高等学校教学用书

高等数学簡明教程

GAODENG SHUXUE JIANMING JIAOCHENG

В. А. 庫得洛亚夫采夫
Б. П. 捷米导維奇 著

人民教育出版社

高等学校教学用书

高等数学簡明教程

GAODENG SHUXUE JIANMING JIAOCHENG

B. A. 庫得洛亚夫柔夫
Б. П. 捷米导維奇 著

人民教育出版社

本书系根据苏联国营技术理論书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы) 1949年出版的庫得洛亚夫采夫(В. А. Кудрявцев)和捷米导維奇(Б. П. Демидович)著"高等数学簡明教程"(Краткий курс высшей математики)譯出的。原书經苏联高等教育部批准为生物土壤系、地质系和地理系的教本。

本书主要內容包括解析几何、微积分和微分方程等部分,可作为我国綜合大学、高等师范学校生物及地理各专业高等数学課程的教材。

簡装本說明

目前 850×1168 毫米規格紙張較少,本书暂以 787×1092 毫米規格紙張印刷,定价相应减少20%。希鉴諒。

高等数学簡明教程

В. А. 庫得洛亚夫采夫
Б. П. 捷米导維奇 著
赵根榕 譯

人民教育出版社出版 高等学校数学用书編輯部 北京宣武門內承恩寺7号
(北京市书刊出版业营业許可証出字第2号)

商务印书館上海厂印装
新华书店上海发行所发行
各地新华书店經售

統一书号 13010·1017 开本 787×1092 1/32 印張 10 15/16
字数 293,000 印数 1—18,500 定价(4) ¥0.80
1953年8月龙門联合书局初版(共印88,300册)
1961年6月新1版 1961年6月上海第1次印刷

目　录

引　論

在十七、八世紀，由于生产、技术与自然科学的蓬勃發展，要求創立适于研究函数关系中的变量的数学工具．因此就产生了新的，所謂“高等数学，”它有以下各分支：解析几何学、微积分学、微分方程論等等．

在解析几何学中，得到了解决几何問題的一般方法（“坐标法”）．在微积分学中，建立了强有力的新概念：“无限小量，”“导数，”“积分，”“无穷級数”等等，使数学家們很容易地解决了古代关于切綫、面积、体积与其他方面著名的問題．借助于微分方程，順利地解决了当时力学与技术上所提出的迫切問題．

我們这本“簡明教程”的目的，在于闡明高等数学的基本概念与它在各方面的应用，在現在高等数学已成为大部分技术科目与自然科学科目的理論基础．掌握它的方法，并善于将它应用于实踐，对于每一个自然科学工作者都是迫切需要的．

俄罗斯是有功于高等数学的主要进步的国家之一．我們在这里，不能全面地說明俄罗斯科学家在这門科学發展上所起的作用，只能談談这些数学家們所获得的最重要的貢献，至于詳細情形請参閱專門的著作[1]．

在所有数学知識及其应用的領域中，許多主要的結果几乎全是屬于偉大的数学家、彼得堡科学院院士尤拉（1707–1783）的．他生活与工作的年代正当高等数学尙在它發展的初期．后輩数学家們都鑽研了他的著作，直到今天他的工作还保持着它的意义．

俄罗斯天才数学家 Н. И. 罗巴切夫斯基（1792–1856）在几何学上完成了眞正的革命，他創立了新的科学——“罗巴切夫斯基几何

---

[1] 捷洛涅（Б. Н. Делоне）“数学及其在俄罗斯的發展”莫斯科“眞理报”出版社1948年出版．葛涅金考（Б. В. Гнеденко）“俄罗斯数学史綱”莫斯科，列宁格勒国营技术理論書籍出版社1946年出版．

学”. 罗巴切夫斯基的思想是这样的新穎，以至和他同时代的人都不能理解，并且仅在不久以前他的理論才得到普遍的承認与进一步的發展. 在解析領域中，有些基本的結果也屬于罗巴切夫斯基.

卓越的院士 M. B. 奥斯特洛格拉得斯基 (1801-1861) 在“重积分”理論方面，导出了重要的关系，并在实踐中找到了广泛的应用.

