全国高职高专教育“十一五”规划教材

经济数学

ECONOMIC MATHEMATICS

吴素敏 主编

高等教育出版社
Higher Education Press

经济数学

全国高职高专教育"十一五"规划教材

经济数学

吴素敏　主编

高等教育出版社

内容摘要

作为经济数学教材，本书讲述了函数、极限、连续、一元函数的微积分、线性代数与线性规划初步、概率论与数理统计初步，简要介绍了多元函数的微积分的概念及简单计算，还涉及如何利用高等数学知识建立数学模型，及利用 MATLAB 解决模型的基本方法. 每节配有习题，各章配有综合练习题.

本书以培养应用型人才为目标，遵循启发式教学，注重培养数学思维和方法，适合高职高专院校经济类和管理类学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/吴素敏主编. —北京：高等教育出版社，2008.7

ISBN 978 - 7 - 04 - 024348 - 2

Ⅰ.经… Ⅱ.吴… Ⅲ.经济数学 - 高等学校：技术学校 - 教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 099148 号

策划编辑 邓雁城 **责任编辑** 蒋 青 **封面设计** 张志奇 **责任绘图** 杜晓丹
版式设计 王艳红 **责任校对** 朱惠芳 **责任印制** 尤 静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010 - 58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800 - 810 - 0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京铭成印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787 × 1092　1/16	**版　　次**	2008 年 7 月第 1 版
印　　张	21.25	**印　　次**	2008 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	520 000	**定　　价**	28.80 元

物料号　24348 - 00

前　　言

为适应我国高等职业技术的发展，我们根据教育部关于加强高职高专人才培养工作的意见，本着“拓宽基础，强化能力，加强应用，服务专业需求”和“必需、够用”的原则编写了本书.

在编写过程中，我们吸收了以往高职高专经济数学教材的优点，结合当前高职高专教学改革实际，本着知识通俗化、应用化的原则编写内容、例题，从实际问题出发引出概念，增加了一些应用类内容及题目，选取了难易适中的例题和课后习题及章后综合练习题，以适应高职高专经济、管理等相关专业教学需求.增加了较多的应用例题，增加了数学建模、数学实验方面的内容，注重对学生应用数学解决实际问题能力的培养.力求编出具有自身特色的高水平的高职高专经济数学教材.

本书共五篇九章内容，主要包括一元函数微积分、多元函数微积分简介、微分方程简介、线性代数初步、概率统计初步及经济方面的应用，介绍了利用 MATLAB 进行计算的应用.教学总时数约为 100 学时，选学内容可另加课时.

本书由高等教育出版社高等职业教育研究与出版中心策划组稿，由吴素敏教授担任主编，负责统稿，丁杰、杜俊仁、马明环、刘宗朴、宋敏娜为副主编，高惠老师担任主审，王玉苏老师参加了部分章节的审阅.吴素敏编写第一篇，丁杰编写第二篇，马明环、赵立民编写第三篇，宋敏娜、罗胡英编写第四篇、杜俊仁、刘宗朴编写第五篇.

由于编者水平有限，不足之处在所难免，欢迎专家和广大师生批评指正.

编者

2008 年 5 月

目 录

第一篇 函数 极限 连续

第二篇 微分学基础

第四篇 线性代数与线性规划初步

第五篇 概率论与数理统计初步

第一篇
函数　极限　连续

第一篇

函数　极限　连续

第一章　函数　极限　连续

学习目标

掌握基本初等函数的性质和图形. 理解复合函数及分段函数的概念,了解隐函数、反函数、二元函数的概念. 理解极限的概念,会应用无穷小与无穷大的关系、有界变量与无穷小的乘积、等价无穷小代换求极限. 掌握极限的四则运算法则. 掌握应用两个重要极限公式求极限的方法. 理解函数连续性概念,会求函数的间断点,会建立简单经济问题的数学模型,并会利用 MATLAB 求解函数、极限.

函数是微积分的重要概念,极限是微积分的基础,连续是函数的一种性态. 连续函数是高等数学研究的主要对象. 本章通过实际问题引入函数的概念和一些简单的经济函数,介绍了建立函数模型的一般方法,为微积分的学习奠定基础.

