之一。我們在这里，不能全面地說明俄罗斯科学家在这門科学发展上所起的作用，只能談談这些数学家們所获得的最重要的貢獻，至于詳細情形請參閱專門的著作^①。

在所有数学知識及其应用的領域中，許多主要的結果几乎全是屬於偉大的数学家、彼得堡科学院院士尤拉（1707-1783）的。他生活与工作的年代正当高等数学尚在它發展的初期。后輩数学家們都鑽研了他的著作，直到今天他的工作还保持着它的意义。

俄罗斯天才数学家 Н. И. 罗巴切夫斯基（1792-1856）在几何学上完成了真正的革命，他創立了新的科学——“罗巴切夫斯基几何

^① 捷洛涅（Б. Н. Делоне）“数学及其在俄罗斯的發展”莫斯科“真理报”出版社1948年出版。葛涅金考（Б. В. Гнеденко）“俄罗斯数学史綱”莫斯科，列宁格勒国营技术理論書籍出版社1946年出版。

学”。罗巴切夫斯基的思想是这样的新颖，以至和他同时代的人都不能理解，并且仅在不久以前他的理论才得到普遍的承认与进一步的发展。在解析领域中，有些基本的结果也属于罗巴切夫斯基。

卓越的院士 M. B. 奥斯特洛格拉得斯基 (1801-1861) 在“重积分”理论方面，导出了重要的关系，并在实践中找到了广泛的应用。

著名的俄罗斯学者 И. И. 切比谢夫 (1821-1894)，由于自己对于“力学理论”的卓越工作，创立了新的数学分支：“函数的最佳近似理论”这个理论现在仍在大力研究中。在许多别的数学领域（“概率论”，“数论”，“积分学”）中一些精美的结果也属于切比谢夫。在解决最困难的问题：“关于质数的分配”，他第一个得到巨大的成就，这个问题是两千多年来任何努力所未能降服过的。

切比谢夫是世界权威数学学派之一——彼得堡数学派的创始人。在这个学派中有一系列的杰出代表 (A. A. 马尔考夫、A. M. 梁普诺夫、B. A. 斯切克洛夫、A. H. 克勒洛夫等)。

苏联的数学家们，非常积极地参加他们的科学研究工作。由于苏联在近代数学的各个领域中，都有很多卓越的学者，而且在他们周围，聚集着许多积极地工作着的学生与继承者的集体，因此，苏联数学家的成就得躋于先进数学思想的水平。在巨著“苏联数学三十年”中，总结了苏联数学家的主要工作。

第一章

平面上直角坐标系与它在簡易問題上的应用

§ 1. 平面上点的直角坐标.

确定平面上点的位置的数,称为这个点的坐标;而用来规定坐标的方法,称为坐标法(狭义的).

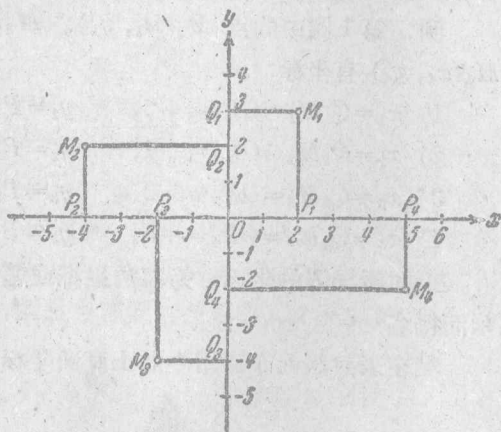
最簡單的一个确定平面上点的位置的方法如下:在平面上取两条互相垂直的直綫(坐标軸):水平直綫 Ox (橫軸)与鉛垂綫 Oy (縱軸);它們的交点 O 称为坐标原点(第1圖).在坐标軸上規定两个正向,即(如第1圖中箭头所指的):在 Ox 軸上由左向右算作正;而在 Oy 軸上由下向上算作正.

茲对已知点 M 导入两个数:这个点的橫坐标 x 与縱坐标 y .

用某一單位表示点至縱軸的距离的数称为橫坐标 x ,如点在縱軸的右边,这个数取正号(+);如在左边,取負号(-).

用某單位(平常与橫坐标的單位相同)表示点至橫軸的距离的数称为縱坐标 y ,如点在橫軸的上方,这个数取正号(+);如在下方,取負号(-).

