鼎★尖★教★育
WWW·TOPEDU·ORG

新课标·高中第一轮总复习

鼎尖学案

人教A版

数学（文）

鼎尖系列丛书之二

师生同修　学教互动　DING JIAN XUE AN

个性化学案
与《鼎尖教案》一起，
打造实质性互动课堂。
让思维动起来，
让课堂活起来。

师生同修　学教互动　DING JIAN XUE AN

丛书主编：严治理　黄俊葵
姜山峰　刘芳芳

延边教育出版社

责任编辑： 陈长玉
特约编辑： 孙　宁
法律顾问： 北京陈鹰律师事务所（010-64970501）

图书在版编目（CIP）数据

鼎尖学案：人教 A 版．高中新课标总复习．数学．文科/梁景义主编．－延吉：延边教育出版社，2008.5
ISBN 978-7-5437-7164-2

Ⅰ．鼎… Ⅱ．梁… Ⅲ．数学课—高中—升学参考资料
Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 078307 号

《鼎尖学案》数学总复习（文科） ***人教 A 版***

出版发行： 延边教育出版社
地　　址： 吉林省延吉市友谊路 363 号（133000）
北京市海淀区苏州街 18 号院长远天地 4 号楼 A1 座 1003（100080）
网　　址： http://www.topedu.net.cn
电　　话： 0433 2913975　010 82608550
传　　真： 0433 2913971　010 82608856
排　　版： 北京鼎尖雷射图文设计有限公司
印　　刷： 保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本： 890×1240　16 开本
印　　张： 19
字　　数： 608 千字
版　　次： 2008 年 5 月第 1 版
印　　次： 2008 年 5 月第 1 次印刷
书　　号： ISBN 978-7-5437 7164-2
定　　价： 38.00 元

《鼎尖学案》个性化学案的典范

教育部《课程标准》的实施，彻底改变了过去人教社教材一统天下的局面，教材版本的多样化已成必然。教材版本的多样化又催生了课程进度的多样化以及学生水平的多样化。以上三种多样化再加上各省市高考自主命题引起的考试形式的多样化,共同导致了教辅图书出版的个性化。在"课程标准"时代，教辅图书出版的个性化是教辅图书出版的终极形态。

本套丛书为高三一轮总复习学案，作为个性化学案的典范，其总体策划、编写原则如下：

❶ 教材考点全新整合◎

依据考点之间的内在联系，对教材中的所有考点进行了全新梳理与有机整合，以全新的复习目录适应了高三一轮复习的实际需要。

❷ "章/单元"的编写结构：总→分→总◎

本套丛书宏观编写单元——"章/单元"的编写，遵循总（章首/单元首）→分（每节/每课）→总（章末/单元末）的编写原则。

❸ "节/课"的编写结构：以"课堂"为中心，兼顾"课前"与"课后"◎

本套丛书微观编写单元——"节/课"的编写，遵循以课堂（［课堂讲练互动］）为中心，兼顾课前（［课前夯实基础］）与课后（［课后巩固提高］）的编写原则，为高三师生一轮复习的课堂教学提供了操作性极强的解决方案。

❹ 课堂部分针对考点各个击破◎

每个考点都按照"讲→例→练"的互动模式，逐层突破。

[考点归纳]（讲）：突出重点，突破难点，言简意赅。

[考点探究]（例）：紧扣考点，精选典例，全析全解。

[考点应用]（练）：变式训练，趁热打铁，学以致用。

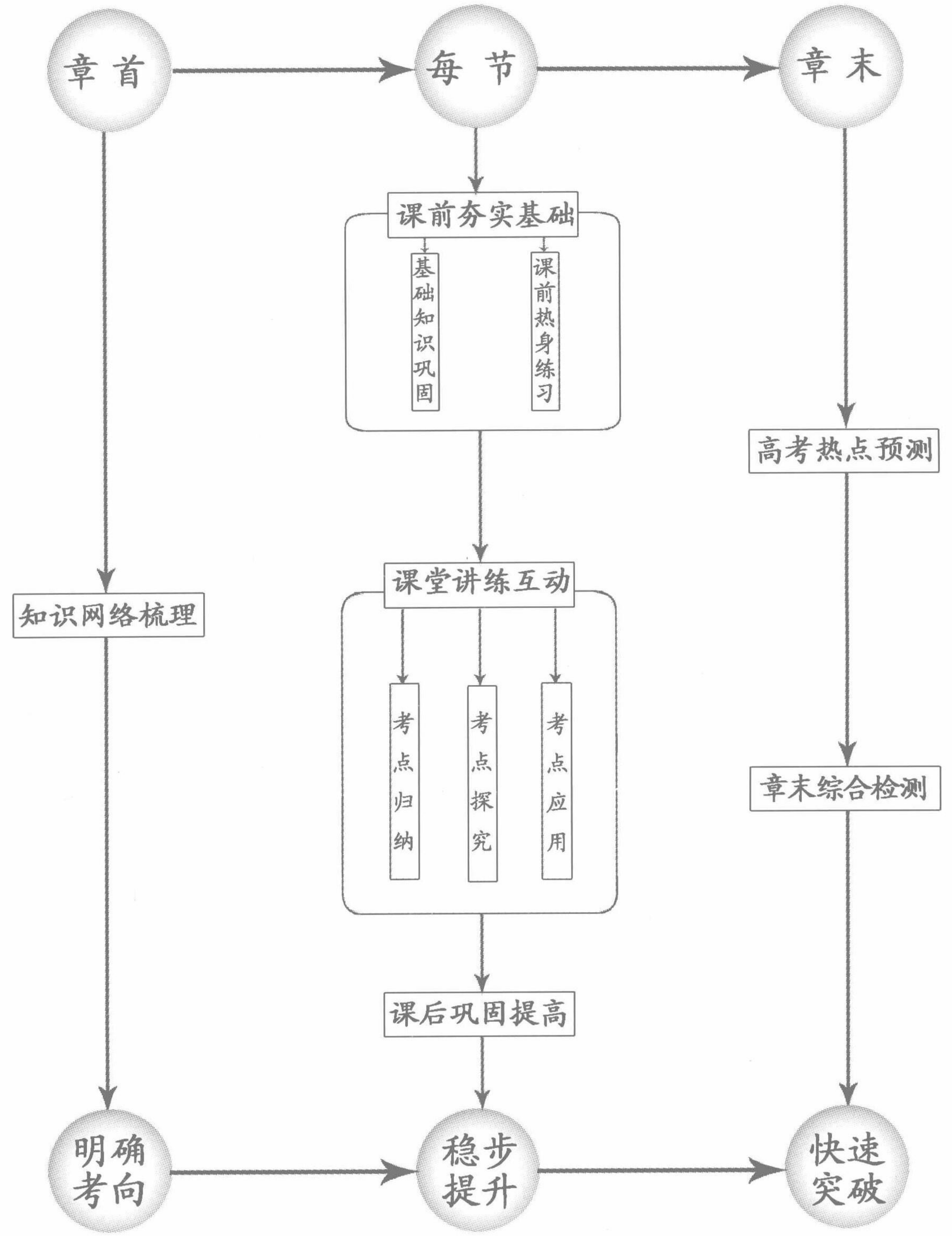
❺ 高考题型针对性强◎

本套丛书在所有例题及习题的题型设置上，全面跟进课标省区高考真题，全面展现课标省区高考新题型，真正实现了个性化学案的"本土化"。

特别说明：①本套丛书的出版团队是一群对教育出版拥有神圣情怀和远大使命的年轻人，在付梓之际，仍怀着忐忑不安的心情等待着读者的检阅；②因学科内容的差异，本套丛书的各个科目未能完全遵循以上编写原则。

