清华21世纪高等职业经济管理专业系列教材

线性代数与线性规划应用基础

许毅　崔晓华　主编

清华大学出版社

清华21世纪高等职业经济管理专业系列教材

线性代数与线性规划应用基础

许毅　崔晓华　主编

清华大学出版社

北京

内容简介

本书是高职高专院校管理类及经济类专业的基础课教材。为适应教育部"应用为目的，必须够用为度"的教学要求，在听取专业课教师意见的基础上，编写了这本《线性代数与线性规划应用基础》。全书分七章，内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、投入产出数学模型、线性规划问题、单纯形解法和对偶问题，以及数学实验。不同学校、不同专业可以根据其教学要求自行选择教学内容。本书语言叙述通俗、简练，富有启发性；知识背景交代清楚，难点分散；关键之处均提醒读者注意或思考；每章后配有本章小结、基本概念、思考与训练，书后配有习题答案。

本书既便于教，又便于学，适合专科层次的读者学习使用，是高等职业教育一本较好的"线性代数"教材和教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与线性规划应用基础/许毅，崔晓华主编. —北京：清华大学出版社，2008.8
(清华21世纪高等职业经济管理专业系列教材/刘进宝主编)
ISBN 978-7-302-18133-0

Ⅰ.线…　Ⅱ.①许…②崔…　Ⅲ.①线性代数—高等学校：技术学校—教材…②线性规划—高等学校：技术学校—教材…　Ⅳ.O151.2　O221.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第103034号

责任编辑：徐学军
责任校对：王凤芝
责任印制：杨　艳
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：山东新华印刷厂临沂厂
经　销：全国新华书店
开　本：185×260　**印　张**：11　**字　数**：253千字
版　次：2008年8月第1版　**印　次**：2008年8月第1次印刷
印　数：1～5000
定　价：19.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177转3103　产品编号：030278—01

总　　序

在21世纪中国经济走向全球的时代，我们不但需要大批高素质的理论人才，更需要大批高素质技能型人才。高等职业教育是我国高等教育的重要类型，主要培养生产、建设、管理、服务等第一线亟需的高素质技能型人才，具有周期短、实用性强、针对性强、文化层次与我国国民经济发展水平适用度高，教育投资效率高等优势。

教材建设是高等学校基本的教学建设之一，是学科建设的主要组成部分。教材作为体现教学内容和教学方法的知识载体，无疑是承载教学改革种种思路并传导至教学对象的主要方面，因此是体现高等职业教育特色可选择的首要改革路径。对此，一线教师在多年的教学实践中深有感触。长期以来，在教学中使用本科教材或本科院校编写的高等职业教育教材时，深感现有教材不能适用教学工作的实际需要，教材上的许多内容教学当中不需要，而需要讲的内容却不在教材当中，主讲教师需要进行多本教材的综合提炼，极大地影响了教学效率和教学效果。由于高等职业教育是我国高等教育当中的一个新的类型，教材建设成为一个瓶颈问题。

基于以上认识，我们开始探索高等职业经济管理类专业教材建设。在清华大学出版社的大力支持下，包括原张家口农业高等专科学校、郑州牧业工程高等专科学校、洛阳农业高等专科学校等14所高等职业院校共同合作，2002年由清华大学出版社出版了"高职高专经济管理类系列教材"，教材出版发行后，受到教材使用单位的普遍好评，其中《管理学原理》一书截至2006年6月印刷、发行60 000册。由于首次教材编写获得成功，2007年年初，和清华大学出版社共同协商，决定对前次出版教材进行修订，同时再新编一批教材。

本套教材主要满足高等职业教育相关专业的教学需求，同时也可以用于实际工作者的技能培训。教材编写以先进性、适用性、针对性为主导原则，突出了高等职业教育培养技术应用人才的办学特色，教材体系简明精练，理论选择深浅适度、范围明确，不求面面俱到；内容削枝强干，强化应用性、实践性、可操作性，削减抽象的纯概念阐述和繁复的模型推演。在此基础上，教材具有如下特色：