这两个数 x 与 y 可以取为点 M 的坐标,因为它們完全确定平面上点的位置,即每一双数 x 与 y 惟有一点与之对应,这个点以这一双数为坐标;反之,平面上的每个点都有确定的坐标 x 与 y . 如果点



第 1 圖

M 有坐标 x 与 y , 則用 $M(x, y)$ 表示(横坐标 x 在第一位, 而縱坐标 y 在第二位)。写坐标时, 正号照例可以省略。

Ox 軸与 Oy 軸将平面分为四部分, 各称为象限。由两个坐标都为正的那个象限开始, 按时針反向依次用号碼 (I, II, III 与 IV) 来表示这四个象限, 則得下列坐标符号表:

	I	II	III	IV
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-

从前圖容易看出来: 如果点在横軸上, 則它的縱坐标 y 等于零; 如果它在縱軸上, 則它的横坐标 x 等于零。因此, 如果点与坐标原点重合, 則它的坐标都是零。

例. 第1圖中的点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ 与 $M_4(x_4, y_4)$ 有坐标:

- 1) $x_1 = Q_1M_1 = OP_1 = +2$, $y_1 = P_1M_1 = OQ_1 = +3$;
- 2) $x_2 = Q_2M_2 = OP_2 = -4$, $y_2 = P_2M_2 = OQ_2 = +2$;
- 3) $x_3 = Q_3M_3 = OP_3 = -2$, $y_3 = P_3M_3 = OQ_3 = -4$;
- 4) $x_4 = Q_4M_4 = OP_4 = +5$, $y_4 = P_4M_4 = OQ_4 = -2$,

上面所导入的坐标称为直角坐标或笛卡尔坐标 (由数学家笛卡尔而得名)。

現在来討論几个应用平面上直角坐标的最簡單的題。

§ 2. 平面上两点間的距离。

假設有兩個点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ (第2圖)。試用其坐标表示这两个点間的距离 d 。

由点 A 与 B 作 Ox 軸的垂綫 AP 与 BQ , 并經過点 A 引与 Ox 軸平行的直綫 AC , 則得直角三角形 ABC 。由此直角三角形,

$$d^2 = AB^2 = AC^2 + CB^2, \quad (1)$$

但

$$AC = PQ = OQ - OP = x_2 - x_1,$$

$$CB = QB - QC = QB - PA = y_2 - y_1.$$

將 AC 与 CB 这两个值代入等式(1), 則得

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

由此,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2)$$

在根式前取正号(+), 因为两点間的距离, 按它的本义来講, 不能是負的。

这样, 平面上两个点間的距离等于这两个点的同名坐标的差的平方和的平方根。

用公式(2), 容易求得点 $M(x, y)$ 与坐标原点的距离。

事实上, 假設

$$x_1 = y_1 = 0; \quad x_2 = x, \quad y_2 = y,$$

則得

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2},$$

但上式也容易直接推演出来。

注意: 在推演公式(2)的时候, 我們是假設点 A 与 B 在第一象限的, 因此, 它們的坐标都是正的。不难証明, 当这两个点中有一个或两个都在其他的象限时, 就是当它們的坐标有几个是負的或全是負的时候, 公式(2)仍真确。

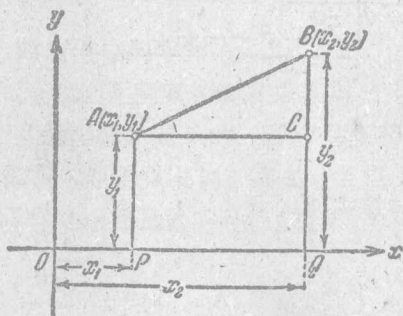
例. 試計算点 $A(-3, 2)$ 与 $B(1, -1)$ 間的距离 AB 。

用公式(2), 有

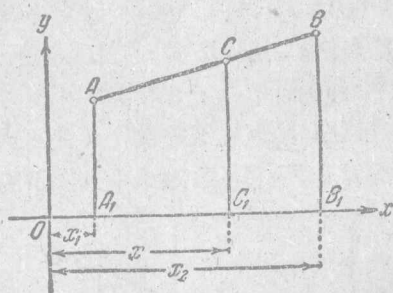
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(1+3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

§ 3. 綫段的定比分割.

假設連結点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ (第3圖)的綫段 AB 被点 C 分为两綫段 AC 与 CB , 而 AC 对 CB 的比等于 $l(l>0)$:



第 2 圖



第 3 圖

$$\frac{AC}{CB} = l. \quad (3)$$

試用綫段 AB 的端点的坐标表示点 $C(x, y)$ 的坐标 x 与 y 。

由点 A, B 与 C 各作 Ox 轴的垂綫 AA_1, BB_1 与 CC_1 。根据初等几何学中大家都知道的定理：

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{AC}{CB}$$

与等式(3)，得

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = l. \quad (4)$$

由第 3 圖知，

$$A_1C_1 = OC_1 - OA_1 = x - x_1,$$

$$C_1B_1 = OB_1 - OC_1 = x_2 - x.$$

将这两式代入公式 (4)，得

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = l. \quad (5)$$

对未知横坐标 x 解方程 (5)，得

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l};$$

同样，

$$y = \frac{y_1 + ly_2}{1 + l}.$$

因此，分割綫段 AB 为比 l (看成由 A 到 B) 的点 $C(x, y)$ 的坐标用下列公式来确定

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 + lx_2}{1 + l}, \\ y &= \frac{y_1 + ly_2}{1 + l}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