最后借用古人的一句诗，来总结所有出版人在出版过程中的心路历程：为书消得人憔悴，衣带渐宽终不悔！

本书编写体例图示


章首
每节
章末
课前夯实基础
基础知识巩固
课前热身练习
知识网络梳理
高考热点预测
课堂讲练互动
考点归纳
考点探究
考点应用
章末综合检测
课后巩固提高
明确考向
稳步提升
快速突破

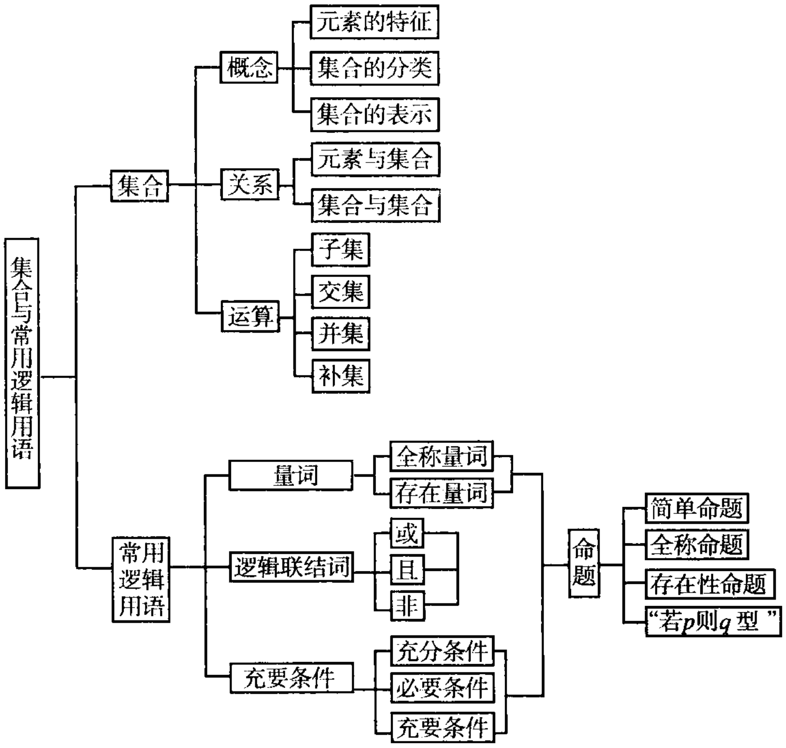
《鼎尖学案》读者反馈表

招聘启事	⊙用自己的辛勤将知识转化为财富⊙借我们的出版将教研凝结成图书 **本编辑部长期招聘兼职编者与审稿教师**				
您的姓名		身份	□老师	□学生	□学生家长
所在学校	________省（区）________市（县）________学校________年级________班				
联系电话		电子邮箱			
得书渠道	您是如何得到这本书的？	□书店购买	□学校订购	□邮购	□其他
装帧设计	您认为本书的封面设计？	□很好	□好	□一般	□其他
	您认为本书的版面设计？	□很好	□好	□一般	□其他
错　误	您认为本书的知识性错误？	□多	□一般	□少	□很少
	您认为本书的编校性错误？	□多	□一般	□少	□很少
	请您帮我们纠纠错！（表格不够用可另附加）				
编写体例	您认为本书的编写体例？	□很好	□好	□一般	□差
	您认为本书编写体例的缺点是什么？				
	提出您对编写体例修改的宝贵意见？				
选　题		□特别新颖	□新颖	□一般	□陈旧
奖励措施	以下四项任选其一	□奖励新书	□团购优惠	□安排编委（仅限教师）	□签约作者
邮寄地址	北京市海淀区苏州街18号院4号楼A1座1003（100080）				

目录

第一章　集合与常用逻辑用语

知识网络梳理



§1.1　集合

课前夯实基础

基础知识巩固

1. 集合的含义与表示

(1)一般地,我们把研究对象统称为________,把一些元素组成的总体叫做________,简称________.

(2)集合中的元素有三个特性:①________;②________;③________.

(3)集合中元素与集合的关系分别为________和________两种,分别用________和________来表示.

(4)几个常用集合的记法

数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
记法	______	______	______	______	______

(5)集合有三种表示方法:________、________、________,它们各有优点,用什么方法来表示集合,要具体问题具体分析.

2. 集合间的基本关系

(1)一般地,对于两个集合 A、B,如果________________,我们就说这两个集合有包含关系,称集合 A 为集合 B 的子集,记作________.

(2)对于两个集合 A、B,若________且________,则称集合 A 与集合 B 相等.

(3)如果集合 $A\subseteq B$,但存在元素 $x\in B$,且 $x\notin A$,我们称集合 A 是集合 B 的________,记作____________.

(4)不含任何元素的集合叫做________,记作________,并规定:空集是任何集合的子集.

(5)若 A 含有 n 个元素,则 A 的子集个数为________个,A 的非空子集个数为________个,A 的非空真子集个数为________个.

3. 集合的基本运算

(1)一般地,由所有________________的元素所组成的集合,称为集合 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,即:$A\cup B=$________.

(2)一般地,由属于______________的所有元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,即:$A\cap B=$______________

____.

(3)如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素，那么就称这个集合为________，通常记作________.

(4)对于一个集合 A，由全集 U 中________的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=$________.

(5) $A\cap B=A\Leftrightarrow$________

$A\cup B=A\Leftrightarrow$________

课前热身练习

1. (2006·重庆)已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{2,4,5,7\}$，$B=\{3,4,5\}$，则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$ ( )
A. $\{1,6\}$ B. $\{4,5\}$ C. $\{2,3,4,5,7\}$ D. $\{1,2,3,6,7\}$
2. 设集合 $M=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y|y=-x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N$ 是 ( )
A. $\{0,1\}$ B. $\{(0,1)\}$ C. $\{1\}$ D. 非上述情况
3. 设集合 $A=\{x|1<x<2\}$，$B=\{x|x<a\}$，若 $A\subsetneqq B$，则 a 的取值范围 ( )
A. $[2,+\infty)$ B. $(-\infty,2]$
C. $(2,+\infty)$ D. $(-\infty,2)$
4. (2007·湖北重点中学高三联考)已知集合 $M=\{y|y=x+1\}$，$N=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$，则 $M\cap N$ 中元素的个数是 ( )
A. 0 B. 1 C. 2 D. 多个
5. (2007·广东)已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ 的定义域为 M，$g(x)=\ln(1+x)$ 的定义域为 N，则 $M\cap N=$ ( )
A. $\{x|x>-1\}$ B. $\{x|x<1\}$
C. $\{x|-1<x<1\}$ D. $\varnothing$
6. (2007·重庆)设全集 $U=\{a,b,c,d\}$，$A=\{a,c\}$，$B=\{b\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$ ( )
A. $\varnothing$ B. $\{a\}$ C. $\{c\}$ D. (a,c)
7. (2007·安徽)若 $A=\{x\in\mathbf{Z}|2\leqslant 2^{2-x}<8\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}||\log_2 x|>1\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$ 的元素个数为 ( )
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

课堂讲练互动

考点1 集合的含义与表示

考点归纳

要注意集合元素的确定性、互异性、无序性的运用，即分析问题，要看能否用它找到解题的切入点；最后再检验元素是否满足“三性”. 表示集合要选择适当的方法，如：列举法、描述法、区间法、图示法等. 由于空集较特殊，即 $\varnothing\subseteq A$，又易被忽视，应处处提高警惕.

