学 术 著 作 丛 书

Spline Functions and Reproducing Kernels

样条函数与再生核

张新建 龙 汉 著

国防科技大学出版社

样条函数与再生核

张新建　龙　汉　著

国防科技大学出版社
湖南·长沙

图书在版编目(CIP)数据

样条函数与再生核/张新建,龙汉著.—长沙:国防科技大学出版社,2008.1

ISBN 978-7-81099-460-6

Ⅰ.样…　Ⅱ.①张…②龙…　Ⅲ.①样条函数　②核空间
Ⅳ.O241.5　O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 169689 号

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4572640　邮政编码:410073
http://www.gfkdcbs.com
责任编辑:耿　筠　责任校对:唐卫葳
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装

*

开本:850×1168　1/32　印张:8.25　字数:214 千
2008 年 1 月第 1 版第 1 次印刷　印数:1-1500 册
ISBN 978-7-81099-460-6
定价:26.00 元

前 言

样条函数的系统研究始于1946年Schoenberg的长篇论文.对样条函数接触不多的人,样条函数给他的印象也许只是常见的三次样条,只是具体数值计算的一个工具.事实上,即使在20世纪70年代就已成熟的经典样条理论——(一元)多项式样条理论也是相当丰富而深刻的.形成于1980年代以前而在这以后得到迅速发展的还有多元样条、参数样条曲线(曲面)、Hilbert空间抽象样条等领域.每一个领域都取得了极丰富的理论和应用成果,且还在继续发展着.样条函数以其独特的局部性和良好的逼近性,不仅在数据拟合、函数逼近、数值积分、微分与积分方程数值解和线面造型设计等方面有着广泛的应用,而且还与有限元、小波分析、最优控制有着密切的联系.抽象样条理论表明,各种(插值或光顺)样条函数可以统一描述成相应的Hilbert空间在其一类有限维子空间上的投影,而且由这种投影引人的样条插值算子与最佳插值逼近算子是一致的.因此,样条理论为Hilbert空间结构和算子方程求解的研究提供了新的方法.

核函数的概念最初来源于积分算子理论,它们通常是具有正定对称性的二元函数$K(t,s)$.在各种核函数的研究和应用中,人们逐渐认识到:一个二元函数$K(t,s)$具有正定对称性和存在一个函数型Hilbert空间使得$K(t,s)$对该空间具有再生性,两者是等价的.这就启发人们将再生性作为核函数的本质属性进行研究.1950年,Aronzajn发表的长篇论文标志着再生核理论的诞生.随后,再生核在积分方程、偏微分方程边值问题、复变函数和奇异积

分等方面有重要的应用.1980 年代以来,随着具体再生核空间中再生核的表示和函数逼近的研究,使得再生核为数值分析带来了全新的理论和方法,并在积分和微分方程解的精确表示和近似计算中取得了不少成果.目前,再生核方法已渗透到了许多研究领域,例如信号处理、随机估计、神经网络、小波变换和调和分析等.

早在 1966 年,De Boor 就用再生核来证明样条插值是适当的 Hilbert 空间中的正交投影过程.在 20 世纪 70 和 80 年代,Weinert 和 Wahba 等通过再生核使得(插值与光顺)样条和随机过程发生了联系,由此不仅建立了样条函数的随机递推算法,更为重要的是开辟了统计学的一个新分支——概率统计中的样条函数方法,取得了丰硕的成果.研究还表明插值或光顺样条可以表示成再生核的线性组合.著名统计学家 J.O.Ramsay 和 B.W.Silverman 于 2005 年在他们的著作"Functional Data Analysis"中指出:从 70 年代以来,再生核在样条函数理论中扮演着核心的角色.但是,国内的研究工作很少体现样条函数与再生核的密切结合,本书的目的之一是试图能稍许弥补这一缺陷.