如点 C 平分綫段 AB ，則 $AC = CB$ ，因此

$$l = \frac{AC}{CB} = 1.$$

用 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 表示綫段 AB 中点的坐标, 则根据公式 (6), 得

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ \bar{y} &= \frac{y_1 + y_2}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

即, 綫段中点的坐标等于它的端点对应坐标的半和.

注意: 在推演公式 (6) 与 (7) 时, 我們假设綫段 AB 之端点 A 与 B 都在第一象限, 因此, 点 A 与点 B 的坐标都是正的. 但容易証明: 当綫段 AB 的端点有一个或两个都在其他的象限时, 就是, 当点 A 与点 B 的某几个坐标是負的, 或所有坐标都是負的时候, 公式 (6) 与 (7) 仍真确.

例. 点 $C(x, y)$ 将点 $A(-5, -3)$ 与 $B(4, -6)$ 間的綫段 AB 分为比 $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$, 試求点 C 的坐标.

这时 $l = \frac{3}{2}$, 因此,

$$x = \frac{-5 + \frac{3}{2} \cdot 4}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{2}{5};$$

$$y = \frac{-3 + \frac{3}{2} \cdot (-6)}{1 + \frac{3}{2}} = -4\frac{4}{5}.$$

§ 4. 三角形的面积.

假设有三角形 $M_1M_2M_3$ (第4圖), 試应用頂点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ 与 $M_3(x_3, y_3)$ 的坐标表示它的面积.

由点 M_1 , M_2 与 M_3 各作 Ox 軸的垂綫 M_1P_1 , M_2P_2 与 M_3P_3 . 用 Δ 表示三角形 $M_1M_2M_3$ 的面积. 由第4圖, 容易看出来:

$\Delta =$ 梯形 $M_1P_1P_3M_3$ 的面积 + 梯形 $M_3P_3P_2M_2$ 的面积
 - 梯形 $M_1P_1P_2M_2$ 的面积. (8)

用点 M_1, M_2, M_3 的坐标表示各梯形的面积, 则得

梯形 $M_1P_1P_3M_3$ 的面积

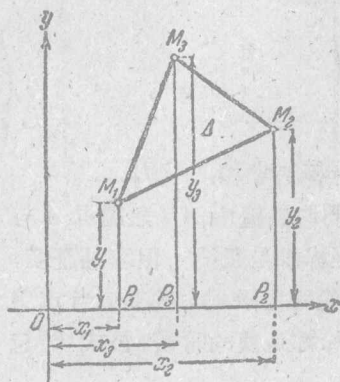
$$= \frac{P_1M_1 + P_3M_3}{2} \cdot P_1P_3$$

$$= \frac{y_1 + y_3}{2} (x_3 - x_1),$$

梯形 $M_3P_3P_2M_2$ 的面积

$$= \frac{P_3M_3 + P_2M_2}{2} \cdot P_3P_2$$

$$= \frac{y_3 + y_2}{2} (x_2 - x_3),$$



第 4 圖

梯形 $M_1P_1P_2M_2$ 的面积 $= \frac{P_1M_1 + P_2M_2}{2} \cdot P_1P_2 = \frac{y_1 + y_2}{2} (x_2 - x_1)$.

将这三式代入公式 (8), 则得

$$\Delta = \frac{1}{2} [(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + (y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - (y_1 + y_2)(x_2 - x_1)]. \quad (9)$$

经过简单的变换, 即得三角形 $M_1M_2M_3$ 的用顶点坐标表示的面积公式:

$$\Delta = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]. \quad (10)$$

为了记忆公式 (10), 应当注意: 当式中一项转到另外一项时, 足碼 1, 2 与 3 是按照輪換法則形成的:

注意. 在推演三角形 $M_1M_2M_3$ 的面积公式 (10)

时, 我們假设它的顶点全在第一象限, 因此它的坐标都

是正的. 除此以外, 还假设: 三角形顶点 M_1, M_2 与 M_3 按时針反向一个跟着一个. 但可証明: 当顶点任意分布时, 公式 (10) 总能给出三角形 $M_1M_2M_3$ 面积的数值. 这时, 如果顶点 M_1, M_2 与 M_3 的