考点探究

【例1】设 $A=\{-4,2a-1,a^2\}$，$B=\{9,a-5,1-a\}$，已知 $A\cap B=\{9\}$，求实数 a 的值. (2006·湖北省重点中学联考题)

【解析】$\because A\cap B=\{9\}$，$\therefore 9\in A$.

若 $2a-1=9$，则 $a=5$.

此时 $A=\{-4,9,25\}$，$B=\{9,0,-4\}$，

$A\cap B=\{9,-4\}$，与已知矛盾，舍去.

若 $a^2=9$，则 $a=\pm3$.

当 $a=3$ 时，$A=\{-4,5,9\}$，$B=\{-2,-2,9\}$.

B 中有2个元素均为 -2，与集合中元素的互异性矛盾，应舍去.

当 $a=-3$ 时，$A=\{-4,-7,9\}$，$B=\{9,-8,4\}$，符合题意.

综上所述，$a=-3$.

【点评】本题考查集合元素的基本特征——确定性、互异性、无序性，切入点是分类讨论思想，由于集合中元素用字母表示，检验结果必不可少.

【例2】给定集合 A,B，定义 $A*B=\{x|x=m-n,m\in A,n\in B\}$，若 $A=\{4,5,6\}$，$B=\{1,2,3\}$，则集合 $A*B$ 中的所有元素之和为 ( )

A. 15 B. 14 C. 27 D. -14

【解析】由于 $A=\{4,5,6\}$，$B=\{1,2,3\}$.

$\therefore A*B=\{5,4,3,2,1\}$，故其所有元素和为 $5+4+3+2+1=15$，故选A.

【答案】A

【点评】这是一个综合创新题，吃透新定义是此题的关键. 解答这类信息迁移题，要注意紧扣题目中给出的新定义，将新旧知识联系起来，并用已有的解题方法来分析、解决新的问题.

考点拓展

1. 有关集合问题解决一要借助于概念，二要借助于数轴，三要借助于Venn图，四要借助于函数图象.

2. 在集合的描述法中特别关注代表元素的形式，如 $\{y|y=x^2\}$，$\{x|y=x^2\}$，$\{(x,y)|y=x^2\}$ 均表示不同的集合.

考点应用

1. 下列六种表示法

①$\{x=-1,y=2\}$ ②$\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}\right\}$

③$\{-1,2\}$ ④$(-1,2)$

⑤$\{(-1,2)\}$ ⑥$\{x,y|x=-1\text{ 或 }y=2\}$

能正确表示方程组 $\begin{cases}2x+y=0\\x-y+3=0\end{cases}$ 的解集的是 ( )

A. ①②③④⑤⑥ B. ②③④⑤
C. ②⑤ D. ②⑤⑥

2. (2006·山东)定义集合运算 $A\odot B=\{z|z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$. 设集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{2,3\}$，则集合 $A\odot B$ 的所有元素之和为 ( )
A. 0 B. 6 C. 12 D. 18

3. 设集合 $M=\{x|x=5-4a+a^2,a\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y|y=4b^2+4b+2,b\in\mathbf{R}\}$，则下列关系正确的是 ( )
A. $M=N$ B. $M\subsetneqq N$ C. $M\supsetneqq N$ D. $M\subseteq N$

考点2 集合间的基本关系

考点归纳

集合的交集、并集、补集运算是重点内容，在学习时要重视数形结合思想的运用，数集往往借助数轴进行；点集则借助平面直角坐标系；有时可以借助文氏图进行运算.

考点探究

【例3】已知集合 $A=\{x|0<ax+1\leqslant 5\}$，

集合 $B=\{x|-\frac{1}{2}<x\leqslant 2\}$.

(1)若 $A\subseteq B$,求实数 a 的取值范围;

(2)若 $B\subseteq A$,求实数 a 的取值范围;

(3)A、B 能否相等?若能,求出 a 的值;若不能,试说明理由.

【点拨】利用数轴作工具,使问题得到解决.

【解析】A 中不等式的解集应分三种情况讨论:

①若 $a=0$,则 $A=\mathbf{R}$;

②若 $a<0$,则 $A=\{x|\frac{4}{a}\leqslant x<-\frac{1}{a}\}$;

③若 $a>0$,则 $A=\{x|-\frac{1}{a}<x\leqslant\frac{4}{a}\}$.

(1)当 $a=0$ 时,若 $A\subseteq B$,此种情况不存在.

当 $a<0$ 时,若 $A\subseteq B$,则 $\begin{cases}\frac{4}{a}>-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{a}\leqslant 2\end{cases}$,

$\therefore\begin{cases}a<-8\\a\leqslant-\frac{1}{2}\end{cases}$,$\therefore a<-8$.

当 $a>0$ 时,若 $A\subseteq B$,则 $\begin{cases}-\frac{1}{a}\geqslant-\frac{1}{2}\\\frac{4}{a}\leqslant 2\end{cases}$,$\therefore\begin{cases}a\geqslant 2\\a\geqslant 2\end{cases}$,

$\therefore a\geqslant 2$.综上知,此时 a 的取值范围是 $a<-8$ 或 $a\geqslant 2$.

(2)当 $a=0$ 时,显然 $B\subseteq A$;

当 $a<0$ 时,若 $B\subseteq A$,则 $\begin{cases}\frac{4}{a}\leqslant-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{a}>2\end{cases}$,$\therefore\begin{cases}a\geqslant-8\\a>-\frac{1}{2}\end{cases}$.

$\therefore -\frac{1}{2}<a<0$;

当 $a>0$ 时,若 $B\subseteq A$,则 $\begin{cases}-\frac{1}{a}\leqslant-\frac{1}{2}\\\frac{4}{a}\geqslant 2\end{cases}$,

$\therefore\begin{cases}a\leqslant 2\\a\leqslant 2\end{cases}$. $\therefore 0<a\leqslant 2$.

综上知,当 $B\subseteq A$ 时,$-\frac{1}{2}<a\leqslant 2$.

(3)当且仅当 A、B 两个集合互相包含时,$A=B$,由(1)、(2)知,$a=2$.