§1.1　函数的概念与性质

一、函数的概念

函数的定义

观察

在自然现象和社会问题中,经常遇到变量之间的关系问题. 观察下面的问题:

例 1.1　一商场衬衣零售价为 120 元/件,每件衬衣的利润为零售价的 20%,如果这家商场一年卖出这种衬衣的件数用 x 表示,所获得的利润用 Q 表示,则这种衬衣一年所获得的利润 Q 与所售衬衣件数 x 之间的关系为 $Q = 120 \cdot 20\% x$.

例 1.2　假设银行一年定期的存款利率是 2.25%,利息的税率是 20%. 若把 3000 元存入银行,存取方式为一年期整存整取,那么,到期后连本带息共有

$$3000 + 3000 \cdot 2.25\% \cdot (1 - 20\%)\text{元}.$$

如果存入 x 元,一年后的本息如果用 y 表示,到期后连本带息应有

$$y = x + x \cdot 2.25\% \cdot (1 - 20\%)$$

存入不同的金额,一年到期后的本息不同;本金越大,收益越大. 只要给 x 一个确定的数值,y 总有确定的值与它对应.

例 1.3 某商场,一年中每月销售长裤的数量(单位:件)如表 1.1

表 1.1

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量	630	760	580	570	550	400	340	430	460	520	600	620

抽象

例 1.1,例 1.2,例 1.3 中,变量之间都存在着确定的对应关系,这种对应关系正是函数的概念.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集,如果对于每个数 $x \in D$,变量 y 按照一定的法则 f,有唯一确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作 $y=f(x), x \in D$.

其中 x 叫做**自变量**,y 叫做**因变量**,数集 D 称为函数的**定义域**.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时,通过法则 f,函数 y 有唯一确定的数值 y_0 与之对应,那么,y_0 称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值,记作

$$y_0 = y\Big|_{x=x_0} = f(x_0).$$

所有函数值的集合 $M=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 称为函数的**值域**.

如果一个函数在某个区间上的每一点都有定义,则称这个函数在该区间上有定义.

说明 (1) 定义中的对应法则用 f 表示,它也可以用其他字母如 g, h, φ, F 等表示,如

$$y=g(x), y=h(x), y=F(x).$$

不同的函数必须用不同的符号区分.

(2) 函数的定义中,如果对于任意给定的 x 值,对应的 y 值有多个,则称此函数为多值函数. 符合定义 1.1 的函数称为单值函数. 本教材主要研究单值函数. 以后凡是没有特别说明,函数都是指单值函数.

(3) 表示函数的方法有三种:公式法、表格法、图像法.

(4) 函数的实质是定义域 D 的对应法则 f,因此,确定函数的两个要素是定义域和对应法则. 只要定义域相同,而且 f 代表同一对应法则,则 $y=f(x)$ 和 $u=f(v)$ 是同一函数,与自变量和因变量的表示字母无关. 例如 $y=\sin x$ 与 $u=\sin v$ 是同一函数.

(5) 区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 称为 x_0 的 δ 邻域,区间 $(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$ 称为 x_0 的去心 δ 邻域.

例 1.4 已知函数 $y=f(x)=3x^2+2x-1$,求 $f(0)$, $f(1)$ 及 $f(x_0)$.

解

$$y\Big|_{x=0} = f(0) = 3\times 0^2 + 2\times 0 - 1 = -1,$$

$$y\Big|_{x=1} = f(1) = 3\times 1^2 + 2\times 1 - 1 = 4,$$

$$y\Big|_{x=x_0} = f(x_0) = 3x_0^2 + 2x_0 - 1.$$

例 1.5 函数 $f(x)=\dfrac{x^2+x}{3x}$ 与 $g(x)=\dfrac{x+1}{3}$ 是否是同一函数.

解 因为$f(x)$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$g(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$,定义域不同,所以$f(x)$与$g(x)$不是同一函数.

例 1.6 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$; (2) $y=\dfrac{1}{x-2}+\ln(4-x)$.