本书较为系统地介绍了样条函数与再生核的基础理论,在样条函数的基础部分着重介绍了 B-样条和 LB-样条的构造和递推性;系统地研究了多项式再生核与微分算子再生核的构造和计算,对一类常系数微分算子确定的再生核的计算进行了详细讨论;用再生核方法证明了自然 L-插值样条的连续性质,给出了自然 L-插值与光顺样条的递推算法;提出了由可逆线性系统确定的算子样条的概念,详细研究了这类算子样条的性质,使得奇次样条和自然 L-样条都成为这类算子样条的特例;讨论了微分算子样条的最佳逼近性和再生核空间中线性泛函的最佳逼近;在抽象 Hilbert 空间中研究了抽象算子样条,并由此讨论了算子方程的插值逼近解及误差估计;在抽象 Hilbert 空间中探讨了抽象算子光顺样条,提出了算子方程光顺逼近解的概念,给出了算子方程光顺逼近

解的表示和误差估计.

本书除了样条函数与再生核的基础理论(主要有第1章、3.6节、第4章、第5章的前三节)部分外,其余部分的主要结果来自于作者多年的研究工作.由于有些研究工作尚不够完善,且作者水平有限,再加上整理成书的时间比较仓促,错误在所难免,请读者批评指正.作者希望,本书的出版不仅是对以往工作的回顾,而且是今后继续研究的基础.

作者在多年的研究中,先后几次得到国防科技大学科研基金的资助,本书的出版也得到国防科技大学基础研究基金的支持.作者的研究工作曾一直得到王正明教授、朱健民教授的理解和鼓励,得到冯良贵、成礼智、谢政、宋松和等教授的支持和帮助.作者在研究工作的初期与方逵教授、朱健民教授和黄建华博士有过合作,这些合作给作者留下了愉快的回忆.我的学生江悦和张伟也为本书的形成做过一些工作.作者对以上的单位和个人一并表示衷心的感谢!还要感谢国防科技大学出版社为本书的出版所付出的辛勤劳动.

张新建

2008年1月于长沙

目　录

第 3 章　微分算子确定的再生核

第 4 章　多项式样条函数

第 5 章 微分算子样条函数

第 6 章 可逆线性系统及其确定的再生核与算子样条

第 1 章　再生核的基本理论

本章，简要回顾再生核概念的发展过程，并介绍再生核的一些基本结论. 关于再生核基本知识的更详细的论述及有关证明，可参阅文献[46 - 47,41].

1.1　再生核的发展概要

从上世纪初至 50 年代，沿着两条路径孕育了再生核理论. 第一条路径是对于某一给定的核研究其本身的性质及其可能的应用. 第二条路径是对于给定的一个函数空间，寻找这个函数空间对应的再生核的构造和计算.

第一条路径肇始于由 Hilbert 提出的积分方程理论，所考虑的核是正定积分算子的连续核. 这一理论由 Mercer[34] 以“正定核”的名称得到了发展，且在上世纪 20 年代被一些研究积分方程的学者所引用. Mercer 发现积分方程的连续核 $K(t,s)$ 具有正定性：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K(t_i,t_j)\overline{c_i}c_j \geqslant 0. \tag{1.1.1}$$

即 $K(t,s)$ 是正定二次型函数. 后来，Moore[35] 在抽象集上研究了具有正定性的二次型函数，证明了每个正定二次型 $K(t,s)$ 对应着一个由函数构成的具有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的 Hilbert 空间 H，使 $K(t,s)$ 具有再生性质：

$$\langle f(\cdot), K(\cdot, t)\rangle = f(t), \quad f \in H. \tag{1.1.2}$$

这一发现可以说是孕育再生核理论的两条路径的一次交汇.

上世纪 30 年代 Bochner[9] 研究了满足(1.1.1)式的形如 $K(t, s) = \Phi(t - s)$ 的核,称为"正定函数",其中 $\Phi(t)$ 是实变量 t 的连续函数.他将这种核应用于 Fourier 变换.Bochner 的工作后来被 Weil 推广[52],并被 Gelfand、Raikoff 和 Godement[21-22] 等用于拓扑群的研究.30 和 40 年代,正定函数还被用于广义度量几何学的研究[10].

