高等数学学习指导

（修订版）

下册

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

电子科技大学出版社

高等数学学习指导

（修订版）

下 册

吴辅山 主编

电 子 科 技 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/吴辅山主编.—成都:电子科技大学出版社,2002.6
ISBN 7-81065-924-3

I.高... II.吴... III.高等数学—高等学校—教学参考资料
IV.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 057984 号

高等数学学习指导(下册) 吴辅山 主编

出　　版：电子科技大学出版社(成都市建设北路二段四号,邮编:610054)
责任编辑：张　俊
发　　行：电子科技大学出版社
印　　刷：安徽省天歌印刷厂
开　　本：850×1168　1/32　**印张** 10.75　**字数** 283 千
版　　次：2005 年 6 月修订版
印　　次：2005 年 9 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-81065-924-3/O·38
定　　价：25.00 元(上、下)

修订版前言

高等数学是工科院校一门重要的基础课程，也是大学生普遍感到难学的一门课程.近年来，随着高等院校招生数量的增加，高等数学难学的矛盾更加凸现.课程指导委员会及时修改了《工科类本科数学基础课程教学基本要求》.针对这一具体情况，对《高等数学学习指导》一书作相应的修改，显得十分必要.

这次修订版主要在下列几个方面进行了改动或补充：

1. 根据课程指导委员会的会议精神及《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，本书将“学习要求”改为“基本要求”，将“内容提要”改为“基本概念、理论与公式”.

2. 全面修改了“基本要求”的内容.

3. 各章的“综合练习题”中，有些题目有一定难度，为了提高学生的学习兴趣与学习效果，对难度较大的题目在书末“参考答案”中给出了提示或解答.

4. 上、下册书后各配备了四套模拟试题，用于学生自我测试，以检查自我学习的效果.模拟试题中，有些题目难度较大，在“参考答案”中对这些题目给出了提示或解答.

5. 调整和补充了部分习题.

全书修改工作由安徽工业大学吴辅山完成.限于编者的水平，书中难免存在不妥之处，敬请同行与读者不吝赐教，编者深表诚挚谢意.

编　者

2005 年 9 月

第一版前言

学好高等数学的关键是深刻理解基本概念,掌握基本性质,熟记基本公式,熟悉各种类型的习题,掌握解题的基本方法,提高分析问题、解决问题的能力.学生在学习过程中,甚感概念抽象,公式繁多,解题困难.为了帮助学生解决上述问题,巩固学习内容,提高复习质量与学习成绩,特编写了这套《高等数学学习指导》.

本书分为上、下两册,共十二章.上册包括七章:函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数,下册包括五章:多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程.每章分四个部分,依次是学习要求、内容提要、基本题型与解题指导、综合练习题.此外,上下册分别配备了四套模拟试题供学生自我测试.书后附有各章综合练习题及模拟试题的参考答案.例题中选用了一定数量的历年来的报考硕士研究生的试题,因此,本书也可作为报考硕士研究生的参考资料.

本书下册由安徽工业大学吴辅山主编.参加编写的有:第八章由施法鹏编写,第九章由徐龙封编写,第十章、各章综合练习题及其答案由郑靖波编写,第十一章、第十二章、模拟试题及其答案由吴辅山编写,全书由吴辅山策划与统一.

限于编者水平,书中一定存在不妥之处,恳请读者批评指正.

编　者

2002 年 9 月

目　　录

第八章　多元函数微分学

一、基本要求

1．理解二元函数的概念，了解 n $(n\geqslant 3)$元函数的概念．

2．了解二元函数的极限与连续性的概念，了解有界闭区域上连续函数的性质．

3．理解二元函数偏导数与全微分的概念，了解全微分存在的必要条件与充分条件．

4．了解一元向量值函数及其导数的概念与计算方法．

5．了解方向导数与梯度的概念及其计算方法．

6．掌握复合函数一阶偏导数的求法，会求复合函数的二阶偏导数（对于求抽象复合函数的二阶偏导数，只要求作简单训练）．

7．会求隐函数（包括由两个方程构成的方程组确定的隐函数）的一阶偏导数（对求二阶偏导数不作要求）．

8．了解曲线的切线和法平面以及曲面的切平面与法线，并会求出它们的方程．

9．理解二元函数极值与条件极值的概念，会求二元函数的极值，了解求条件极值的拉格朗日乘数法，会求解一些比较简单的最大值与最小值的应用问题．

二、基本概念、理论与公式

1．多元函数的定义、极限、连续

二元函数：设 D 为平面点集，若对 D 中每一点 (x,y)，变量 z 都有一确定的实数与之对应，则称 z 是 x,y 的二元函数，记作

$$z=f(x,y) \quad \text{或} \quad z=f(M),\ M=(x,y) \quad (\text{点函数})$$

其中,D 称为函数的定义域,f 称为对应法则,$z=f(x,y)$的图形为三维空间的一组曲面(包括蜕化情形).

