



全国高职高专教育“十一五”规划教材

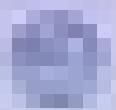
经济数学

ECONOMIC MATHEMATICS

吴素敏 主编



高等教育出版社
Higher Education Press



卷之三

经济数学“五一”青峰寺高岗国全

内容摘要

作为经济数学教材,本书讲述了函数、极限、连续、一元函数的微积分、线性代数与线性规划初步、概率论与数理统计初步,简要介绍了多元函数的微积分的概念及简单计算,还涉及如何利用高等数学知识建立数学模型,及利用 MATLAB 解决模型的基本方法.每节配有习题,各章配有综合练习题.

本书以培养应用型人才为目标,遵循启发式教学,注重培养数学思维和方法,适合高职高专院校经济类和管理类学生使用.

主编 吴素敏

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/吴素敏主编. —北京:高等教育出版社,

2008.7

ISBN 978 - 7 - 04 - 024348 - 2

I . 经… II . 吴… III . 经济数学 - 高等学校 : 技术
学校 - 教材 IV . F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 099148 号

策划编辑 邓雁城 责任编辑 蒋青 封面设计 张志奇 责任绘图 杜晓丹
版式设计 王艳红 责任校对 朱惠芳 责任印制 尤静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印 刷	北京铭成印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
开 本	787 × 1092 1/16	畅想教育	http://www.widedu.com
印 张	21.25		
字 数	520 000	版 次	2008 年 7 月第 1 版
		印 次	2008 年 7 月第 1 次印刷
		定 价	28.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24348 - 00

前　　言

为适应我国高等职业技术的发展,我们根据教育部关于加强高职高专人才培养工作的意见,本着“拓宽基础,强化能力,加强应用,服务专业需求”和“必需、够用”的原则编写了本书。

在编写过程中,我们吸收了以往高职高专经济数学教材的优点,结合当前高职高专教学改革实际,本着知识通俗化、应用化的原则编写内容、例题,从实际问题出发引出概念,增加了一些应用类内容及题目,选取了难易适中的例题和课后习题及章后综合练习题,以适应高职高专经济、管理等相关专业教学需求。增加了较多的应用例题,增加了数学建模、数学实验方面的内容,注重对学生应用数学解决实际问题能力的培养。力求编出具有自身特色的高水平的高职高专经济数学教材。

本书共五篇九章内容,主要包括一元函数微积分、多元函数微积分简介、微分方程简介、线性代数初步、概率统计初步及经济方面的应用,介绍了利用 MATLAB 进行计算的应用。教学总时数约为 100 学时,选学内容可另加课时。

本书由高等教育出版社高等职业教育研究与出版中心策划组稿,由吴素敏教授担任主编,负责统稿,丁杰、杜俊仁、马明环、刘宗朴、宋敏娜为副主编,高惠老师担任主审,王玉苏老师参加了部分章节的审阅。吴素敏编写第一篇,丁杰编写第二篇,马明环、赵立民编写第三篇,宋敏娜、罗胡英编写第四篇、杜俊仁、刘宗朴编写第五篇。

由于编者水平有限,不足之处在所难免,欢迎专家和广大师生批评指正。

编者

2008 年 5 月

目 录

第一篇 函数 极限 连续

第一章 函数 极限 连续

§ 1.1 函数的概念与性质	3
一、函数的概念	3
二、函数的简单性质	5
三、反函数	7
四、初等函数	7
习题 1.1	9
§ 1.2 极限的定义	10
一、数列的极限	10
二、函数的极限	13
三、无穷小量与无穷大量	17
习题 1.2	18
§ 1.3 极限的运算	18
一、极限的四则运算	18

二、两个重要极限	21
三、利用无穷小的性质求极限	22
习题 1.3	24
§ 1.4 函数的连续性	25
一、连续的定义	25
二、间断点及其分类	28
三、连续函数的性质	29
习题 1.4	30
§ 1.5 经济函数模型及 MATLAB 的应用	30
一、经济函数模型	31
二、利用 MATLAB 求解函数、极限	35
习题 1.5	38
第一章总结	39
综合练习一	40