1. 摒弃"本科压缩型"教材模式，构建高职高专教材自成体系。我国高等职业教育发展历史短，其教材长期以来由本科院校的教授们编写，具有较高的理论水平、完善的理论体系和系统的知识结构，和本科教材在形式上、结构上和内容上没有太大的差异，不适应高等职业教育教学的需要。本系列教材以培养学生的实际操作技能为主线，教材编写上要求理论和实践相结合，以实践为主，强调理论够用；一般内容教学和案例教学相结合，加强案例教学内容；课堂教学和课外练习思考相结合，强化课外思考。

2. 教材内容简明易懂。针对目前我国的高等教育由传统的精英教育转向大众化教育后，高职高专学生素质的变化，高等职业教育教材建设努力做到理论简明且通俗易懂，

实际操作技能过程程序化，以便于学生更好的接受和掌握。

3. 适应快速变化的国民经济环境对教材建设的要求。经济管理在我国各学科专业当中是一门新兴专业学科，它与我国政治经济的发展紧密相关联。最近 20 多年来是我国政治经济发展最快的一个时期，我国由传统的计划经济体制转向了全面建设社会主义市场经济体制，这就要求经济管理的教材建设必须与之相适应；我国加入 WTO 以来，经济、文化快速融入国际经济体系，这就要求我们在教材编写当中将国际规则融入教材内容当中。

为出版本套教材，清华大学出版社的编辑人员和相关人员付出了极大辛苦。在本套教材编写组织过程中得到了河北北方学院领导的大力支持，在此表示衷心感谢。

刘进宝

2007 年 8 月 16 日

前　言

随着我国社会经济的发展，职业技术人才需求量越来越大，职业教育规模迅速扩大，国家对职业教育的扶持力度明显加大，高职高专院校也迎来了良好的发展时期。高职高专教材的需求量也越来越大。但是，目前适合于职业教育的教学用书存在着品种单一、版本陈旧的问题，需要尽快推出一系列高质量优秀的高职高专教材。正是在这种形势下，我们在总结多年的高职高专数学教学经验、探索高职高专数学教学的发展动向、分析国内外同类教材发展趋势的基础上编写出经济类高职高专各专业使用的《线性代数与线性规划应用基础》一书。

本书是按照“以应用为目的、以必须够用为度”的原则，以“理解基本概念、掌握运算方法及应用”为依据，参考高职高专《经济数学基础课程教学基本要求》，结合数学改革的实际经验编写的。教材注意从实际问题中引入概念；注意把握好理论推导的深度；注重基本运算能力、分析问题和解决问题能力的培养；贯彻理论联系实际和启发式教学原则；深入浅出，通俗易懂，便于教师教授和读者自学。

该书由许毅、崔晓华主编，赵建玲、赵红海、张艳红和刘忠诚任副主编。

本书共分七章。第一至第三章分别由崔晓华、赵红海、赵建玲执笔，第四、七章由许毅执笔，第五、六章分别由刘忠诚、张艳红执笔，全书由许毅统稿。

限于编者水平有限，本书中疏漏与不当之处在所难免，恳请同行及广大读者指正。

作　者

2008 年 3 月

目　　录

第一章　行列式……………………………………………………… 1
　第一节　行列式的概念……………………………………………… 1
　第二节　行列式的性质……………………………………………… 8
　第三节　行列式按行(列)展开 …………………………………… 13
　第四节　克莱姆法则 ……………………………………………… 17
　　　　　本章小结 ……………………………………………… 22
　　　　　基本概念 ……………………………………………… 22
　　　　　思考与训练(一) ……………………………………… 22

第二章　矩阵 ……………………………………………………… 26
　第一节　矩阵的概念 ……………………………………………… 26
　第二节　矩阵的基本运算 ………………………………………… 29
　第三节　逆矩阵 …………………………………………………… 36
　第四节　分块矩阵 ………………………………………………… 42
　第五节　矩阵的初等变换 ………………………………………… 49
　第六节　矩阵的秩 ………………………………………………… 55
　　　　　本章小结 ……………………………………………… 58
　　　　　基本概念 ……………………………………………… 58
　　　　　思考与训练(二) ……………………………………… 58