二元函数的极限:设 $f(x,y)$定义在平面点集 E 上,$p_0(x_0,y_0)$为 E 的聚点,A 为某一常数.

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$(x,y)\in E$ 并满足 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,恒有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立.

二元函数的连续:设 $f(x,y)$在点 $p_0(x_0,y_0)$的某邻域内有定义,若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$,则称 $f(x,y)$在点 $p_0(x_0,y_0)$处连续.

上述概念可推广到多元函数.

多元函数的定义、极限与连续:

点函数的概念:$z=f(p)$, $p=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E^n\subset R^n$.

多元函数的极限:$\lim\limits_{p\to p_0} f(p)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $p\in E^n$ 并满足 $0<|p-p_0|<\delta$ 时,恒有$|f(p)-A|<\varepsilon$ 成立.

多元函数的连续:设多元函数 $f(p)$在 $p_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$的某邻域内有定义,若$\lim\limits_{p\to p_0} f(p)=f(p_0)$,则称多元函数 $f(p)$在点 p_0 处连续.

2. 多元函数的偏导数、全微分、方向导数与梯度

偏导数:$f_x(x,y)=\dfrac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$,

$$f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

高阶偏导数:

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

全微分：若 $z=f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 的全增量.

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+o(\rho),$$

其中 A、B 是与 $\Delta x,\Delta y$ 无关的常数，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称 $z=f(x,y)$ 在 p_0 点可微，其全微分

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y=f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y.$$

方向导数：函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 p_0 处沿着射线 I 方向的方向导数为

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{p_0}&=\lim_{p\to p_0}\frac{f(p)-f(p_0)}{|pp_0|}\\&=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}\\&=\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\cos\gamma,\end{aligned}$$

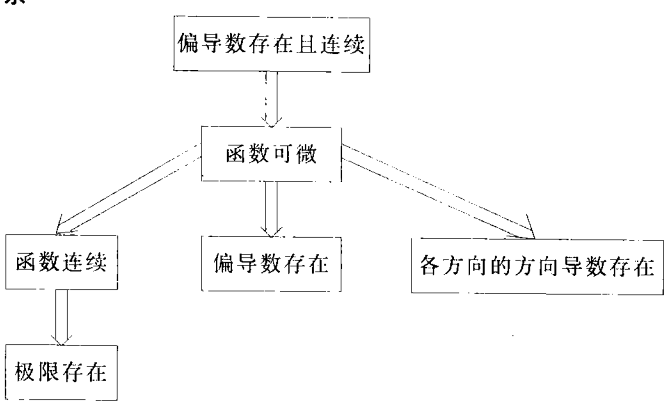
其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为射线 I 的三个方向余弦，

$$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}.$$

梯度：梯度为一向量，$u=f(x,y,z)$ 在点 $p(x,y,z)$ 的梯度为

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}=\{f_x,f_y,f_z\}.$$

3. 多元函数的极限、连续、偏导数、全微分以及方向导数之间的关系



4. 复合函数、隐函数微分法

(1)复合函数微分法

设 $z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 可微，又 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 存在偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 存在偏导数，且

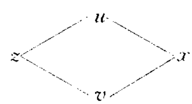
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

几种特殊情形：

$z=f(u,v)$，$u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$，则

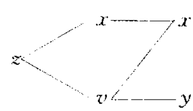
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$



$z=f(x,v)$，$v=\psi(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

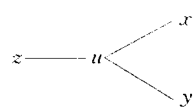
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$



$z=f(u)$，$u=\varphi(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}.$$



(2)隐函数微分法

由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定一个单值连续隐函数 $z=f(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

5. 空间曲线的切线与法平面，空间曲面的切平面与法线

设空间曲线的参数方程为：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，则该曲线在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$（对应 $t=t_0$）处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)};$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