第二篇 微分学基础

第二章 导数与微分	45
§ 2.1 导数的概念	45
一、导数的定义	45
二、导数的几何意义	47
三、导数的基本公式	49
习题 2.1	50
§ 2.2 函数的求导法则	50
一、函数和、差、积、商的求导法则	50
二、复合函数的求导法则	51
三、隐函数的求导法则	52
四、高阶导数	54
习题 2.2	55

§ 2.3 函数的微分	56
一、函数的微分概念	56
二、微分的几何意义	58
三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则	58
四、微分的应用	60
习题 2.3	61
§ 2.4 二元函数的导数与微分	62
一、二元函数的定义	62
二、二元函数的偏导数运算	63
三、二元函数的微分	65
习题 2.4	66

第二章总结	67	一、曲线的凹凸性及其判定	79
综合练习二	68	二、曲线的拐点及其判定	80
第三章 导数的应用	70	三、曲线的渐近线	82
§ 3.1 微分中值定理及 L'Hospital 法则	70	四、函数图形的作法	83
一、微分中值定理	70	习题 3.3	84
二、L'Hospital 法则	72	§ 3.4 微分法模型及其求解	84
习题 3.1	74	一、边际问题	84
§ 3.2 函数的单调性与极值	75	二、最优问题	86
一、函数的单调性	75	三、弹性问题	87
二、函数的极值	76	四、利用 MATLAB 求解模型	89
三、函数的最值	77	习题 3.4	91
习题 3.2	79	第三章总结	92
§ 3.3 曲线的凹凸性与拐点	79	综合练习三	93

第三篇 积分学基础

第四章 积分及其应用	97	* 四、反常积分	114
§ 4.1 不定积分	97	习题 4.4	115
一、不定积分的概念	97	§ 4.5 二元函数的积分	116
二、不定积分的性质	99	一、直角坐标系下的二重积分	116
三、不定积分的几何意义	99	* 二、极坐标系下的二重积分	120
四、不定积分的基本公式	99	习题 4.5	121
习题 4.1	100	第四章总结	122
§ 4.2 不定积分的计算	100	综合练习四	123
一、直接积分法	100	第五章 微分方程初步	125
二、换元积分法	101	§ 5.1 一阶微分方程	125
三、分部积分法	104	一、微分方程的概念	125
习题 4.2	105	二、可分离变量的微分方程	126
§ 4.3 定积分	106	三、一阶线性微分方程	127
一、定积分的概念	106	习题 5.1	129
二、定积分的性质	108	§ 5.2 二阶常系数线性微分方程	130
三、变上限函数的积分	109	一、二阶常系数齐次线性微分方程	130
四、Newton – Leibniz 公式	110	二、二阶常系数非齐次线性微分方程	132
习题 4.3	111	习题 5.2	134
§ 4.4 定积分的计算	111	§ 5.3 积分、微分方程模型及其求解	135
一、直接积分法	111	一、积分、微分方程模型的建立	135
二、换元积分法	112	二、利用 MATLAB 求解模型	139
三、分部积分法	113	习题 5.3	142

第五章总结	143	综合练习五	143
-------	-----	-------	-----

第四篇 线性代数与线性规划初步

第六章 线性代数及其应用	147
§ 6.1 矩阵及其运算	147
一、矩阵的概念	147
二、几种特殊的矩阵	149
三、矩阵的运算	150
习题 6.1	157
§ 6.2 行列式	158
一、行列式的概念	158
二、行列式的性质	161
三、方阵的行列式	167
习题 6.2	168
§ 6.3 逆矩阵	169
一、逆矩阵的概念、性质	169
二、逆矩阵的计算	170
习题 6.3	174
§ 6.4 矩阵的初等变换与线性方程组	175

一、矩阵的初等变换	175
二、矩阵的秩	179
三、线性方程组的解	180
习题 6.4	182
第六章总结	183
综合练习六	184

第七章 线性规划简介及数学

应用	188
§ 7.1 线性规划模型及解法	188
一、线性规划模型及其数学模型	188
二、线性规划模型的一般形式和标准	189
形式	190
三、单纯形法的基本思想	192
习题 7.1	198
§ 7.2 线性方程组的数学模型及其解法	199
第七章总结	205