第三章　线性方程组 ……………………………………………… 62
　第一节　线性方程组的一般解法 ………………………………… 63
　第二节　n 维向量 ………………………………………………… 67
　第三节　向量组的秩 ……………………………………………… 73
　第四节　线性方程组解的结构 …………………………………… 76
　　　　　本章小结 ……………………………………………… 83
　　　　　基本概念 ……………………………………………… 84
　　　　　思考与训练(三) ……………………………………… 84

第四章　投入产出数学模型 ……………………………………… 88
　第一节　投入产出模型 …………………………………………… 88
　第二节　直接消耗系数 …………………………………………… 90
　第三节　平衡方程组的解法 ……………………………………… 91
　第四节　完全消耗系数 …………………………………………… 94

本章小结 …… 98
基本概念 …… 98
思考与训练(四) …… 98

第五章 线性规划问题 …… 100
第一节 线性规划问题的概念 …… 100
第二节 线性规划问题的数学模型 …… 102
第三节 两个变量线性规划问题的图解法 …… 105
本章小结 …… 110
基本概念 …… 111
思考与训练(五) …… 111

第六章 单纯形解法和对偶问题 …… 113
第一节 线性规划问题的标准形式 …… 113
第二节 单纯形解法的原理 …… 116
第三节 对偶线性规划 …… 124
第四节 对偶线性规划的经济意义 …… 131
本章小结 …… 134
基本概念 …… 135
思考与训练(六) …… 135

第七章 数学实验 …… 137
第一节 用 Maple 作线性代数 …… 137
第二节 用 LINDO 作线性规划 …… 148
本章小结 …… 158

参考答案 …… 159

第一章

行 列 式

在线性代数的研究中,行列式是一个十分有力的工具.本章是在回顾二阶、三阶行列式的基础上,引出 n 阶行列式的概念,并介绍行列式的一些基本性质及其计算方法.最后给出用 n 阶行列式求解线性方程组的一种方法——克莱姆法则.

第一节

行列式的概念

一、二阶、三阶行列式的概念

在中学数学中,已通过解二元、三元线性方程组引出了二阶、三阶行列式的概念,在此我们对其进行简单地复习.

(一) 二阶行列式

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示的代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为二阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.1}$$

其中元素 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 的两个脚标 i 与 j 分别表示这个元素所在的行与列的序数,分别称为它的行标与列标.

二阶行列式表示的代数和可以用画线(图 1-1)的方法记忆,即实线联结的两个元素的乘积减去虚线联结的两个元素的乘积.

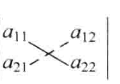

图 1-1

例 1.1 $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 3\times7-5\times(-2)=31$

例 1.2 设 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}\lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1\end{vmatrix}$

问：(1)λ 为何值时，$\boldsymbol{D}=0$；(2)λ 为何值时，$\boldsymbol{D}\neq 0$.

解：

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}\lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda$$

$$\lambda^2-3\lambda=0\text{，则 }\lambda=0\text{ 或 }\lambda=3$$

因此，

(1) 当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时，$\boldsymbol{D}=0$.

(2) 当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 3$ 时，$\boldsymbol{D}\neq 0$.

（二）三阶行列式

我们用记号

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

表示的代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ 称为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1.2)$$

三阶行列式表示的代数和，也可以用画线(图 1-2)的方法记忆，其中各实线联结的 3 个元素的乘积在代数和中取正号，各虚线联结的 3 个元素的乘积在代数和中取负号.

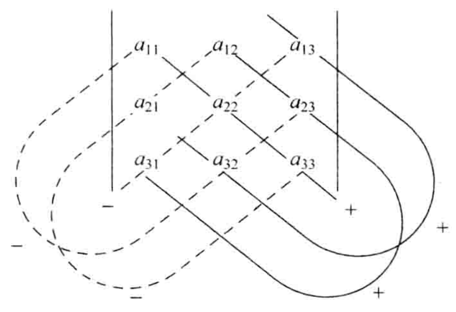

图 1-2

例 1.3 求三阶行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2\end{vmatrix}$ 的值.