著名的俄罗斯学者 П. Л. 切比謝夫 (1821-1894)，由于自己对于“力学理論”的卓越工作，創立了新的数学分支：“函数的最佳近似理論”这个理論現在仍在大力研究中. 在許多别的数学領域（“概率論”，“数論”，“积分学”）中一些精美的結果也屬于切比謝夫. 在解决最困难的問題：“关于質数的分配”，他第一个得到巨大的成就，这个問題是两千多年来任何努力所未能降服过的.

切比謝夫是世界权威数学学派之一——彼得堡数学派的創始人. 在这个学派中有一系列的杰出代表 (A. A. 馬尔考夫、A. M. 梁普諾夫、B. A. 斯切克洛夫、A. H. 克勒洛夫等).

苏联的数学家們，非常积極地参加他們的科学研究工作. 由于苏联在近代数学的各个領域中，都有很多卓越的学者，而且在他們周圍，聚集着許多积極地工作着的学生与繼承者的集体，因此，苏联数学家的成就得蹐于先进数学思想的水平. 在巨著“苏联数学三十年”中，总結了苏联数学家的主要工作.

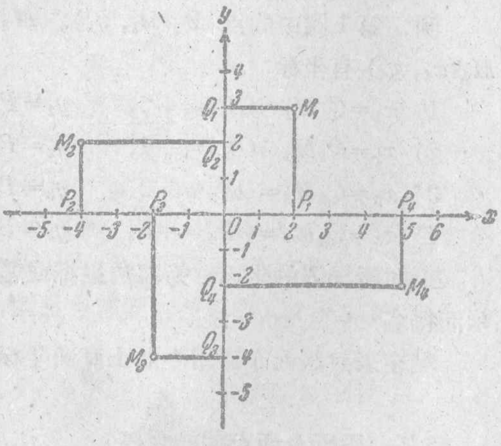
第一章

平面上直角坐标系与它在簡易問題上的应用

§1. 平面上点的直角坐标.

确定平面上点的位置的数,称为这个点的**坐标**;而用来規定坐标的方法,称为**坐标法**(狭义的).

最簡單的一个确定平面上点的位置的方法如下:在平面上取两条互相垂直的直綫(**坐标軸**):水平直綫 Ox(横軸)与鉛垂綫 Oy(縱軸);它們的交点 O 称为**坐标原点**(第1圖).在坐标軸上規定两个**正向**,即(如第1圖中箭头所指的):在 Ox 軸上由左向右算作正;而在 Oy 軸上由下向上算作正.



第1圖

茲对已知点 M 导入两个数:这个点的**横坐标** x 与**縱坐标** y.

用某一單位表示点至縱軸的距离的数称为**横坐标** x,如点在縱軸的右边,这个数取正号(+);如在左边,取負号(−).

用某單位(平常与横坐标的單位相同)表示点至横軸的距离的数称为**縱坐标** y,如点在横軸的上方,这个数取正号(+);如在下方,取負号(−).

这两个数 x 与 y 可以取为点 M 的坐标,因为它們完全确定平面上点的位置,即每一双数 x 与 y 惟有一点与之对应,这个点以这一双数为坐标;反之,平面上的每个点都有确定的坐标 x 与 y. 如果点

M 有坐标 x 与 y，則用 $M(x, y)$ 表示(横坐标 x 在第一位，而縱坐标 y 在第二位)．写坐标时，正号照例可以省略．

Ox 軸与 Oy 軸将平面分为四部分，各称为象限．由两个坐标都为正的那个象限开始，按时針反向依次用号碼 (I, II, III 与 IV) 来表示这四个象限，則得下列坐标符号表：

	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

从前圖容易看出来：如果点在横軸上，則它的縱坐标 y 等于零；如果它在縱軸上，則它的横坐标 x 等于零．因此，如果点与坐标原点重合，則它的坐标都是零．

例．第1圖中的点 $M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$，$M_3(x_3, y_3)$ 与 $M_4(x_4, y_4)$ 有坐标：