第五篇 概率论与数理统计初步

第八章 概率论基础	209
§ 8.1 随机事件与概率	209
一、随机事件及其运算	209
二、事件间的运算规律	215
三、古典概型及概率	215
四、加法公式与乘法公式	218
五、事件的独立性	221
习题 8.1	224
§ 8.2 随机变量及其分布	225
一、随机变量的概念	226
二、离散型随机变量及其概率分布	226
三、连续型随机变量及其概率分布	230
四、随机变量的分布函数	233
五、正态分布	236
习题 8.2	239

§ 8.3 随机变量的数字特征	240
一、随机变量的数学期望	241
二、随机变量的方差	245
习题 8.3	249
§ 8.4 概率数学模型及其解法	250
一、用 MATLAB 计算概率问题	250
二、数学实验	251
第八章总结	253
综合练习八	254

第九章 数理统计基础	257
§ 9.1 数据处理	257
一、总体与样本	257
二、重要的数字特征(平均数、加权平均数、方差、标准差)	258
三、频率直方图	261

习题 9.1	263	一、假设检验的思想	277
§ 9.2 参数估计	264	二、 U -检验法(正态检验法)	278
一、估计量与估计值	264	三、 t -检验法	279
二、矩估计法	267	四、 χ^2 -检验法	280
三、估计量的评价标准	270	五、 F -检验法	282
四、置信区间的概念	272	六、正交试验法	284
五、总体均值的区间估计	273	习题 9.3	290
六、总体方差的区间估计	275	第九章总结	291
习题 9.2	276	综合练习九	292
§ 9.3 假设检验	277		
附录			
附录一 基本初等函数的性质、图形	296		
附录二 标准正态分布表	299		
附录三 t -分布临界值表	300		
附录四 χ^2 -分布临界值表	302		
附录五 F -分布临界值表	304		
习题参考答案	311		
参考文献	330		