第二条路径源于上世纪初 Zaremba[58] 关于调和和双调和函数边值问题的研究,他第一个在特殊情形下引入了与一类函数相对应的核,且描述了核的再生性,即(1.1.2)式.然而他没有给出一般性理论,也没有给他研究的核一个特有的名称.直到上世纪 40 年代,通过 Bergman, Schiffer 等人的工作[6-8,43] 证实 Zaremba 所引入的核是求解某些类型的偏微分方程边值问题的有力工具.40 年代,Bergman 引入了与调和函数和解析函数相对应的核,称为"核函数",后来称为 Bergman 核.他注意到了这种核的再生性质[6],但还没有将这作为最基本的性质进行研究.30 和 40 年代利用 Bergman 核做了大量工作,在单和多复变函数理论、单和多连通域的共形映射、伪共形映射和 Riemann 度量不变量等方面得到了不少重要的结果,所有重要的共形映射都被证明可以由 Bergman 核简单地表出[6,20].

1948 年,N. Aronzajn 发展了再生核的一般理论,使得 Bergman 核的再生性成为一种特例.这一理论给出了研究各种特殊核函数的理论基础,并使得许多证明得以简化.核函数在它所属函数空间中的再生性成为这一理论的核心,而且将这种再生性直接作为再生核的定义.这样定义的核就一定具有(1.1.1)式的正定性,正定二次型与再生核是等价的.这就形成了两条路径的又一次汇合.1950 年,Aronzajn 发表了关于再生核理论的重要论文[5],代表了再

生核 Hilbert 空间基础理论体系的形成.

随着样条理论的发展,从 70 年代开始,再生核与样条理论相结合,不仅促进了样条,尤其是 L – 样条理论和计算的研究,而且再生核与光顺样条的结合开辟了统计学研究的新领域,取得了丰硕的成果,部分内容可见文献[51,79].这些在后面将有进一步的叙述.

因为再生核使得离散的取值问题有了连续的表示形式,所以在数值分析中可以发挥独特的作用.1970 年,Larkin[30] 给出了再生核 Hilbert 函数空间中的最佳逼近原则,1974 年 Chawla[11] 又给出了再生核 Hilbert 函数空间具有多项式精度的最佳逼近规则.1984 年,徐利治等[86] 将再生核用于重积分的降维展开计算,1987 年王小林[82] 用再生核与样条函数讨论 Cauchy 型奇异积分的数值计算.1988 年 Saitoh[41] 出版了关于再生核理论和应用的专著.从 1986 年开始,崔明根等人在再生核的构造、再生核的最佳逼近性及其在积分方程数值解中的应用等方面做了一系列的工作[65-67,78].

再生核理论和应用的研究近年来十分活跃.例如,利用再生核讨论解析函数空间的结构、数值计算和算子理论[1-2];用 Green 函数研究再生核的计算[12];将再生核应用于信号处理、小波变换和控制算法等[83].

1.2　再生核的定义与基本性质

定义 1.2.1　设 H 是 Hilbert 空间,其元素是定义在某个抽象集合 B 上的实值或复值函数,其内积记为$\langle\cdot,\cdot\rangle$.设 $K(t,s)$ 是 $B\times B$ 上的二元函数,如果对每个给定的 $s\in B$,$K(t,s)$ 作为 t 的一元函数是 H 中的元素,且对任意的 $f\in H$,有

$$f(s)=\langle f(\cdot),K(\cdot,s)\rangle,\tag{1.2.1}$$

则称 $K(t,s)$ 是 Hilbert 空间 H 的再生核，H 称为 B 上的再生核 Hilbert 空间.

设 H 的由内积导出的范数为$\|\cdot\|$.

定理 1.2.1 （唯一性）若 Hilbert 空间 H 具有再生核，则再生核是唯一的.

证明 若 $K(t,s),K'(t,s)$ 都是 H 的再生核，则由再生核的定义知对每个 s，有

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \|K(\cdot,s)-K'(\cdot,s)\|^2\\ &= \langle K-K',K-K'\rangle\\ &= \langle K-K',K\rangle-\langle K-K',K'\rangle\\ &= K(s,s)-K'(s,s)-[K(s,s)-K'(s,s)]\\ &= 0.\end{aligned}$$

即 $K(t,s)=K'(t,s)$.