1) $x_1=Q_1M_1=OP_1=+2,\qquad y_1=P_1M_1=OQ_1=+3;$

2) $x_2=Q_2M_2=OP_2=-4,\qquad y_2=P_2M_2=OQ_2=+2;$

3) $x_3=Q_3M_3=OP_3=-2,\qquad y_3=P_3M_3=OQ_3=-4;$

4) $x_4=Q_4M_4=OP_4=+5,\qquad y_4=P_4M_4=OQ_4=-2,$

上面所导入的坐标称为**直角坐标或笛卡尔坐标**(由数学家笛卡尔而得名)．

現在来討論几个应用平面上直角坐标的最簡單的題．

§2．平面上两点間的距离．

假設有两个点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$(第2圖)．試用其坐标表示这两个点間的距离 d．

由点 A 与 B 作 Ox 軸的垂綫 AP 与 BQ，并經过点 A 引与 Ox 軸平行的直綫 AC，則得直角三角形 ABC．由此直角三角形，

$$d^2=AB^2=AC^2+CB^2, \tag{1}$$

但

$$AC=PQ=OQ-OP=x_2-x_1,$$
$$CB=QB-QC=QB-PA=y_2-y_1.$$

将 AC 与 CB 这两个值代入等式(1)，则得

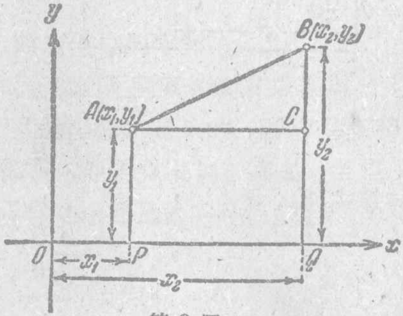
$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

由此，

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (2)$$

在根式前取正号(+)，因为两点間的距离，按它的本义来講，不能是負的。

这样，**平面上两个点間的距离等于这两个点的同名坐标的差的平方和的平方根.**



第 2 圖

用公式(2)，容易求得点 $M(x, y)$ 与坐标原点的距离。事实上，假設

$$x_1=y_1=0;\quad x_2=x,\quad y_2=y,$$

則得

$$OM=\sqrt{x^2+y^2},$$

但上式也容易直接推演出来。

注意： 在推演公式(2)的时候，我們是假設点 A 与 B 在第一象限的，因此，它們的坐标都是正的. 不难証明，当这两个点中有一个或两个都在其他的象限时，就是当它們的坐标有几个是負的或全是負的时候，公式(2)仍眞确.

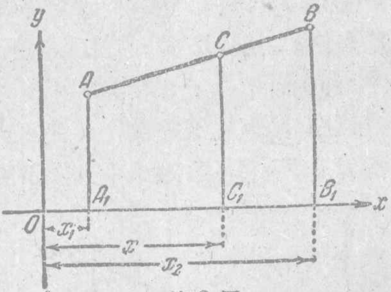
例. 試計算点 $A(-3, 2)$ 与 $B(1, -1)$ 間的距离 AB.

用公式(2)，有

$$AB=\sqrt{(1+3)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{4^2+(-3)^2}$$
$$=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$$

§3. 綫段的定比分割.

假設連結点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$(第3圖)的綫段 AB 被点 C 分为两綫段 AC 与 CB，而 AC 对 CB 的比等于 $l(l>0)$:



第 3 圖

$$\frac{AC}{CB}=l. \qquad (3)$$

試用綫段 AB 的端点的坐标表示点 $C(x, y)$ 的坐标 x 与 y.

由点 A, B 与 C 各作 Ox 軸的垂綫 AA_1, BB_1 与 CC_1. 根据初等几何学中大家都知道的定理:

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}=\frac{AC}{CB}$$

与等式(3), 得

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}=l. \qquad (4)$$

由第3圖知,

$$A_1C_1=OC_1-OA_1=x-x_1,$$
$$C_1B_1=OB_1-OC_1=x_2-x.$$

将这两式代入公式 (4), 得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=l. \qquad (5)$$

对未知横坐标 x 解方程 (5), 得

$$x=\frac{x_1+lx_2}{1+l};$$

同样,
$$y=\frac{y_1+ly_2}{1+l}.$$

因此,分割綫段 AB 为比 l (看成由 A 到 B) 的点 $C(x, y)$ 的坐标用下列公式来确定

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x_1+lx_2}{1+l},\\ y&=\frac{y_1+ly_2}{1+l}.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

如点 C 平分綫段 AB, 则 $AC=CB$, 因此

$$l=\frac{AC}{CB}=1.$$

用 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 表示綫段 AB 中点的坐标，則根据公式 (6)，得

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{x_1+x_2}{2},\\ \bar{y}&=\frac{y_1+y_2}{2},\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

即，綫段中点的坐标等于它的端点对应坐标的半和.