统计学实验设计与分析 第五章

042	· · · · · 随机变量及其分布 5.8.3	005	· · · · · 基本分布率 5.8.1
142	· · · · · 概率论基础及应用	006	· · · · · 离散型概率分布 5.8.2
242	· · · · · 离散型随机变量	007	· · · · · 连续型随机变量 5.8.3
043	· · · · · 5.8.4	015	· · · · · 常见连续型分布 5.8.4
025	· · · · · 常见离散型分布 5.8.2	016	· · · · · 二项分布 5.8.5
002	· · · · · 泊松分布 5.8.6	017	· · · · · 泊松分布的应用 5.8.6
122	· · · · · 正态分布 5.8.7	018	· · · · · 正态分布的应用 5.8.7
025	· · · · · 正态分布的应用 5.8.8	019	· · · · · 正态分布的应用 5.8.9
025	· · · · · 正态分布的应用 5.8.10	020	· · · · · 正态分布的应用 5.8.11
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.12	021	· · · · · 正态分布的应用 5.8.13
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.14	022	· · · · · 正态分布的应用 5.8.15
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.16	023	· · · · · 正态分布的应用 5.8.17
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.18	024	· · · · · 正态分布的应用 5.8.19
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.20	025	· · · · · 正态分布的应用 5.8.21
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.22	026	· · · · · 正态分布的应用 5.8.23
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.24	027	· · · · · 正态分布的应用 5.8.25
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.26	028	· · · · · 正态分布的应用 5.8.27
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.28	029	· · · · · 正态分布的应用 5.8.29
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.30	030	· · · · · 正态分布的应用 5.8.31
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.32	031	· · · · · 正态分布的应用 5.8.33
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.34	032	· · · · · 正态分布的应用 5.8.35
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.36	033	· · · · · 正态分布的应用 5.8.37
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.38	034	· · · · · 正态分布的应用 5.8.39
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.40	035	· · · · · 正态分布的应用 5.8.41
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.42	036	· · · · · 正态分布的应用 5.8.43
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.44	037	· · · · · 正态分布的应用 5.8.45
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.46	038	· · · · · 正态分布的应用 5.8.47
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.48	039	· · · · · 正态分布的应用 5.8.49
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.50	040	· · · · · 正态分布的应用 5.8.51
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.52	041	· · · · · 正态分布的应用 5.8.53
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.54	042	· · · · · 正态分布的应用 5.8.55
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.56	043	· · · · · 正态分布的应用 5.8.57
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.58	044	· · · · · 正态分布的应用 5.8.59
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.60	045	· · · · · 正态分布的应用 5.8.61
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.62	046	· · · · · 正态分布的应用 5.8.63
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.64	047	· · · · · 正态分布的应用 5.8.65
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.66	048	· · · · · 正态分布的应用 5.8.67
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.68	049	· · · · · 正态分布的应用 5.8.69
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.70	050	· · · · · 正态分布的应用 5.8.71
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.72	051	· · · · · 正态分布的应用 5.8.73
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.74	052	· · · · · 正态分布的应用 5.8.75
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.76	053	· · · · · 正态分布的应用 5.8.77
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.78	054	· · · · · 正态分布的应用 5.8.79
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.80	055	· · · · · 正态分布的应用 5.8.81
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.82	056	· · · · · 正态分布的应用 5.8.83
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.84	057	· · · · · 正态分布的应用 5.8.85
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.86	058	· · · · · 正态分布的应用 5.8.87
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.88	059	· · · · · 正态分布的应用 5.8.89
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.90	060	· · · · · 正态分布的应用 5.8.91
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.92	061	· · · · · 正态分布的应用 5.8.93
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.94	062	· · · · · 正态分布的应用 5.8.95
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.96	063	· · · · · 正态分布的应用 5.8.97
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.98	064	· · · · · 正态分布的应用 5.8.99
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.100	065	· · · · · 正态分布的应用 5.8.101
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.102	066	· · · · · 正态分布的应用 5.8.103
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.104	067	· · · · · 正态分布的应用 5.8.105
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.106	068	· · · · · 正态分布的应用 5.8.107
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.108	069	· · · · · 正态分布的应用 5.8.109
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.110	070	· · · · · 正态分布的应用 5.8.111
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.112	071	· · · · · 正态分布的应用 5.8.113
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.114	072	· · · · · 正态分布的应用 5.8.115
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.116	073	· · · · · 正态分布的应用 5.8.117
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.118	074	· · · · · 正态分布的应用 5.8.119
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.120	075	· · · · · 正态分布的应用 5.8.121
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.122	076	· · · · · 正态分布的应用 5.8.123
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.124	077	· · · · · 正态分布的应用 5.8.125
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.126	078	· · · · · 正态分布的应用 5.8.127
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.128	079	· · · · · 正态分布的应用 5.8.129
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.130	080	· · · · · 正态分布的应用 5.8.131
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.132	081	· · · · · 正态分布的应用 5.8.133
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.134	082	· · · · · 正态分布的应用 5.8.135
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.136	083	· · · · · 正态分布的应用 5.8.137
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.138	084	· · · · · 正态分布的应用 5.8.139
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.140	085	· · · · · 正态分布的应用 5.8.141
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.142	086	· · · · · 正态分布的应用 5.8.143
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.144	087	· · · · · 正态分布的应用 5.8.145
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.146	088	· · · · · 正态分布的应用 5.8.147
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.148	089	· · · · · 正态分布的应用 5.8.149
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.150	090	· · · · · 正态分布的应用 5.8.151
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.152	091	· · · · · 正态分布的应用 5.8.153
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.154	092	· · · · · 正态分布的应用 5.8.155
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.156	093	· · · · · 正态分布的应用 5.8.157
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.158	094	· · · · · 正态分布的应用 5.8.159
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.160	095	· · · · · 正态分布的应用 5.8.161
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.162	096	· · · · · 正态分布的应用 5.8.163
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.164	097	· · · · · 正态分布的应用 5.8.165
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.166	098	· · · · · 正态分布的应用 5.8.167
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.168	099	· · · · · 正态分布的应用 5.8.169
125	· · · · · 正态分布的应用 5.8.170	100	· · · · · 正态分布的应用 5.8.171

第一篇

函数 极限 连续

第一章 函数 极限 连续

学习目标

掌握基本初等函数的性质和图形.理解复合函数及分段函数的概念,了解隐函数、反函数、二元函数的概念.理解极限的概念,会应用无穷小与无穷大的关系、有界变量与无穷小的乘积、等价无穷小代换求极限.掌握极限的四则运算法则.掌握应用两个重要极限公式求极限的方法.理解函数连续性概念,会求函数的间断点,会建立简单经济问题的数学模型,并会利用 MATLAB 求解函数、极限.