解 (1) 因为只有当$9-x^2>0$时,函数有意义,解不等式$9-x^2>0$,得$-3<x<3$,所以函数的定义域是$D=(-3,3)$.

(2) 这是两个函数之和的定义域,解不等式组 $\begin{cases}x-2\neq 0\\4-x>0\end{cases}$,得 $\begin{cases}x\neq 2\\x<4\end{cases}$,所以,函数的定义域是 $D=(-\infty,2)\cup(2,4)$.

例 1.7 国内寄信函的收费标准如表 1.2,试求邮资与信函质量的函数关系?

表 1.2

20 g 及 20 g 以下	0.80 元	60 g 以上至 80 g	3.20 元
20 g 以上至 40 g	1.60 元	80 g 以上至 100 g	4 元
40 g 以上至 60 g	2.40 元		

解 信函在 5 个不同的质量范围时,其收费标准各不相同.

设信函质量为 x g,邮资为$f(x)$元.由题意,得

$$f(x)=\begin{cases}0.80, & \text{当 } 0<x\leqslant 20 \text{ 时}\\1.60, & \text{当 } 20<x\leqslant 40 \text{ 时}\\2.40, & \text{当 } 40<x\leqslant 60 \text{ 时}\\3.20, & \text{当 } 60<x\leqslant 80 \text{ 时}\\4, & \text{当 } 80<x\leqslant 100 \text{ 时.}\end{cases}$$

其定义域为$(0,100]$.

函数$f(x)$在其定义域的不同区间内,对应不同的函数关系,这种函数称为**分段函数**.

二、函数的简单性质

观察

函数$y=e^x$,它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,对任意的$x_1<x_2$,都有 e^{x_2};函数$f(x)=x^2$,对于任意的x,都有$(-x)^2=x^2$;$\sin(x+2\pi)=\sin x$;对任意的x,都有$|\cos x|\leqslant 1$.这都是函数的性质.

抽象

1. 函数的单调性

定义 1.2 设函数$y=f(x)$在区间I内有定义,对于区间I内任意两点x_1,x_2,当$x_1<x_2$时,函

数 $y=f(x)$ 满足 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内**单调增加**. 如图 1.1 所示.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，对于区间 I 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内**单调减少**. 如图 1.2 所示.

在区间 I 上单调增加或者单调减少的函数，统称为区间 I 上的单调函数，并称区间 I 为这个函数的单调区间.

二次函数 $y=x^2+1$ 的图形是抛物线，如图 1.3，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，函数 $y=x^2+1$ 单调减少，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，函数 $y=x^2+1$ 单调增加.

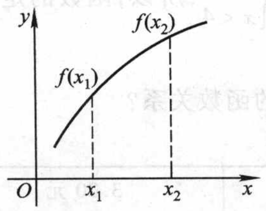

图 1.1

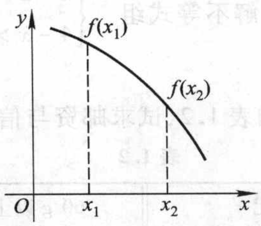

图 1.2

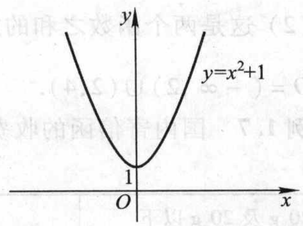

图 1.3

2. 函数的奇偶性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对任意的 $x\in D$，均有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对任意的 $x\in D$，均有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

既不是奇函数也不是偶函数的函数称为**非奇非偶函数**.

例如 $y=x^3-1$ 是非奇非偶函数.

3. 函数的周期性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如果存在不为零的实数 T，对于每一个 $x\in D$，都有 $x\pm T\in D$，且总有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**，称 T 为 $f(x)$ 的**周期**. 若 T 为函数 $f(x)$ 的一个周期，则 $kT\ (k\in\mathbf{Z})$ 也是 $f(x)$ 的周期.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数. 一般我们说周期函数的周期指的是函数的最小正周期.

4. 函数的有界性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义（区间 I 可以是函数 $f(x)$ 的整个定义域，也可

以是定义域的一部分)，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in I$，对应的函数值 $f(x)$ 恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 内**有界**，如果满足条件的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 I 内**无界**.