【点评】在解决两个数集关系问题时,避免出错的一个有效手段是合理运用数轴帮助分析与求解,另外,在解含有参数的不等式(或方程)时,要对参数进行讨论.分类时要遵循“不重不漏”的分类原则,然后对于每一类情况都要给出问题的解答.分类讨论的一般步骤:①确定标准;②恰当分类;③逐类讨论;④归纳结论.

考点应用

4.(2006·中山)已知集合 $P=\{1,2\}$,那么满足 $Q\subseteq P$ 的集合 Q 的个数是 ( )

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

5. $M=\{x|x^2=1\}$,$N=\{x|ax=1\}$,若 $N\subsetneqq M$,则 a 的值为______.

6. 设集合 $P=\{m|-1<m<0\}$,$Q=\{m\in\mathbf{R}|mx^2+4mx-4<0$ 对任意实数 x 恒成立$\}$,则下列关系中成立的是 ( )

A. $P\subsetneqq Q$　　B. $Q\not\subseteq P$

C. $P=Q$　　D. $P\cap Q=\varnothing$

7. 设集合 A,B 是全集 $\mathbf{U}$ 的两个子集,则 $A\subsetneqq B$ 是 $(\complement_U A)\cup B=\mathbf{U}$ 的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8.(2006·湖南)设 $f(x)=\frac{x-a}{x-1}$,集合 $M=\{x|f(x)<0\}$,$P=\{x|f'(x)>0\}$,若 $M\subsetneqq P$,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,1)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

考点3 集合的运算

考点归纳

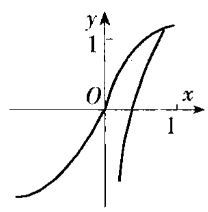
集合的子交并补运算是重点内容,在学习时要重视数形结合思想的运用,数集往往借助数轴进行;点集则借助平面直角坐标系;有时可以借助文氏图进行运算.

考点探究

【例4】(2006·上海春招)若集合 $A=\{y|y=x^{\frac{1}{3}},-1\leqslant x\leqslant 1\}$,$B=\{y|y=2-\frac{1}{x},0<x\leqslant 1\}$,则 $A\cap B$ 等于 ( )

A. $(-\infty,1]$　　B. $[-1,1]$　　C. $\varnothing$　　D. $\{1\}$

【解析】根据题意求出集合 A 和 B 的元素,再求公共元素所组成的集合,便可得正确选项.也可画出图象,求函数值的公共部分.



方法一:$A=\{y|-1\leqslant y\leqslant 1\}$,$B=\{y|y\leqslant 1\}$,$A\cap B=A=[-1,1]$.因此,选 B.

方法二:(数形结合法)如图,从两个函数图象上可以看出它们的函数值的交集是公共部分,即 $[-1,1]$,因此,选 B.

【答案】B

【点评】解答本类题目,必须弄清集合中的元素是什么,是函数关系中自变量的取值,还是因变量的取值,还是曲线上的点……数形结合是解集合问题的常用方法,解题时要尽可能地借助数轴、直角坐标系或韦恩图等工具,将抽象的代数问题具体化、形象化、直观化,然后利用数形结合的思想方法解决.

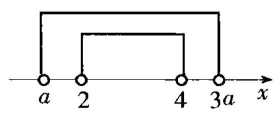
【例5】已知集合 $A=\{x|x^2-6x+8<0\}$,$B=\{x|(x-a)\cdot(x-3a)<0\}$.

(1)若 $A\subseteq B$,求 a 的取值范围.

(2)若 $A\cap B=\varnothing$,求 a 的取值范围.

(3)若 $A\cap B=\{x|3<x<4\}$,求 a 的取值范围.

【点拨】此题主要考查集合间的包含关系、集合运算、分类讨论等基础知识,考查运算、分析问题、解决问题的能力.本题可结合数轴进行分析.



【解析】$\because A=\{x|x^2-6x+8<0\}$,

$\therefore A=\{x|2<x<4\}$.

(1)当 $a>0$ 时,$B=\{x|a<x<3a\}$,

应满足$\begin{cases} a\leqslant 2 \\ 3a\geqslant 4 \end{cases}\Rightarrow \frac{4}{3}\leqslant a\leqslant 2$,

当 $a<0$ 时,$B=\{x|3a<x<a\}$,

应满足$\begin{cases} 3a\leqslant 2 \\ a\geqslant 4 \end{cases}\Rightarrow a\in\varnothing$,$\therefore A\subseteq B$ 时,$\frac{4}{3}\leqslant a\leqslant 2$.

(2)要满足 $A\cap B=\varnothing$,

当 $a>0$,$B=\{x|a<x<3a\}$,$a\geqslant 4$ 或 $3a\leqslant 2$,

$\therefore 0<a\leqslant\frac{2}{3}$ 或 $a\geqslant 4$;

当 $a<0$ 时,$B=\{x|3a<x<a\}$,$a\leqslant 2$ 或 $a\geqslant\frac{4}{3}$,

$\therefore a<0$ 时成立,验证知当 $a=0$ 时也成立.

综上所述,$a\leqslant\frac{2}{3}$ 或 $a\geqslant 4$ 时,$A\cap B=\varnothing$.

(3)要满足 $A\cap B=\{x|3<x<4\}$,显然 $a>0$ 且 $a=3$ 时成立,

$\because$ 此时 $B=\{x|3<x<9\}$,而 $A\cap B=\{x|3<x<4\}$,

故所求 a 的值为 3.

【点评】(1)本题为集合在一定约束条件下求参数的问题,涉及集合的运算,其转化途径常通过两个方面:一是分析、简化每个集合;二是利用两集合元素的性质.

(2)本题体现了分类讨论的思想,分类的关键点在于比较出 a 与 $3a$ 的大小,进而将集合 B 表示出来.

考点拓展

(1)解决用符号描述法表示的集合问题时,弄清集合的元素特征是关键.(2)用图形表示集合,使抽象问题形象化,正确转化是解题的前提.(3)把集合作为工具应用,解题的关键在于拨开利用集合来叙述问题的这一面纱,把它转化为其他的数学本质问题,从而使问题顺利地解决.

考点应用

9. 已知集合 $A=\{(x,y)|y-\sqrt{3}x\leqslant 0\}$,集合 $B=\{(x,y)|x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$,若 $A\cap B=B$,则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $[2,+\infty)$

B. $(-\infty,-2]$

C. $[-2,2]$

D. $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

10. 设 $f(n)=2n+1(n\in\mathbf{N})$,$P=\{1,2,3,4,5\}$,$Q=\{3,4,5,6,7\}$.记 $\hat{P}=\{n\in\mathbf{N}|f(n)\in P\}$,$\hat{Q}=\{n\in\mathbf{N}|f(n)\in Q\}$,则$(\hat{P}\cap\complement_N\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap\complement_N\hat{P})=$ (　　)

A. $\{0,3\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{3,4,5\}$　　D. $\{1,2,6,7\}$

11. 设 I 为全集,S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$,则下列论断正确的是 (　　)

A. $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$

B. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

C. $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$

D. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

考点4　集合的综合应用

考点归纳

集合与其它知识点的联系在高考中经常考,并且渗透集合语言叙述的综合题也屡见不鲜,常与函数、方程、不等式、数列、解析几何为背景构造一类综合性题目.其中高考热点是集合与不等式的综合题.