函数是微积分的重要概念,极限是微积分的基础,连续是函数的一种性态.连续函数是高等数学研究的主要对象.本章通过实际问题引入函数的概念和一些简单的经济函数,介绍了建立函数模型的一般方法,为微积分的学习奠定基础.

§ 1.1 函数的概念与性质

一、函数的概念

函数的定义



观察

在自然现象和社会问题中,经常遇到变量之间的关系问题.观察下面的问题:

例 1.1 一商场衬衣零售价为 120 元/件,每件衬衣的利润为零售价的 20%,如果这家商场一年卖出这种衬衣的件数用 x 表示,所获得的利润用 Q 表示,则这种衬衣一年所获得的利润 Q 与所售衬衣件数 x 之间的关系为 $Q = 120 \cdot 20\% \cdot x$.

例 1.2 假设银行一年定期的存款利率是 2.25%,利息的税率是 20%.若把 3000 元存入银行,存取方式为一年期整存整取,那么,到期后连本带息共有

$$3000 + 3000 \cdot 2.25\% \cdot (1 - 20\%) \text{ 元.}$$

如果存入 x 元,一年后的本息如果用 y 表示,到期后连本带息应有

$$y = x + x \cdot 2.25\% \cdot (1 - 20\%)$$

存入不同的金额,一年到期后的本息不同;本金越大,收益越大.只要给 x 一个确定的数值, y 总有确定的值与它对应.

例 1.3 某商场,一年中每月销售长裤的数量(单位:件)如表 1.1

表 1.1

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量	630	760	580	570	550	400	340	430	460	520	600	620



抽象

例 1.1, 例 1.2, 例 1.3 中, 变量之间都存在着确定的对应关系, 这种对应关系正是函数的概念.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集, 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定的法则 f , 有唯一确定的数值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x), x \in D$.

其中 x 叫做自变量, y 叫做因变量, 数集 D 称为函数的定义域.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时, 通过法则 f , 函数 y 有唯一确定的数值 y_0 与之对应, 那么, y_0 称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值, 记作

$$y_0 = y \Big|_{x=x_0} = f(x_0).$$

所有函数值的集合 $M = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

如果一个函数在某个区间上的每一点都有定义, 则称这个函数在该区间上有定义.

说明 (1) 定义中的对应法则用 f 表示, 它也可以用其他字母如 g, h, φ, F 等表示, 如

$$y = g(x), y = h(x), y = F(x).$$

不同的函数必须用不同的符号区分.

(2) 函数的定义中, 如果对于任意给定的 x 值, 对应的 y 值有多个, 则称此函数为多值函数. 符合定义 1.1 的函数称为单值函数. 本教材主要研究单值函数. 以后凡是没有特别说明, 函数都是指单值函数.

(3) 表示函数的方法有三种: 公式法、表格法、图像法.

(4) 函数的实质是定义域 D 的对应法则 f , 因此, 确定函数的两个要素是定义域和对应法则. 只要定义域相同, 而且 f 代表同一对应法则, 则 $y = f(x)$ 和 $u = f(v)$ 是同一函数, 与自变量和因变量的表示字母无关. 例如 $y = \sin x$ 与 $u = \sin v$ 是同一函数.

(5) 区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为 x_0 的 δ 邻域, 区间 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 称为 x_0 的去心 δ 邻域.

例 1.4 已知函数 $y = f(x) = 3x^2 + 2x - 1$, 求 $f(0)$, $f(1)$ 及 $f(x_0)$.

解

$$y \Big|_{x=0} = f(0) = 3 \times 0^2 + 2 \times 0 - 1 = -1,$$

$$y \Big|_{x=1} = f(1) = 3 \times 1^2 + 2 \times 1 - 1 = 4,$$

$$y \Big|_{x=x_0} = f(x_0) = 3x_0^2 + 2x_0 - 1.$$

例 1.5 函数 $f(x) = \frac{x^2 + x}{3x}$ 与 $g(x) = \frac{x+1}{3}$ 是否是同一函数.

解 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 定义域不同, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数.

例 1.6 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}; \quad (2) y = \frac{1}{x-2} + \ln(4-x).$$

解 (1) 因为只有当 $9-x^2 > 0$ 时, 函数有意义, 解不等式 $9-x^2 > 0$, 得 $-3 < x < 3$, 所以函数的定义域是 $D = (-3, 3)$.