证毕.

定理 1.2.2 （存在性）Hilbert 函数空间 H 具有再生核的充分必要条件是：对每个给定的 $s\in B$，映射 $f\mapsto f(s)(f\in H)$ 是 H 上的连续线性泛函.

证明 若存在再生核 $K(t,s)$，则

$$|f(s)|=|\langle f,K(\cdot,s)\rangle|\leqslant\sqrt{K(s,s)}\cdot\|f\|. \quad (1.2.2)$$

即映射 $f(s)$ 是连续的.反之，若映射 $f(s)$ 是连续的，则由 Riese 表示定理知，存在函数 $g_s(t)\in H$，使得 $f(s)=\langle f,g_s\rangle$，即知再生核 $K(t,s)=g_s(t)$.

证毕.

定理 1.2.3 （对称正定性）再生核 $K(t,s)$ 是对称正定(非负定)函数，即对任意的 $s_1,s_2,\cdots,s_n\in B$ 及复数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，都有

$$\begin{cases}K(t,s)=\overline{K(s,t)}\\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K(s_i,s_j)\overline{\alpha}_i\alpha_j\geqslant 0\end{cases}. \quad (1.2.3)$$

证明　由 $K(t,s)=\langle K(\cdot,s),K(\cdot,t)\rangle$ 知 $K(t,s)=\overline{K(s,t)}$,且

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K(s_i,s_j)\overline{\alpha_i}\alpha_j=\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_iK(\cdot,s_i)\right\|^2\geqslant 0.$$

证毕.

定理 1.2.4　设 H 为 B 上的再生核 Hilbert 空间,其再生核为 $K(t,s)$.

(1)　若 $K(t,t)$ 在 $E\subset B$ 上有界,则 H 中每个强收敛的序列 $\{f_n\}$ 必定在 E 上一致收敛.

(2)　若在 B 中定义了距离,且映射 $s\mapsto K(\cdot,s)$ 是 B 到 H 的某子空间的连续映射,则 H 中每个弱收敛的序列 $\{f_n\}$ 必定在 B 的任意紧子集上一致收敛.

证明　由(1.2.2)式即知(1)成立.以下证(2).

设 $E\subset B$ 是紧子集,则对每个 $\varepsilon>0$,可以选择有限集 $\{s_1,s_2,\cdots,s_k\}\subset E$ 使得对每个 $s\in E$,至少存在一个 s_i 满足 $\|K(\cdot,s)-K(\cdot,s_i)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{4M}$,这里 $M=\mathrm{Sup}\{\|f_n\|\}$.

又由 $\{f_n\}$ 弱收敛知 $\langle f_n,K(\cdot,s)\rangle\to\langle f,K(\cdot,s)\rangle$,即 $f_n(s)\to f(s)$.因此,存在 n_i,当 $n>n_i$,有 $|f(s_i)-f_n(s_i)|<\frac{\varepsilon}{4}$.所以

$$\begin{aligned}
&|f(s)-f_n(s)|\\
=&\ |(f(s)-f(s_i))+(f(s_i)-f_n(s_i))+(f_n(s_i)-f_n(s))|\\
\leqslant&\ |(f(s_i)-f_n(s_i))|+|\langle f-f_n,K(\cdot,s)-K(\cdot,s_i)\rangle|\\
\leqslant&\ \frac{\varepsilon}{4}+\|f-f_n\|\,\|K(\cdot,s)-K(\cdot,s_i)\|\\
\leqslant&\ \frac{\varepsilon}{4}+2M\frac{\varepsilon}{4M}<\varepsilon.
\end{aligned}$$

综上即知 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛.

证毕.

定理1.2.5 设函数Hilbert空间 H 具有再生核 $K(t,s)$，$K(t,s)$ 在子集 $B_1 \subset B$ 上的限制为 $K_1(t,s)$，由 H 中的函数 f 在 B_1 上的限制 $f_1 \triangleq f|_{B_1}$ 所构成的集合记为 H_1，则 H_1 赋予适当的内积后可以成为以 $K_1(t,s)$ 为再生核的 Hilbert 空间.