设空间曲面方程为 $F(x,y,z)=0$,则过曲面上 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 点处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(M_0)};$$

若空间曲面方程为 $z=f(x,y)$,则过曲面上 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 点处的切平面方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

6. 多元函数的最大值与最小值

设 $z=f(x,y)$ 是有界闭域 D 上的连续函数,则 $f(x,y)$ 在 D 上一定能取到最大值与最小值,求法如下:

(1) 先求出 $f(x,y)$ 在 D 内的所有极值嫌疑点(即驻点与偏导数不存在的点);

(2) 再求出 $f(x,y)$ 在 D 的边界上取得最大值、最小值的嫌疑点;

(3) 算出上述嫌疑点的函数值,并比较大小,即得 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值与最小值.

7. 条件极值

函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值称为条件极值. 求条件极值的方法如下:

(1) 化为无条件极值

若能从条件 $\varphi(x,y)=0$ 解出 y 或 x 代入函数 $f(x,y)$ 中,使 $z=f(x,y)$ 成为一元函数的无条件极值问题.

(2) 拉格朗日乘数法 ——条件极值的必要条件

作拉格朗日函数

$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ (λ 为参数,称为拉格朗日乘

数），

解方程组

$$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda)=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ L_y(x,y,\lambda)=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ L_\lambda(x,y,\lambda)=\varphi(x,y)=0, \end{cases}$$

求出 λ,x,y 的值，则驻点 (x,y) 可能是条件极值点.

三、基本题型与解题指导

1. 二元函数的表达式及定义域

例 8.1 （1）若 $f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{2}{y}\right)=\dfrac{y^2-4x^2}{4xy}$，求 $f(x,y)$；

（2）设 $u(x,y)=y^2\cdot F(3x+2y)$ 且满足 $u\left(x,\dfrac{1}{2}\right)=x^2$，求 $u(x,y)$.

解 （1）令 $u=\dfrac{1}{x},v=\dfrac{2}{y}$，则 $x=\dfrac{1}{u},y=\dfrac{2}{v}$，于是

$$f(u,v)=\frac{\left(\dfrac{2}{v}\right)^2-4\left(\dfrac{1}{u}\right)^2}{4\cdot\dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{2}{v}}=\frac{u^2-v^2}{2uv},$$

所以 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$.

（2）由 $u(x,y)=y^2\cdot F(3x+2y)$ 及 $u\left(x,\dfrac{1}{2}\right)=x^2$，有

$$u\left(x,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}F(3x+1)=x^2,\text{即 } F(3x+1)=4x^2.$$

设 $t=3x+1$，或 $x=\dfrac{t-1}{3}$，于是 $F(t)=4\left(\dfrac{t-1}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}(t-1)^2$，

从而 $$F(3x+2y)=\frac{4}{9}(3x+2y-1)^2,$$

因此 $$u(x,y)=\frac{4}{9}y^2(3x+2y-1)^2.$$

例 8.2 求下列函数的定义域：

(1) $z=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$； (2) $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\ln(1-\sqrt{y})$.

解 (1) 因为 $1-(x^2+y)^2\geqslant 0$ 时，函数 z 才有意义，所以函数 z 的定义域为 $-1\leqslant x^2+y\leqslant 1$. 即 $-(1+x^2)\leqslant y\leqslant 1-x^2$.

它的图形是由抛物线 $y=-(1+x^2)$ 的上方(包括抛物线 $y=-(1+x^2)$ 上的点)，和抛物线 $y=1-x^2$ 的下方(包括抛物线 $y=1-x^2$ 上的点)所围成图形的公共部分，如图 8—1 阴影部分所示.