解：

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2\end{vmatrix}=1\times 1\times 2+2\times(-1)\times 1+1\times(-2)\times(-4)$$
$$-1\times(-1)\times(-4)-2\times(-2)\times 2-1\times 1\times 1=11$$

例 1.4 a、b 满足什么条件时，有

$$\begin{vmatrix} a & -b & 1 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

解：因为

$$\begin{vmatrix} a & -b & 1 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2$$

所以要使 $a^2+b^2=0$，则必有 a 与 b 同时等于 0，因此，当 $a=b=0$ 时，给定的行列式等于 0.

二、n 阶行列式的概念

为了把二阶和三阶行列式推广到 n 阶行列式(其中 n 是任意给定的正整数)，然后利用这一工具给出解含有 n 个未知量 n 个方程的一类线性方程组的克莱姆法则. 为了达到这一目的，我们需要分析二阶和三阶行列式展开式的规律，然后根据这一规律引出 n 阶行列式的概念.

在二阶和三阶行列式的展开式中，除了其他现象外，都有以下现象：有的项带正号，有的项带负号，这种符号规律不是很容易看出来的，我们将利用排列给出符号的规律. 为此首先需要对排列及其相关性质作进一步讨论.

(一) 排列与逆序

定义 1.1　由 n 个不同数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$，称为一个 n 级排列.

例如，1234 和 4132 是两个 4 级排列，31452 是一个 5 级排列.

定义 1.2　在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果较大的数码 i_t 排在了较小数码 i_s 之前 $(i_t>i_s)$，则称 i_t 与 i_s 构成了一个逆序. 在一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数. 排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

定义 1.3　逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如，排列 4132 中，4 在 1 前面，4 在 3 前面，4 在 2 前面，3 在 2 前面，共有 4 个逆序，即 $\tau(4132)=4$，所以 4132 为偶排列.

再如，由 1，2，3 这 3 个数码组成的 3 阶排列共有 $3!=6$ 个. 其排列情况如表 1-1 所示.

表　1-1

排列	逆序	逆序数	排列的奇偶性
123	无	0	偶排列
132	(32)	1	奇排列
213	(21)	1	奇排列
231	(21)，(31)	2	偶排列
312	(31)，(32)	2	偶排列
321	(21)，(31)，(32)	3	奇排列

n 级排列共有 $n!$ 个. 事实上，在作 n 个数码的一个排列时，第一个位置的数码可以从 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数码中任取一个，有 n 种取法；当第一个位置取定之后，第二个位置的数码只能在剩下的 $n-1$ 的数码中选取，有 $n-1$ 种取法；类似地，第三个位置上的数码只有 $n-2$ 种取法；……；第 n 个位置上的数码只有 $n-(n-1)=1$ 种取法. 因此，一共可以得到 $n(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$ 个不同的排列.

给定一个 n 级排列后，我们可以按下面的方法计算它的逆序数：先看看有多少个数码排在 1 前面，设有 l_1 个，那么就有 l_1 个数码与 1 构成逆序；然后把 1 划掉，看看有多少个数码排列在 2 的前面，设有 l_2 个，那么就有 l_2 个数码与 2 构成逆序；再把 2 划掉，再看看有多少个数码排列在 3 的前面. 这样继续下去，直到计算出 l_n（显然 $l_n=0$），于是这个排列的逆序数为：$l_1+l_2+\cdots+l_n$.

例如，在排列 31542 中，$l_1=1,l_2=3,l_3=0,l_4=1,l_5=0$，所以 $\tau(31542)=5$.

定义 1.4 把一个排列中的两个数码互换位置，其余数码不动，便得到一个新的排列，对于排列所施行的这种变换叫做对换.

如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 经过对换 (i,j) 两个数码后，得到排列 $j_1j_2\cdots j_n$，就记作：

$$i_1i_2\cdots i_n \xrightarrow{(i,j)} j_1j_2\cdots j_n$$

例如
$$3412 \xrightarrow{(1,3)} 1432 \xrightarrow{(2,4)} 1234$$

不难看出，任意一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 经过一系列对换以后总可以化为排列 $12\cdots n$. 进一步我们有

定理 1.1 任意一个排列经过一次对换后奇偶性改变.（或：对换改变排列的奇偶性）.

