运筹学

——管理科学基础

李向东　主编

北京理工大学出版社

运筹学——管理科学基础

李向东 主编

赵强 池俊 审定

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书从管理的角度具体介绍了运筹学中的线性规划、动态规划、库存论、决策论、对策论、排队论和模拟等有关概念及数学方法。书中引入大量的例子和案例，使理论和实践得到了有机的结合，也使读者从中获得有益的启示。章末附有用BASIC语言编写的计算机程序和使用范例，还有一定数量的习题。

本书可作为管理、财经等专业的大专，非管理专业的本科以及成人专业训练教学用书，同时也可供工商、管理、财经和行政部门的管理人员自学和参考。

运筹学——管理科学基础

李向东 主编

赵 强 池 俊 审定

•

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京密云华都印刷厂印装

•

850×1168毫米 32开本 9印张 232千字

1990年10月第一版 1990年10月第一次印刷

ISBN 7-81013-356-X/C·18

印数：1—10000册 定价：5.00元

前　言

随着我国现代化建设的飞速发展，现代管理理论对管理工作的重要指导作用，被越来越多的人们所认识。因此，重视系统地有目标地研究、探讨现代管理理论，并用先进的管理理论去造就新一代管理人员，搞好管理队伍的建设，是一项既十分重要而且又十分迫切的任务。

将国外先进管理理论的精华部分进行消化和吸收，并使它与我国现代化建设的实际相结合，实现洋为中用，这是我们每个教育工作者的应尽义务和责任。

本书是在我们多年教学实践的基础上为管理专业大专和非管理专业本科编写的一本教科书。全书共分七章：第一章线性规划；第二章动态规划；第三章库存论；第四章决策论；第五章对策论；第六章排队论；第七章管理系统模拟。讲授60～80学时。

本书以通俗的语言描述了现代管理的一些基本原理和方法，并尽可能结合管理工作中的问题设置例题。书中收集了大量的管理案例，通过案例教学来丰富学生的感性认识，提高学生的管理能力。同时本书也具有一定的理论深度，以满足各类读者的知识需求。我们也注意到了在计算机比较普及的今天，故书中为每章讲到的各种管理方法编制了BASIC语言的计算机程序，而且程序前还有操作范例，可供使用时参考，这无疑为具有初等计算机基础的同志提供了极大方便。

本书主要由李向东（第一、二、三、四、七章）、庞益清（第五、六章）编写，李向东同志统稿，赵强副教授和池俊教授审稿，在编写过程中得到了领导和许多同志的协助和支持。张庆宏、王文泉、潘建岳、李东军、魏明虎、李丛岩等同志参与了资料的收

集和整理。在此，向给予我们帮助的同志们表示深切谢意。

由于本书编写仓促，肯定有许多不足之处，敬请读者提出宝贵意见。

编者

于石家庄

一九九〇年二月

目　录

第一章 线性规划

1.1 引　言

线性规划是运筹学中在理论上比较成熟，在实际中应用日益广泛的一个重要分支。从解决技术问题的最优化，到工业、农业、商业、交通运输业、军事的计划和管理以及决策分析都可以发挥作用。从范围来看，小到一个工厂或车间的日常工作和计划的安排，大至国民经济计划最优方案的提出，都有用武之地。它所探讨的问题是在由所提出问题的性质决定的一系列约束条件下，如何把有限的资源进行合理分配，制定出最优实施方案，以获得最好的效益。它具有适应性强，计算技术比较简便等特点。

1.2 线性规划问题及其数学模型

1.2.1 线性规划研究的几种问题

线性规划研究的问题主要有两类：一是，一项任务确定后，如何统筹安排，尽量做到用最少的人力物力资源去完成这一任务。二是，已有一定数量的人力物力资源，如何安排使用它们，使得完成任务最多。其实这两类问题是一个问题的两个方面，就是所谓寻求整个问题的某个整体指标最优的问题。在实际中，这类问题很多。例如：

1. 运输问题。在某一地区内，有某种产品的产地与销地各若干，把这种产品从各产地调运到各销地，调运方案可以很多，应如何组织调运，才能使总的运费或运力（即总的运输吨公里数）最少。

2．生产的组织与计划问题。一个工厂或车间有各种不同类型的设备各若干台，各种不同设备生产各种零件的效率不同，在一个生产周期，应如何安排各设备的生产使得成套的产品总量最大。

3．合理下料问题。在加工中需要将某种条材或板材，裁成不同规格的毛坯，各种毛坯的数量也可能不同，应如何选取合适的裁法，使毛坯数量符合要求，并且使总料头最少（即所用材料最少）。

4．配料问题。在食品、化工、冶炼等企业，常常用几种原料制成含有一定成分的产品，而这些不同原料价格不同，应如何决定配料的方案，才能使生产的产品所含成分符合要求，而产品的成本最低。