考点探究

【例6】记函数 $f(x)=\lg(2x-3)$ 的定义域为集合 M,函数 $g(x)=\sqrt{1-\frac{2}{x-1}}$ 的定义域为集合 N.

求(Ⅰ)集合 M、N;

(Ⅱ)集合 $M\cap N$,$M\cup N$.

【解析】(Ⅰ)$M=\{x|2x-3>0\}=\{x|x>\frac{3}{2}\}$;

$N=\{x|1-\frac{2}{x-1}\geqslant 0\}=\{x|\frac{x-3}{x-1}\geqslant 0\}$

$=\{x|x\geqslant 3$ 或 $x<1\}$.

(Ⅱ)$M\cap N=\{x|x\geqslant 3\}$;

$M\cup N=\{x|x<1$ 或 $x>\frac{3}{2}\}$.

【点评】本题考查函数的定义域以及集合的运算以及不等式的解法.求定义域转化为解不等式.借助于数,求数集合的交集和并集.

【例7】设 $I=\{1,2,3,4\}$,A 与 B 是 I 的子集,若 $A\cap B=\{2,1\}$,则称(A,B)为一个“理想配集”,规定(A,B)和(B,A)是两个不同的“理想配集”,那么符合此条件的“理想配集”的个数是 (　　)

A. 4　　B. 8　　C. 9　　D. 16

【点拨】解答信息迁移问题,关键在理解新信息并把它纳入已有的知识体系中,用原来的知识和方法来解决新情境下的问题.

【解析】由 A 与 B 是集合 I 的子集,且 $A\cap B=\{1,2\}$,得 A,B 应为$\{1,2\}$,$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4\}$,$\{1,2,3,4\}$中的一个.

由定义知,

①若 $A=\{1,2\}$,则集合 B 可以取以上 4 个集合中的任何一个,共有 4 种不同的情形;

②若 $A=\{1,2,3\}$,则集合 B 可以取$\{1,2\}$,$\{1,2,4\}$中的任何一个,共有 2 种不同的情形;

③若 $A=\{1,2,4\}$,则集合 B 可以取$\{1,2\}$,$\{1,2,3\}$中的任何一个,共有 2 种不同的情形;

④若 $A=\{1,2,3,4\}$,则集合 B 可以取$\{1,2\}$这一种情形.

综上可知,适合题意的情形共有 $4+2+2+1=9$ 种.

故选 C.

【答案】C

【点评】本题主要考查集合的运算以及分类讨论思想,阅读迁移的能力,体现了最新《考试大纲》的“要构造有一定深度和广度的数学问题”的高考命题要求.

【例8】(2006·全国Ⅱ)设 $a\in\mathbf{R}$,二次函数 $f(x)=ax^2-2x-2a$,设不等式 $f(x)>0$ 的解集为 A,又知 $B=\{x|1<x<3\}$,若 $A\cap B\neq\varnothing$,求 a 的取值范围.

【点拨】若从正面考虑,解 $f(x)>0$,显然较繁,故考虑对立面,先求 $A\cap B=\varnothing$ 时 a 的范围,然后取补集.

【解析】$\because f(x)$ 为二次函数,$\therefore a\neq 0$.

①当 $a>0$ 时,

$A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases} f(1)\leqslant 0 \\ f(3)\leqslant 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a-2-2a\leqslant 0 \\ 9a-6-2a\leqslant 0 \end{cases}\Leftrightarrow -2\leqslant a\leqslant\frac{6}{7}$,

$\therefore 0<a\leqslant\frac{6}{7}$.

②当 $a<0$ 时,

$A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases} f(1)\leqslant 0 \\ f(3)\leqslant 0 \end{cases}\Leftrightarrow -2\leqslant a\leqslant\frac{6}{7}$,$\therefore -2\leqslant a<0$.

$\therefore$ 当 $A\cap B=\varnothing$ 时，$-2\leq a\leq 0$ 或 $0<a\leq\frac{6}{7}$.

又$\because a\in\mathbf{R}$,且 $a\neq 0$,$\therefore A\cap B\neq\varnothing$ 时,$a<-2$ 或 $a>\frac{6}{7}$.

$\therefore a$ 的取值范围是$(-\infty,-2)\cup(\frac{6}{7},+\infty)$.

【点评】当从正面求一个集合比较麻烦时,可以考虑先求其补集,然后再取补集.这种补集的思想可以化繁为简.

考点应用

12. 设集合 $A=\{x|x^2-5x+4>0\}$,$B=\{x|x^2-2ax+(a+2)=0\}$,若 $A\cap B\neq\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

13. 设集合 $A=\{(x,y)|ay^2-x-1=0\}$,$B=\{(x,y)|4x^2+2x-2y+5=0\}$,$C=\{(x,y)|y=kx+b\}$.
若 $a=1$,是否存在自然数 k 和 b,使得$(A\cap C)\cup(B\cap C)=\varnothing$?若存在,请求出 k 和 b 的值;若不存在,请说明理由.

课后巩固提高

1. 由实数 $x,-x,|x|,\sqrt{x^2},-\sqrt[3]{x^3}$ 组成的集合中,最多含有元素 ( )
A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个
2. 对于任意 x、$y\in\mathbf{R}$,且 $xy\neq 0$,由 $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{xy}{|xy|}$ 的值组成的集合中元素的个数为 ( )
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
3. 已知 $A=\{1,2\}$,$B=\{x|x\in A\}$,则集合 A 与 B 的关系为 ( )
A. $A\in B$ B. $A\notin B$ C. $A=B$ D. $B\subseteq A$
4. 同时满足①$M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,②若 $a\in M$,则 $6-a\in M$ 的非空集合 M 有 ( )
A. 32个 B. 15个 C. 7个 D. 6个
5. (2006·江苏)若 A、B、C 为三个集合,$A\cup B=B\cap C$,则一定有 ( )
A. $A\subseteq C$ B. $C\subseteq A$ C. $A\neq C$ D. $A=\varnothing$
6. 若集合 $S=\{y|y=3^x,x\in\mathbf{R}\}$,$T=\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$,则 $S\cap T$ 是 ( )
A. S B. T C. $\varnothing$ D. 有限集
7. 设集合 $A=\{x|x^2-1>0\}$,$B=\{x|\log_2 x>0\}$,则 $A\cap B$ 等于 ( )
A. $\{x|x>1\}$ B. $\{x|x>0\}$
C. $\{x|x<-1\}$ D. $\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$
8. (2006·湖北八校联考)已知集合 $M=\{0,1,2\}$,$N=\{x|x=2a,a\in M\}$,则集合 $M\cap N=$ ( )
A. $\{0\}$ B. $\{0,1\}$ C. $\{1,2\}$ D. $\{0,2\}$
9. 设集合 $A=\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x|x=n+1,n\in\mathbf{Z}\}$,则集合 A,B 的关系是 ( )
A. $A\subsetneqq B$ B. $B\subsetneqq A$ C. $A=B$ D. 无法确定
10. (2006·长沙模拟)设集合 $A=\{x|x<0\}$,$B=\{x|x^2-4x+3>0\}$,则集合 $\{x|x\in B,x\notin A\cap B\}=$ ________.
11. 已知集合 $M=\{m|\frac{m-4}{2}\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{n|\frac{n+3}{2}\in\mathbf{Z}\}$,则 $M\cap N=$ ________.
12. 设集合 $A=\{5,\log_2(a+3)\}$,集合 $B=\{a,b\}$.若 $A\cap B=\{2\}$,则 $A\cup B=$ ________.
13. 已知集合 $A=\{x|x^2-x-6<0\}$,$B=\{x|0<x-m<9\}$,
(1)若 $A\cup B=B$,求实数 m 的取值范围;
(2)若 $A\cap B\neq\varnothing$,求实数 m 的取值范围.
14. 集合 $A=\{x|x^2+4x=0,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,x\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cup B=A$,求实数 a.
15. 设 $f(x)=x^2+px+q$,$A=\{x|x=f(x)\}$,$B=\{x|f[f(x)]=x\}$.
(1)求证:$A\subseteq B$;
(2)如果 $A=\{-1,3\}$,求 B.