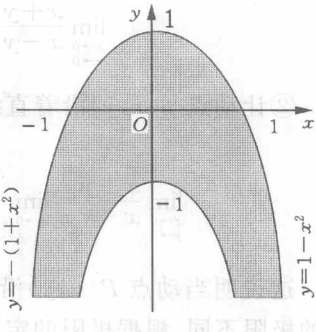


图 8—1

(2) 当 $\left|\dfrac{x}{y^2}\right|\leqslant 1$ 且 $y\neq 0$ 和 $1-\sqrt{y}>0$ 且 $y\geqslant 0$ 时，函数 z 才有意义，所以函数 z 的定义域为满足下列不等式的平面点集，

即 $\begin{cases}\left|\dfrac{x}{y^2}\right|\leqslant 1 \text{ 且 } y\neq 0,\\ 1-\sqrt{y}>0 \text{ 且 } y\geqslant 0.\end{cases}$

亦即当 $x\geqslant 0$ 时，

$$\begin{cases}y^2\geqslant x,\\ 0<y<1;\end{cases}$$

当 $x<0$ 时，

$$\begin{cases}y^2\geqslant -x,\\ 0<y<1.\end{cases}$$

它的图形是由抛物线 $y^2=x$ 和 $y^2=-x$ 的上方(包括抛物线 $y^2=x$ 和 $y^2=-x$ 上的点，但不包括 $y=0$ 的点)和直线 $y=1$ 的下方(不包括

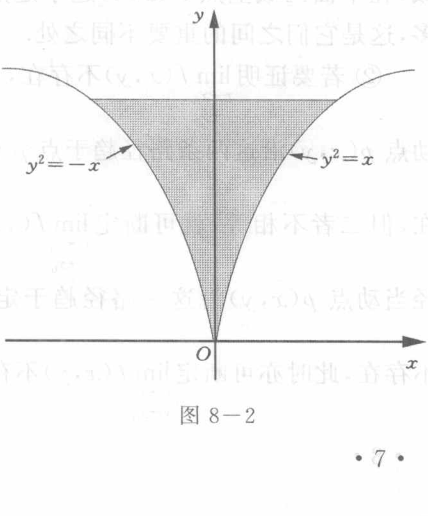


图 8—2

直线上的点)所组成的部分，如图 8—2 阴影部分所示.

2. 二元函数的极限

例 8.3 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$不存在.

证 ①让动点 $P(x,y)$沿着 x 轴即 $y=0$ 趋于点(0,0)时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+0}{x-0}=1.$$

②让动点 $p(x,y)$沿着直线 $y=\dfrac{x}{3}$趋于点(0,0)时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=\frac{x}{3}}}\frac{x+\frac{x}{3}}{x-\frac{x}{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{3}x}{\frac{2}{3}x}=2.$$

这说明当动点 $P(x,y)$沿着两条不同路径趋于点(0,0)时，所得的极限不同，根据极限的定义知，原极限不存在.

评注 ① 一元函数 $y=f(x)$的极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，由于 $f(x)$的定义域是 x 轴上的某一区间，所以 x 趋于 x_0 的方式只能沿 x 轴左右无限趋近；而二元函数 $z=f(x,y)$的定义域是 xOy 平面上的某区域，在平面区域上点 $P(x,y)$趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$的方式要复杂的多，这是它们之间的重要不同之处.

② 若要证明$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$不存在，只要找到两条不同的路径，当动点 $p(x,y)$沿这两条路径趋于点 $p_0(x_0,y_0)$时，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$虽然存在，但二者不相等，就可断定$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$不存在；或者找到某一路径当动点 $p(x,y)$沿这一路径趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$，使$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$不存在，此时亦可断定$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$不存在.

③ 求 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$，只要 $f(x,y)$ 在某一个集 E 上有定义，$P_0(x_0,y_0)$ 为 E 的聚点，$P(x,y)\in E$，就可以研究 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的极限问题.

求多元函数的极限，常采用下面例子中的方法.

例 8.4 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\dfrac{y+e^x}{x^2+y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{y}$；　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}$；

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\y\to \infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4y^4}$.

解 (1) 因为函数 $\dfrac{y+e^x}{x^2+y^2}$ 在点 $(0,1)$ 连续，根据连续函数的定义有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\frac{y+e^x}{x^2+y^2}=\frac{1+e^0}{0^2+1^2}=2.$$

(2) 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)=0$，而 $\left|\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1$，所以根据有界函数与无穷小乘积的性质有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)\cdot\cos\frac{1}{x^2+y^2}=0.$$

(3) 令 $xy=u$，则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{\sin xy}{y}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot x=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}x=1\cdot 0=0.$$

(4) 原极限属“$\dfrac{0}{0}$”型，由于

$$\frac{x^2+y^2}{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}=\frac{(x^2+y^2)\cdot(1+\sqrt{1+x^2+y^2})}{1-(\sqrt{1+x^2+y^2})^2}$$