证明 分以下两种情形进行讨论.

(1) 首先讨论对换相邻两个数码的特殊情形，设给定的排列为：

$$AijB$$

其中 A,B 表示那些不动的数码，经过对换 (i,j) 变为排列：

$$AjiB$$

比较上面两个排列中的逆序，显然 A,B 中数码的次序没有改变，并且 i,j 与 A,B 中的数码次序也没有改变，这两个排列中所不同的只是 i 与 j 的次序，如果 $i<j$，那么新排列的逆序数就增加一个；如果 $i>j$，那么新排列的逆序数则减少了一个，从而它们的奇偶性发生相反的变化.

(2) 在一般情况下，设原排列为：

$$Aik_1k_2\cdots k_sjB \tag{1.3}$$

先让 i 向右移动，依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 对换，这样经过 s 次相邻两个数码的对换后，原排列变为：

$$Ak_1k_2\cdots k_sijB \tag{1.4}$$

再让 j 向左移动，依次与 $i,k_s,\cdots,k_2,k_1$ 对换. 这样经过 $s+1$ 次相邻两个数码的对换后，上述排列变为：

$$Ajk_1k_2\cdots k_siB \tag{1.5}$$

乘积(1.5)恰好是乘积(1.3)经过对换(i,j)后而得到的排列，即新排列可以由原排列经过 $2s+1$ 次相邻数码的对换得到. 由证明(1)的结论可知它改变了奇数次奇偶性，所以它与原排列的奇偶性相反.

定理 1.2 $n\geqslant 2$ 时，全体 n 级排列中，奇偶各占一半.

证明 设在 $n!$ 个 n 级排列中，有 p 个奇排列，q 个偶排列. 由定理 1，对这 p 个奇排列施行同一个交换(i,j)后得到 p 个偶排列. 由于这 p 个偶排列彼此不同，于是有 $p\leqslant q$；同样也有 $q\leqslant p$，所以 $p=q$，即奇偶排列数相等，各为$\frac{n!}{2}$个.

例如，对于 3 级排列，见表 1-1，奇偶排列各 3 个.

(二) n 阶行列式

有了上面的准备工作，我们可以对二阶、三阶行列式作进一步研究，从而得出它的结构规律，然后再利用这些规律来定义 n 阶行列式.

由于二阶行列式非常简单，所以我们只对三阶行列式进行研究. 不难看出，三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

具有如下特点：

(1) 项数：它是 $3!=6$ 项的代数和；

(2) 每一项构成：展开式中的每一项都是位于不同行不同列的 3 个元素的乘积，其一般项可以表示为：

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中行标成自然排列 123，$j_1j_2j_3$ 为列标排列，当 $j_1j_2j_3$ 取遍 3 级排列时，所有位于不同行不同列的 3 个元素的乘积都在展开式中出现，即所有形如 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的乘积(其中 $j_1j_2j_3$ 为任意 3 级排列)都在展开式中出现.

(3) 每一项的符号规律：3 个取正号的项对应的列标的排列分别为 123，231，312，它们都是偶排列；3 个取负号的项的列标的排列分别为 132，213，321，它们都是奇排列. 因此当 $j_1j_2j_3$ 为偶排列时取正号；为奇排列时取负号. 因此三阶行列式可以写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中，$\sum$ 为连加号，$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示把所有形如$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的项加起来，这里 $j_1j_2j_3$ 取遍所有 3 级排列.

分析如下二阶行列式也有完全类似的规律，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

根据这一规律，可以给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.5 用 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它是 $n!$ 项的代数和，这些项是所有可能取自既不同行也不同列的 n 个元素的乘积，其一般项可以写成：

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

此项前所取的符号是 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，即当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，这一项前取正号；为奇排列时取负号，亦即

$$\boldsymbol{D}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中，$\sum$ 为连加号，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示把所有形如 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的项加起来，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有 n 级排列.

特别地，当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|$ 就是 a.

以 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为元素的 n 阶行列式有时简记为 $|a_{ij}|_n$ 或 $|a_{ij}|$.