(2) 这是两个函数之和的定义域, 解不等式组 $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ 4-x > 0 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x \neq 2 \\ x < 4 \end{cases}$, 所以, 函数的定义域

是 $D = (-\infty, 2) \cup (2, 4)$.

例 1.7 国内寄信函的收费标准如表 1.2, 试求邮资与信函质量的函数关系?

表 1.2

20 g 及 20 g 以下	0.80 元	60 g 以上至 80 g	3.20 元
20 g 以上至 40 g	1.60 元	80 g 以上至 100 g	4 元
40 g 以上至 60 g	2.40 元		

解 信函在 5 个不同的质量范围时, 其收费标准各不相同.

设信函质量为 x g, 邮资为 $f(x)$ 元. 由题意, 得

$$f(x) = \begin{cases} 0.80, & \text{当 } 0 < x \leq 20 \text{ 时} \\ 1.60, & \text{当 } 20 < x \leq 40 \text{ 时} \\ 2.40, & \text{当 } 40 < x \leq 60 \text{ 时} \\ 3.20, & \text{当 } 60 < x \leq 80 \text{ 时} \\ 4, & \text{当 } 80 < x \leq 100 \text{ 时.} \end{cases}$$

其定义域为 $(0, 100]$.

函数 $f(x)$ 在其定义域的不同区间内, 对应不同的函数关系, 这种函数称为分段函数.

二、函数的简单性质



观察

函数 $y = e^x$, 它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 对任意的 $x_1 < x_2$, 都有 $e^{x_1} < e^{x_2}$; 函数 $f(x) = x^2$, 对于任意的 x , 都有 $(-x)^2 = x^2$; $\sin(x+2\pi) = \sin x$; 对任意的 x , 都有 $|\cos x| \leq 1$. 这都是函数的性质.



抽象

1. 函数的单调性

定义 1.2 设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内有定义, 对于区间 I 内任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 函数

数 $y=f(x)$ 满足 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内单调增加. 如图 1.1 所示.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义, 对于区间 I 内任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内单调减少. 如图 1.2 所示.

在区间 I 上单调增加或者单调减少的函数, 统称为区间 I 上的单调函数, 并称区间 I 为这个函数的单调区间.

二次函数 $y=x^2+1$ 的图形是抛物线, 如图 1.3, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, 函数 $y=x^2+1$ 单调减少, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 函数 $y=x^2+1$ 单调增加.

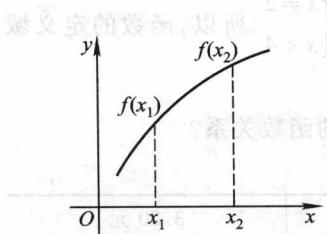


图 1.1

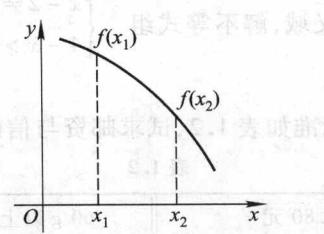


图 1.2

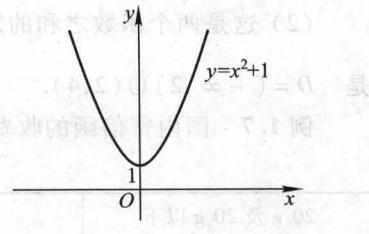


图 1.3

2. 函数的奇偶性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对任意的 $x \in D$, 均有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对任意的 $x \in D$, 均有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

既不是奇函数也不是偶函数的函数称为非奇非偶函数.

例如 $y=x^3-1$ 是非奇非偶函数.

3. 函数的周期性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$, $x \in D$, 如果存在不为零的实数 T , 对于每一个 $x \in D$, 都有 $x \pm T \in D$, 且总有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $y=f(x)$ 为周期函数, 称 T 为 $f(x)$ 的周期. 若 T 为函数 $f(x)$ 的一个周期, 则 kT ($k \in \mathbf{Z}$) 也是 $f(x)$ 的周期.

例如, 函数 $y=\sin x, y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数; $y=\tan x, y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数. 一般我们说周期函数的周期指的是函数的最小正周期.