§1.2 命题与简易逻辑

课前夯实基础

基础知识巩固

1. 命题

(1)命题定义

可以判断________的语句,叫命题.

(2)全称命题

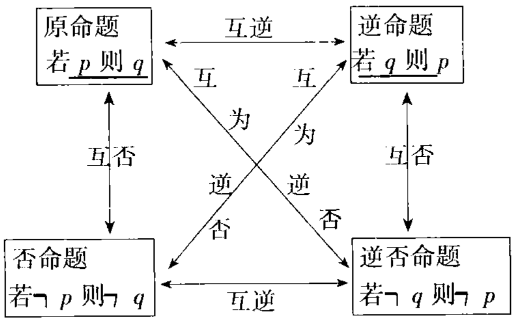
短语“所有”在陈述中表示所述事物的全体,逻辑中通常叫做________,并用符号________表示,含有全称量词的命题,叫做________,全称命题就是形如“对 M 中的所有 x,$p(x)$”的命题,用符合简记为________.

(3)存在性命题

短语"有一个"或"有些"或"至少有一个"在陈述中表示所述事物的个体或部分,逻辑中通常叫做________,并用符号"________"表示,含有存在量词的命题,叫做________,存在性命题就是形如"存在集合 M 中的元素 $x,q(x)$"的命题,用符号简记为________.

(4)命题的四种形式

①四种命题的形式及其逻辑关系



②四种命题的关系:

ⓐ原命题为真,它的逆命题________为真.

ⓑ原命题为真,它的否命题________为真.

ⓒ原命题为真,它的逆否命题________为真.

2. 基本逻辑联结词

(1)常用基本逻辑联结词有:______、______、______.

(2)真值表

p	q	$p\cap q$	$p\cup q$	$\neg p$
真	真	______	______	______
真	假	______	______	______
假	真	______	______	______
假	假	______	______	______

【提醒】①判断复合命题真假口诀:$p\cap q$:"一假必假",$p\cup q$:"一真必真",$\neg p$:"真假相反".

②常见关键词的否定

正面词语	等于	大于($>$)	小于($<$)	是	都是	至多有一个
否定	不等于	不大于($\leqslant$)	不小于($\geqslant$)	不是	不都是	至少有两个
正面词语	至少有一个	任意的	所有的	至多有 n 个	任意两个	
否定	一个都没有	某个	某些	至少有 $n+1$ 个	某两个	

③$\neg(p\cap q)=(\neg p)\cup(\neg q)$,$\neg(p\cup q)=(\neg p)\cap(\neg q)$

$\neg$(若 p,则 q):若 p,则$\neg q$. 这是反证法的理论依据,与否命题不同. 否命题是:若$\neg p$,则$\neg q$.

课前热身练习

1. (2007·重庆)命题"若 $x^2<1$,则 $-1<x<1$"的逆否命题是 ( )

A. 若 $x^2\geqslant1$,则 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$

B. 若 $-1<x<1$,则 $x^2<1$

C. 若 $x>1$ 或 $x<-1$,则 $x^2>1$

D. 若 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$,则 $x^2\geqslant1$

2. (2006·广东珠海)给出两个命题:p:$|x|=x$ 的充要条件是 x 为正实数;q:存在反函数的函数一定是单调函数. 则下列复合命题是真命题的为 ( )

A. p 且 q B. p 或 q C. $\neg p$ 且 q D. $\neg p$ 或 q

3. (2007·海南)已知命题 p:$\forall x\in\mathbf{R}$,$\sin x\leqslant1$,则 ( )

A. $\neg p$:$\exists x\in\mathbf{R}$,$\sin x\geqslant1$ B. $\neg p$:$\forall x\in\mathbf{R}$,$\sin x\geqslant1$

C. $\neg p$:$\exists x\in\mathbf{R}$,$\sin x>1$ D. $\neg p$:$\forall x\in\mathbf{R}$,$\sin x>1$

4. (2007·福建)对于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ,下列命题中的真命题是 ( )

A. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$

B. 若 $\lambda\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$,则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$

C. 若 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$

D. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

5. (2006·山东潍坊)已知命题 p:不等式 $|x|+|x-1|>m$ 的解集为 $\mathbf{R}$,命题 q:函数 $f(x)=-(5-2m)^x$ 是减函数,若 p 或 q 为真命题,p 且 q 为假命题,则实数 m 的取值范围是________.

6. (2006·山东青岛)给出命题:"已知 a,b,c,d 是实数,若 $a\neq b$ 且 $c\neq d$,则 $a+c\neq b+d$."对原命题、逆命题、否命题、逆否命题而言,其中真命题的个数有________.

课堂讲练互动

考点1 四种命题及其关系

考点归纳

命题"若 p 则 q"的否定为"若 p 则非 q",否定命题为"若非 p,则非 q",二者不可混淆.

考点探究

【例1】把下列命题写成"若 p 则 q"的形式,并写出它们的逆命题、否命题与逆否命题.

(1)当 $x=2$ 时,$x^2-3x+2=0$;

(2)对顶角相等.

【解析】本例主要考查四种命题的基本形式,关键是分清条件 p 与结论 q.

(1)原命题:若 $x=2$,则 $x^2-3x+2=0$;

逆命题:若 $x^2-3x+2=0$,则 $x=2$;

否命题:若 $x\neq2$,则 $x^2-3x+2\neq0$;

逆否命题:若 $x^2-3x+2\neq0$,则 $x\neq2$.

(2)原命题:若两个角是对顶角,则它们相等;

逆命题:若两个角相等,则它们是对顶角;

否命题:若两个角不是对顶角,则它们不相等;

逆否命题:若两个角不相等,则它们不是对顶角.