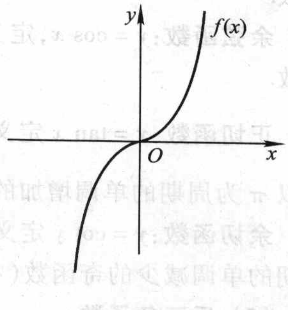

图 1.4

例 1.8 函数 $f(x)=x^3$ 如图 1.4，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界，但是，它在 $[1,2]$ 闭区间上有界，因为任意 $x\in[1,2]$，都有

$$|f(x)|=|x^3|\leqslant 8.$$

三、反函数

观察

函数 $y=2x$ 与函数 $y=\frac{1}{2}x$ 的对应法则正好相反，$y=2x$ 与函数 $y=\frac{1}{2}x$ 互为反函数.

抽象

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M. 如果对于 M 中的每一个数 y，都有唯一确定的数 $x\in D$ 与 y 对应，使 $f(x)=y$，这时若把 y 看作自变量，x 就是 y 的函数，称为 $y=f(x)$ 的**反函数**. 记为 $x=\phi(y)$. 其定义域为 M，值域为 D.

注 反函数 $x=\phi(y)$ 常记为 $y=\phi(x)$. 习惯上把 $y=f(x)$ 的反函数写作 $y=f^{-1}(x)$，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=\phi(x)$ 的图形，关于直线 $y=x$ 对称.

四、初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数包括：幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数. 基本初等函数图形及性质见附录 1.

(1) 幂函数：$y=x^{\mu}$ （μ 为常数）

例如 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\sqrt{x}$，$y=\frac{1}{x}$ 等.

(2) 指数函数：$y=a^x$ （$a>0, a\neq 1$，a 为常数)，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$.

(3) 对数函数：$y=\log_a x$ （$a>0, a\neq 1$，a 为常数)，其定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 它是指数函数 $y=a^x$ 的反函数.

(4) 三角函数

正弦函数：$y=\sin x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，它是以 2π 为周期的有界的奇

函数.

余弦函数:$y=\cos x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,是以2π为周期的有界的偶函数.

正切函数:$y=\tan x$ 定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,即 $x\in\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,它是以 π 为周期的单调增加的奇函数(在一个周期内).

余切函数:$y=\cot x$ 定义域为 $x\neq k\pi$,即 $x\in(k\pi,(k+1)\pi)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,它是以 π 为周期的单调减少的奇函数(在一个周期内).

(5) 反三角函数

反正弦函数:$y=\arcsin x$,定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,有界,单调增加,奇函数.

反余弦函数:$y=\arccos x$ 定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$,有界,单调减少.

反正切函数:$y=\arctan x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$时,有界,单调增加,奇函数.

反余切函数:$y=\operatorname{arccot} x$ 定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,\pi)$,有界,单调减少.

2. 复合函数

定义 1.7 设 y 是 u 的函数,$y=f(u)$,u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,而且 $u=\varphi(x)$ 的值的全部或部分落在 $f(u)$ 的定义域内,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的**复合函数**,u 称为中间变量.

若 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D,复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域为 D_1,则 $D_1\subseteq D$.

3. 初等函数

由常数、基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合所构成,并能用一个式子表示的函数称为**初等函数**.经济数学讨论的函数主要是初等函数.

4. 二元函数

观察

例 1.9 矩形的面积 S 和它的长 x 和宽 y 的关系为 $S=xy$ $(x>0,y>0)$,S 是随着 x,y 的变化而变化的.

例 1.10 圆柱体的体积 V 和它的底面半径 R、高 h 的关系为 $V=\pi R^2h$ $(R>0,h>0)$,而 V 也是随着 R 和 h 而变化的.

抽象

如上述例题中有两个自变量的函数叫二元函数.

定义 1.8 设 D 是平面上的一个非空点集,f 是一个对应法则,如果对于每个点$(x,y)\in D$,都可由对应法则 f 得到唯一的实数 z 与之对应,则称 z 是变量 x,y 的**二元函数**,记为