例如四阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

所表示的代数和中有 $4!=24$ 项. 其中 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 是取自既不同行也不同列的 4 个元素的乘积，是 $\boldsymbol{D}$ 的一项，且逆序数 $\tau(1234)=0$，即这项前应冠以正号. 并且，$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 是取自于 $\boldsymbol{D}$ 中不同行不同列的 4 个元素的乘积，行标排列为自然排列，列标排列的逆序数 $\tau(4312)=5$，所以这项前应冠以负号，即 $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 为 $\boldsymbol{D}$ 的一项. $a_{11}a_{24}a_{33}a_{44}$ 有 2 个元素取自第四列，所以它不是 $\boldsymbol{D}$ 的一项.

例 1.5 求下列行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

的值.

解：依照定义

$$\boldsymbol{D}=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

是 $4!=24$ 项的代数和，因为原行列式中有许多零元素，这表明 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 中有许多项应等于零. 于是只要把不为零的项求出来便可以了. 然而在 $\boldsymbol{D}$ 的展开式中，除 $a_{11}a_{22}a_{33}$

a_{44}，$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$，$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$这四项外，其他项都含有零因子，因而它们的乘积为零.

又因为它们的列标排列依次为 1234，1324，4321，4231，其中第一个和第三个为偶排列，第二个和第四个为奇排列，所以

$$\boldsymbol{D} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}.$$

例 1.6 计算 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值，其中 $a_{ii} \neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$.

解：由定义容易看出：$\boldsymbol{D}$ 的项除了 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 以外，其余的项均为零. 由于排列 $12\cdots n$ 是个偶排列，所以这一项应取正号，于是

$$\boldsymbol{D} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

我们称上面形式的行列式为下三角形行列式.

同理可得上三角形行列式

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

其中 $a_{ii} \neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$.

作为上（下）三角形行列式的特殊情形，我们有

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这种行列式称为对角形行列式.

行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线，上（下）三角形行列式及对角形行列式的值，均等于对角线上诸元素的乘积. 这一结论在以后的行列式的计算中可直接应用.

由行列式的定义不难看出：一个行列式若有一行（或一列）的元素全部为零，则该行列式的值必为零.

n 阶行列式定义中决定各项符号的规则还可以由下面的结论来确定.

定理 1.3 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 的项

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.6}$$

前面所取的符号是$(-1)^{s+t}$,其中,$s=\tau(i_1i_2\cdots i_n)$,$t=\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

证明 如果交换乘积(1.6)中某两个因子的位置,则相当于对排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 同时施行一次对换,于是所得的排列的奇偶性同时改变,但是对换一次后,其行、列标排列逆序数之和的奇偶性不变.由于排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 总可经过有限次的对换变成自然排列 $12\cdots n$,设此时列标排列变为 $k_1k_2\cdots k_n$,则乘积(1.6)变为

$$a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$$

于是 $s+t$ 与 $\tau(12\cdots n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)=\tau(k_1k_2\cdots k_n)$有相同的奇偶性,因为

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}=a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$$

所以,这$|a_{ij}|$项前所取的符号为

$$(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}=(-1)^{s+t}.$$

第二节

行列式的性质

如果用定义直接计算一个 n 阶行列式,就要计算 $n!$ 项的代数和,而每一项又是 n 个元素的乘积,而随着 n 的增大,$n!$ 会急剧地增大,所以直接由定义计算一个 n 阶行列式是非常麻烦的.本节将要探讨行列式的某些基本性质,利用这些性质可以使行列式的计算大大简化.

定义 1.6 把 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行依次变为列得到的行列式称为 $\boldsymbol{D}$ 的转置行列式,记为 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{D}'$,即

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

显然,D 的第 i 行第 j 列的元素是 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 的第 j 行第 i 列的元素.

下面我们介绍行列式的一些基本性质.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$.

证明 设 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 是 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}=|a_{ij}|$的一项.由于它的 n 个元素位于 $\boldsymbol{D}$ 的不同行不同列,所以也位于 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 的不同行不同列,从而它也是 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 的一项.由定理 3 可知,无论在 $\boldsymbol{D}$ 中还是在 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 中,这一项所取的符号都是$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.因此 $\boldsymbol{D}$ 的任一项都是