【点评】写原命题的逆命题、否命题、逆否命题时,比较容易错的是写否命题,原命题是"若 p 则 q"的形式时,否命题应为"若$\neg p$ 则$\neg q$",既要否定条件,又要否定结论,四种命题形式之间的关系

是相对的,如逆命题的逆命题是原命题,逆否命题的逆否命题也是原命题,原命题与逆否命题同真假,而原命题与逆命题(或否命题)未必同真假,如(1).由于逆命题与否命题之间的关系是“互为逆否”,因此,逆命题与否命题同真假,则有时原命题的真假不易判断时,可判断它的逆否命题的真假.常见的否定形式有:

原语句	是	都是	$>$	至少有一个	至多有一个	对任意 $x\in A$,使 $p(x)$ 真
否定形式	不是	不都是	$\leqslant$	一个也没有	至少有两个	存在 $x\in A$,使 $p(x)$ 假

考点应用

1. (2007·山东实验中学一诊)有下列四个命题,其中真命题有 ( )

①“若 $x+y=0$,则 x、y 互为相反数”的逆命题

②“全等三角形的面积相等”的否命题

③“若 $q\leqslant 1$,则 $x^2+2x+q=0$ 有实根”的逆命题

④“不等边三角形的三个内角相等”的逆否命题

A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ③④

2. (2007·山东济宁)给出下列四个命题:

(1)各侧面都是正方形的棱柱一定是正棱柱.

(2)若直线 $l\perp$ 平面 α,$l/\!/$ 平面 β,则 $\alpha\perp\beta$.

(3)命题“异面直线 a、b 不垂直,则过 a 的任一平面与 b 都不垂直”的否定.

其中,正确的命题是 ( )

A. (2) B. (1)(3) C. (1)(2) D. (2)(3)

3. 与命题“若 $a\in M$,则 $b\notin M$”等价的命题是 ( )

A. 若 $a\notin M$,则 $b\notin M$ B. 若 $b\notin M$,则 $a\in M$

C. 若 $a\notin M$,则 $b\in M$ D. 若 $b\in M$,则 $a\notin M$

考点2 逻辑联结词及命题的真假

考点归纳

复合命题真假的判断关键是熟练掌握真值表.

考点探究

【例2】判断下列复合命题的真假.

(1)等腰三角形顶角的平分线平分底边并且垂直于底边;

(2)方程 $x^2+3x+2=0$ 的根是 $x=\pm 1$;

(3)$A\not\subseteq(A\cup B)$.

【解析】(1)这个命题是“p 且 q”的形式,其中 p:等腰三角形顶角的平分线平分底边,q:等腰三角形顶角的平分线垂直于底边,因 p 真 q 真,则“p 且 q”真,所以该命题是真命题.

(2)这个命题是“p 或 q”的形式,其中 p:方程 $x^2+3x+2=0$ 的根是 1,q:方程 $x^2+3x+2=0$ 的根是 -1,因 p 假 q 真,则“p 或 q”真,所以该命题是真命题.

(3)这个命题是“非 p”的形式,其中 p:$A\subseteq(A\cup B)$,因 p 真,则“非 p”假,所以该命题是假命题.

【点评】一个复合命题,从字面上看不一定是“或”、“且”、“非”字样,这样需要我们掌握一些词语、符号或式子与逻辑联结词“或”、“且”、“非”的关系,如“或者”、“$x=\pm 1$”、“$\leqslant$”的含义为“或”;“并且”“$\underline{\perp\!\!\!\perp}$”的含义为“且”;“不是”、“$\not\subseteq$”的含义为“非”.

考点应用

4. 指出下列各题中的“p 或 q”、“p 且 q”、“非 p”、“非 q”形式的复合命题的真假.

(1)p:梯形有一组对边平行,q:梯形有一组对边相等;

(2)p:5 是 17 的约数,q:5 是 15 的约数;

(3)p:-1 是方程 $x^2+4x+3=0$ 的解,q:-3 是方程 $x^2+4x+3=0$ 的解.

5. (2005·广东汕头)命题 p:函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+1$ 满足 $f(\frac{\pi}{3}+x)=f(\frac{\pi}{3}-x)$,命题 q:函数 $g(x)=\sin(2x+\theta)+1$ 可能是奇函数(θ 为常数).则复合命题“p 或 q”“p 且 q”“非 q”为真命题的个数为 ( )

A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

6. 如果命题“$\neg(p$ 或 $q)$”为假命题,则 ( )

A. p、q 均为真命题

B. p、q 均为假命题

C. p、q 中至少有一个为真命题

D. p、q 中至多有一个为真命题

考点3 全称命题与存在性命题

考点归纳

(1)全称量词.

短语“对所有的”、“对任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词,用符号“$\forall$”表示,含有全称量词的命题,叫做全称命题:“对 M 中任意一个 x,$P(x)$ 都成立.”,简记:$\forall x\in M$,$P(x)$ 成立.

(2)存在量词.

短语“存在一个”、“至少有一个”在逻辑中通常叫做存在量词,并用符号“$\exists$”表示.含有存在量词的命题叫做存在特称命题:“存在 M 中的一个 x,使 $P(x)$ 成立.”,简记:$\exists x\in M$,使 $P(x)$ 成立.

考点探究

【例3】试判断以下命题的真假:

(1)$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+2>0$;(2)$\forall x\in\mathbf{N}$,$x^4\geqslant 1$;

(3)$\exists x\in\mathbf{Z}$,$x^3<1$;(4)$\exists x\in\mathbf{Q}$,$x^2=3$;

(5)$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2-3x+2=0$;(6)$\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2+1=0$.

【解析】(1)由于 $\forall x\in\mathbf{R}$,都有 $x^2\geqslant 0$,因而有 $x^2+2\geqslant 2>0$,即 $x^2+2>0$.所以命题“$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+2>0$”是真命题.

(2)由于 $0\in\mathbf{N}$,当 $x=0$ 时,$x^4\geqslant 1$ 不成立,

所以命题“$\forall x\in\mathbf{N}$,$x^4\geqslant 1$”是假命题.

(3)由于 $-1\in\mathbf{Z}$,当 $x=-1$ 时,能使 $x^3<1$,

所以命题“$\exists x\in\mathbf{Z}$,$x^3<1$”是真命题.

(4)由于使 $x^2=3$ 成立的数只有 $\pm\sqrt{3}$,而它们都不是有理数.因此,没有任何一个有理数的平方能等于 3,

所以命题“$\exists x\in\mathbf{Q}$,$x^2=3$”是假命题.

(5)假命题,因为只有 $x=2$ 或 $x=1$ 时满足.

(6)假命题,因为不存在一个实数 x 使 $x^2+1=0$ 成立.

【点评】要判定一个全称命题是真命题,必须对限定集合 M 中的每个元素 x 验证 $p(x)$ 成立;但要判定全称命题是假命题,只要能举出集合 M 中的一个 $x=x_0$,使得 $p(x_0)$ 不成立即可(这就是通常所说的“举出一个反例”).