注意：在推演公式(6)与(7)时，我們假設綫段 AB 之端点 A 与 B 都在第一象限，因此，点 A 与点 B 的坐标都是正的. 但容易証明：当綫段 AB 的端点有一个或两个都在其他的象限时，就是，当点 A 与点 B 的某几个坐标是負的，或所有坐标都是負的时候，公式(6)与(7)仍眞确.

例. 点 $C(x, y)$ 将点 $A(-5, -3)$ 与 $B(4, -6)$ 間的綫段 AB 分为比 $\frac{AC}{CB}=\frac{3}{2}$，試求点 C 的坐标.

这时 $l=\frac{3}{2}$，因此，

$$x=\frac{-5+\frac{3}{2}\cdot 4}{1+\frac{3}{2}}=\frac{2}{5};$$

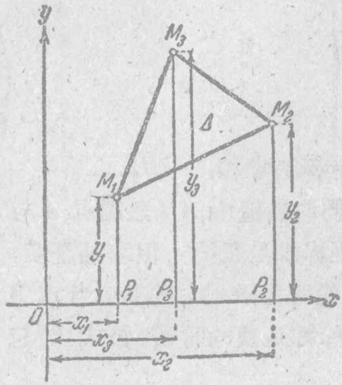
$$y=\frac{-3+\frac{3}{2}\cdot(-6)}{1+\frac{3}{2}}=-4\frac{4}{5}.$$

§4. 三角形的面积.

假設有三角形 $M_1M_2M_3$ (第4圖). 試应用頂点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ 与 $M_3(x_3, y_3)$ 的坐标表示它的面积.

由点 M_1, M_2 与 M_3 各作 Ox 軸的垂綫 M_1P_1, M_2P_2 与 M_3P_3. 用 Δ 表示三角形 $M_1M_2M_3$ 的面积. 由第4圖，容易看出来：

$$\Delta=\text{梯形 } M_1P_1P_3M_3 \text{ 的面积}+\text{梯形 } M_3P_3P_2M_2 \text{ 的面积}$$
$$-\text{梯形 } M_1P_1P_2M_2 \text{ 的面积}. \tag{8}$$



第 4 圖

用点 M_1, M_2, M_3 的坐标表示各梯形的面积，則得

梯形 $M_1P_1P_3M_3$ 的面积
$$=\frac{P_1M_1+P_3M_3}{2}\cdot P_1P_3$$
$$=\frac{y_1+y_3}{2}(x_3-x_1),$$

梯形 $M_3P_3P_2M_2$ 的面积
$$=\frac{P_3M_3+P_2M_2}{2}\cdot P_3P_2$$
$$=\frac{y_3+y_2}{2}(x_2-x_3),$$

梯形 $M_1P_1P_2M_2$ 的面积$=\dfrac{P_1M_1+P_2M_2}{2}\cdot P_1P_2=\dfrac{y_1+y_2}{2}(x_2-x_1)$.

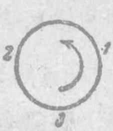
将这三式代入公式 (8)，則得

$$\Delta=\frac{1}{2}[(y_1+y_3)(x_3-x_1)+(y_3+y_2)(x_2-x_3)$$
$$-(y_1+y_2)(x_2-x_1)]. \tag{9}$$

經过簡單的变换，即得三角形 $M_1M_2M_3$ 的用頂点坐标表示的面积公式：

$$\Delta=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]. \tag{10}$$

为了記忆公式(10)，应当注意：当式中一項轉到另外一項时，足碼 1, 2 与 3 是按照輪換法則形成的：



注意. 在推演三角形 $M_1M_2M_3$ 的面积公式 (10) 时，我們假設它的頂点全在第一象限，因此它的坐标都是正的. 除此以外，还假設：三角形頂点 M_1, M_2 与 M_3 按时針反向一个跟着一个. 但可証明：当頂点任意分布时，公式 (10) 总能給出三角形 $M_1M_2M_3$ 面积的数值. 这时，如果頂点 M_1, M_2 与 M_3 的