证明 考虑 H 的线性子空间 $H_0 = \{f \in H: f(t) = 0, t \in B_1\}$，设其正交补空间为 H'，即 $H = H_0 + H'$. 因此，对每个 $s \in B$，有 $K(t,s) = K_0(t,s) + K'(t,s)$，作为 t 的函数有 $K_0(t,s) \in H_0$，$K'(t,s) \in H'$，且

$$K(t,s) = K'(t,s), \ t \in B_1. \tag{1.2.4}$$

H_0 与 H' 都是 H 的闭子空间，分别以 $K_0(t,s)$，$K'(t,s)$ 为再生核. 又关系 $f \sim h \Leftrightarrow f - g \in H_0$ 是 H 中的等价关系. 设 $f \in H$，f 所在的等价类记为 $\tilde{f}$，以 $\tilde{f}$ 为元素的空间与 H_1 线性同构，即 H_1 可视为 H 关于 H_0 的商空间. 每个 $f_1 \in H_1$ 对应 H 中的一个等价类 $\tilde{f}$ 满足 $\forall f \in \tilde{f}$ 有 $f|_{B_1} = f_1$. 易知 $\tilde{f}$ 中的所有函数在 H' 上的投影是相等的，记这个投影为 f'_1，而且 $f'_1 \in \tilde{f}$. 由此，可在 H_1 中规定内积：

$$\langle f_1, h_1 \rangle_1 = \langle f'_1, h'_1 \rangle, \quad f_1, h_1 \in H_1. \tag{1.2.5}$$

由此内积导出的范数记为 $\|\cdot\|_1$，则可以知道

$$\|f_1\|_1 = \|f'_1\| = \min\{\|f\| : f|_{B_1} = f_1\} = \min_{f \in \tilde{f}}\{\|f\|\}. \tag{1.2.6}$$

这符合商空间范数的约定. $f_1 \in H_1$ 与 $f'_1 \in H'$ 的对应是一一的，且在各自的范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|$ 下，这种对应是 H_1 与 H' 之间的等距同构.

对于任意的 $f_1 \in H_1$，对应 $f'_1 \in H'$，则对于给定的 $s \in B_1$，

由再生核的对称性和(1.2.4)式,有

$$K(t,s) = K'(t,s), \ s \in B_1.$$

再由(1.2.5)式,得

$$f_1(s) = f'_1(s) = \langle f'_1, K'(\cdot,s)\rangle = \langle f_1, K_1(\cdot,s)\rangle_1, \ s \in B_1.$$

即当 H_1 赋予内积(1.2.5)式后,$K_1(t,s)$ 是 H_1 的再生核.

证毕.

再给出有关再生核的几个结论,其证明留给读者.

定理 1.2.6 设 H 是函数 Hilbert 空间,H_1 是 H 的子空间,$K_1(t,s)$ 是 H_1 的再生核,则对任意 $h \in H$,h 在子空间 H_1 上的投影为

$$f(s) = \langle h(\cdot), K_1(\cdot,s)\rangle.$$

定理 1.2.7 设 Hilbert 空间具有再生核 $K(t,s)$,$\{g_i\}$ 是 H 的直交系,则对任意满足 $\sum|\alpha_i|^2 < \infty$ 的数列 $\{\alpha_i\}$,有

$$\sum|\alpha_i||g_i(t)| \leqslant K(t,t)^{\frac{1}{2}}\left(\sum|\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

定理 1.2.8 设 H 是可分的再生核 Hilbert 空间,$\varphi_i(i = 1,2,\cdots)$ 是 H 的标准正交基,则 H 的再生核为

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(t)\overline{\varphi_i(s)}, \tag{1.2.7}$$

且满足

$$\lim_{n\to\infty}\left\|K(\cdot,s) - \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\cdot)\overline{\varphi_i(s)}\right\| = 0. \tag{1.2.8}$$

1.3　非完备内积函数空间的函数完备化

在实际问题中经常遇到非完备的内积函数空间 H,为了将 H 完备化,通常是将 H 中的 Cauchy 序列按等价类(当其极限不属于