要判定一个存在性命题是真命题,只要在限定集合 M 中,至少能找到一个 $x=x_0$,使 $p(x_0)$ 成立即可;否则,这一存在性命题就是假命题.

考点拓展

设命题 p:函数 $f(x)=\lg(ax^2-x+\frac{1}{16}a)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$;命题 q:不等式 $\sqrt{2x+1}<1+ax$ 对一切正实数均成立,如果命题 p 或 q 为真命题,命题 p 且 q 为假命题,求实数 a 的取值范围.

【解析】命题 p 为真命题$\Leftrightarrow$函数 $f(x)=\lg(ax^2-x+\frac{1}{16}a)$ 的

定义域为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow ax^2-x+\frac{1}{16}a>0$ 对任意实数 x 均成立 $\Rightarrow a=0$ 时，$-x>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，不可能；或者 $\begin{cases}a>0,\\1-\frac{1}{4}a^2<0\end{cases}\Leftrightarrow a>2$. 命题 p 为真命题 $\Leftrightarrow a>2$.

命题 q 为真命题 $\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}-1<ax$ 对一切正实数均成立 $\Leftrightarrow a>\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x}=\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}$ 对一切正实数 x 均成立.

由于 $x>0$，所以 $\sqrt{2x+1}>1$. 所以 $\sqrt{2x+1}+1>2$，所以 $\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}<1$. 所以，命题 q 为真命题 $\Leftrightarrow a\geqslant 1$.

根据题意知，命题 p 与 q 为有且只有一个是真命题，当命题 p 为真命题且命题 q 为假命题时，a 不存在；当命题 p 为假命题且命题 q 为真命题时，a 的取值范围是 $[1,2]$.

综上，命题 p 或 q 为真命题，命题 p 且 q 为假命题时实数 a 的取值范围是 $[1,2]$.

考点应用

7. 下列命题的否定是假命题的是 ( )
   A. p：每一个非负数的平方都是正数
   B. p：存在一个三角形，它的内角和大于 $180°$
   C. p：有的四边形没有外接圆
   D. p：$\exists x\in\mathbf{R}, x^2+x+4\leqslant 0$
8. (2007·山东济南)命题"存在 $x\in\mathbf{Z}$，使 $x^2+2x+m\leqslant 0$"的否命题是 ( )
   A. 存在 $x\in\mathbf{Z}$，使 $x^2+2x+m>0$
   B. 不存在 $x\in\mathbf{Z}$，使 $x^2+2x+m>0$
   C. 对于任意 $x\in\mathbf{Z}$，都有 $x^2+2x+m\leqslant 0$
   D. 对于任意 $x\in\mathbf{Z}$，都有 $x^2+2x+m>0$
9. (2007·广东广州)下列四个命题中，其中为真命题的是( )
   A. $\forall x\in\mathbf{R}, x^2+3<0$　B. $\forall x\in\mathbf{N}, x^2\geqslant 1$
   C. $\exists x\in\mathbf{Z}, x^5<1$　D. $\exists x\in\mathbf{Q}, x^2=3$

考点4 反证法

考点归纳

反证法是通过证明命题的结论的反面不成立而肯定命题成立的一种数学证明方法，其逻辑依据是非 p 命题为假，则 p 命题为真；当待证命题的结论涉及"不可能"、"不是"、"至少"、"至多"、"惟一"等字眼时，可考虑用反证法.

考点探究

【例4】若 x,y 都是正实数，且 $x+y>2$，

求证：$\frac{1+x}{y}<2$ 或 $\frac{1+y}{x}<2$ 中至少有一个成立.

【点拨】本题结论以"至少"形式出现，从正面思考有多种形式，不易入手，故可用反证法加以证明.

【解析】假设 $\frac{1+x}{y}<2$ 和 $\frac{1+y}{x}<2$ 都不成立，

则有 $\frac{1+x}{y}\geqslant 2$ 和 $\frac{1+y}{x}\geqslant 2$ 同时成立，

因为 $x>0$ 且 $y>0$，所以 $1+x\geqslant 2y$，

且 $1+y\geqslant 2x$，

两式相加，得 $2+x+y\geqslant 2x+2y$，所以 $x+y\leqslant 2$，

这与已知条件 $x+y>2$ 矛盾，

因此 $\frac{1+x}{y}<2$ 和 $\frac{1+y}{x}<2$ 中至少有一个成立.

【点评】(1)当一个命题的结论是以"至多"、"至少"、"惟一"或以否定形式出现时，宜用反证法来证，反证法关键是在正确的推理下得出矛盾，矛盾可以是①与已知条件矛盾，②与假设矛盾，③与定义、公理、定理矛盾，④与事实矛盾等方面，反证法常常是解决某些"疑难"问题的有力工具，是数学证明中的一件有力武器.

(2)利用反证法证明问题时，要注意与之矛盾的定理不能是用本题的结论证明的定理，否则，将出现循环论证的错误.

考点应用

10. 若 a、b、c 均为实数，且 $a=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$，$b=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$，$c=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$，求证：a、b、c 中至少有一个大于 0.

11. 设 $f(x)=x^2+ax+b$，求证：$|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$.

课后巩固提高

1. (2006·西安模拟)若命题 p 的否命题为 r，命题 r 的逆命题为 s，则 s 是 p 的逆命题 t 的 ( )
   A. 逆否命题　B. 逆命题　C. 否命题　D. 原命题
2. (2006·汕头模拟)下列四个命题中，其中为真命题的是( )
   A. $\forall x\in\mathbf{R}, x^2+3<0$　B. $\forall x\in\mathbf{N}, x^2\geqslant 1$
   C. $\exists x\in\mathbf{Z}$，使 $x^5<1$　D. $\exists x\in\mathbf{Q}, x^2=3$
3. (2006·淄博统考)下列命题中是全称命题的是 ( )
   A. 圆有内接四边形
   B. $\sqrt{3}>\sqrt{2}$
   C. $\sqrt{3}<\sqrt{2}$
   D. 若三角形的三边长分别为 3,4,5，则这个三角形为直角三角形
4. 命题 p：存在实数 m，使方程 $x^2+mx+1=0$ 有实数根，则命题 $\neg p$ 是 ( )
   A. 存在实数 m，使得方程 $x^2+mx+1=0$ 无实根
   B. 不存在实数 m，使得方程 $x^2+mx+1=0$ 有实根
   C. 对任意的实数 m，使得方程 $x^2+mx+1=0$ 有实根
   D. 至多有一个实数 m，使得方程 $x^2+mx+1=0$ 有实根
5. 有下列四个命题：
   ①"若 $x+y=0$，则 x、y 互为相反数(其中 x、$y\in\mathbf{R}$)"的逆命题；
   ②"全等三角形的面积相等"的否命题；
   ③"若 $q\leqslant 1$，则关于 x 的方程 $x^2+2x+q=0$ 有实根"的逆否命题；
   ④"不等边三角形的三个内角相等"的逆命题.
   其中真命题为 ( )
   A. ①②　B. ②③　C. ①③　D. ③④
6. (2007·海南)已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin x\leqslant 1$，则 ( )