4. 函数的有界性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义 (区间 I 可以是函数 $f(x)$ 的整个定义域, 也可

以是定义域的一部分),如果存在一个正数 M ,对于所有的 $x \in I$,
对应的函数值 $f(x)$ 恒有界.

$$|f(x)| \leq M$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在 I 内有界,如果满足条件的正数 M 不存在,
则称函数 $f(x)$ 在 I 内无界.

例 1.8 函数 $f(x) = x^3$ 如图 1.4, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界,但是,它在 $[1, 2]$ 闭区间上有界,因为任意 $x \in [1, 2]$,都有

$$|f(x)| = |x^3| \leq 8.$$

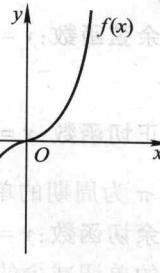


图 1.4

三、反函数



观察

函数 $y = 2x$ 与函数 $y = \frac{1}{2}x$ 的对应法则正好相反, $y = 2x$ 与函数 $y = \frac{1}{2}x$ 互为反函数.



抽象

定义 1.6 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 M . 如果对于 M 中的每一个数 y , 都有唯一确定的数 $x \in D$ 与 y 对应, 使 $f(x) = y$, 这时若把 y 看作自变量, x 就是 y 的函数, 称为 $y = f(x)$ 的反函数. 记为 $x = \phi(y)$. 其定义域为 M , 值域为 D .

注 反函数 $x = \phi(y)$ 常记为 $y = \phi(x)$. 习惯上把 $y = f(x)$ 的反函数写作 $y = f^{-1}(x)$, 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = \phi(x)$ 的图形, 关于直线 $y = x$ 对称.

四、初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数包括: 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数和反三角函数. 基本初等函数图形及性质见附录 1.

(1) 幂函数: $y = x^\mu$ (μ 为常数)

例如 $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ 等.

(2) 指数函数: $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$, a 为常数), 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$.

(3) 对数函数: $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$, a 为常数), 其定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$. 它是指数函数 $y = a^x$ 的反函数.

(4) 三角函数

正弦函数: $y = \sin x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 它是以 2π 为周期的有界的奇

函数.

余弦函数: $y = \cos x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 是以 2π 为周期的有界的偶函数.

正切函数: $y = \tan x$ 定义域为 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, 即 $x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 它是以 π 为周期的单调增加的奇函数(在一个周期内).

余切函数: $y = \cot x$ 定义域为 $x \neq k\pi$, 即 $x \in (k\pi, (k+1)\pi) (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 它是以 π 为周期的单调减少的奇函数(在一个周期内).

(5) 反三角函数

反正弦函数: $y = \arcsin x$, 定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 有界, 单调增加, 奇函数.

反余弦函数: $y = \arccos x$ 定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$, 有界, 单调减少.

反正切函数: $y = \arctan x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时, 有界, 单调增加, 奇函数.

反余切函数: $y = \text{arccot } x$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, \pi)$, 有界, 单调减少.

2. 复合函数

定义 1.7 设 y 是 u 的函数, $y = f(u)$, u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$, 而且 $u = \varphi(x)$ 的值的全部或部分落在 $f(u)$ 的定义域内, 则称 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数, u 称为中间变量.

若 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D , 复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的定义域为 D_1 , 则 $D_1 \subseteq D$.

3. 初等函数

由常数、基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合所构成, 并能用一个式子表示的函数称为初等函数. 经济数学讨论的函数主要是初等函数.

4. 二元函数



观察

例 1.9 矩形的面积 S 和它的长 x 和宽 y 的关系为 $S = xy (x > 0, y > 0)$, S 是随着 x, y 的变化而变化的.

例 1.10 圆柱体的体积 V 和它的底面半径 R 、高 h 的关系为 $V = \pi R^2 h (R > 0, h > 0)$, 而 V 也是随着 R 和 h 而变化的.



抽象

如上述例题中有两个自变量的函数叫二元函数.

定义 1.8 设 D 是平面上的一个非空点集, f 是一个对应法则, 如果对于每个点 $(x, y) \in D$, 都可由对应法则 f 得到唯一的实数 z 与之对应, 则称 z 是变量 x, y 的二元函数, 记为