5．布局问题。各种作物在不同土壤上的单位面积产量不一样，如何合理安排各种作物在各种土壤上的种植面积，达到因地制宜，在完成种植计划的前提下，使总产量最多。这是作物布局问题。将某几个地方生产的原料，集中到某个地方加工成成品，然后再运到某个成品需要地。有些地方可能既是原料出产地，又是成品需要地，也是成品加工地。因各地间运费不同，成品加工费不同，设厂条件不同，应在什么地方设厂，规模多大，才能满足成品需要地的需要，又使费用（包括运费、加工费）最低。这是工厂布局问题。

6．时间和人员安排问题。在一项工程的施工或研究过程中，如何根据具体条件合理地安排各阶段的时间进展情况，使得所耗时间最少。人员安排的问题也同样，几个人要分别去担任一工作。由于每个人的素质不同，对各种工作的认识程度和解决问题的能力不同，就要求领导者合理安排，使人尽其才，才尽其用。

1.2.2 线性规划问题的数学模型

前面提到，线性规划的应用是很广泛的，应用的实际问题各

式各样。数学模型是描述实际问题共性的抽象的数学形式。对数学模型的研究，有助于我们认识这类问题的性质和寻求它的一般解法。为了建立线性规划的数学模型，让我们先以下列几个实际问题进行分析。

一、生产的组织与计划问题

［例1］ 某工厂在计划期内要安排生产甲、乙两种产品，分别需要在A、B、C、D四种不同的车床上加工。按工艺规定，产品甲和乙在各车床上所需要的加工台时数如表1-1所示。已知各车床在计划期内有效台时数分别为12、8、16、12（一台设备工作1小时称为1台时）。该工厂每生产一件产品甲可得利润2元，乙可得利润3元。如何安排生产才能得到利润最多？

加工台时数 表1-1

车床 / 产品	A	B	C	D
甲	2	1	4	0
乙	2	2	0	4

解：设x_1，x_2分别表示在计划期内产品甲和乙的产量，则该问题的数学模型为：

求一组变量x_1、x_2的值，使它满足约束条件：

$2x_1+2x_2 \leqslant 12$（产品甲和乙在车床A上的加工台时限制）

$x_1+2x_2 \leqslant 8$（产品甲和乙在车床B上的加工台时限制）

$4x_1 \leqslant 16$（产品甲在车床C上的加工台时限制）

$4x_2 \leqslant 12$（产品乙在车床D上的加工台时限制）

$x_1，x_2 \geqslant 0$（非负限制）

目标函数（工厂的利润）

$$\max:\ z=2x_1+3x_2$$

二、配料问题

［例2］ 一养牛场用B_1，B_2两种饲料喂养奶牛，在奶牛的饲料中需要A_1、A_2、A_3三种营养成分，其含量分别不能少于4，12，2单位，已知两种饲料中所含有三种营养成分如表1-2所示。如已知饲料B_1的价格仅是B_2价格的一半，问在满足奶牛的营养条件下，饲料B_1和B_2的需求量各为多少，才能使饲料费用最少？

饲料营养成分　　表1-2

营养 \ 饲料	B_1	B_2
A_1	1	1
A_2	6	2
A_3	0	1

解：设x_1，x_2分别表示两种饲料的需要量，则该问题的数学模型为：

满足约束条件

$$x_1 + x_2 \geqslant 4$$
$$6x_1 + 2x_2 \geqslant 12$$
$$x_2 \geqslant 2$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

目标函数（饲料费）

$$\min: z = x_1 + 2x_2$$

三、合理下料问题

［例3］ 某修理所机工车间要将长为10米的棒料，截成长度为3米和4米两种毛坯各100根，怎样截法，使所用的原材料最少？

分析：根据经验或简单计算，我们可以知道一根10米长的棒料，可以设计出三种不同的截法B_1、B_2、B_3，如表1-3所示。

解：设用B_1种截法截x_1根原材料，用B_2截法截x_2根原材料；用B_3种截法截x_3根原材料。截成长度为3米的总根数超过100根的多余根数为s_1，截成长度为4米的总根数超过100根的多余根数为

各种截法的毛坯数　表1-3

截法 / 毛坯种类	B_1	B_2	B_3
3米	3	2	0
4米	0	1	2
料头长度（米）	1	0	2

s_2。于是该问题的数学模型为：

满足约束条件

$$3x_1+2x_2+0x_3-s_1=100$$

$$x_2+2x_3-s_2=100$$

$$x_1,x_2,x_3\geqslant 0$$

$$s_2,s_2\geqslant 0$$

目标函数（所用原材料）

$$\min:\ z=x_1+0x_2+2x_3+3s_1+4s_2$$

四、时间和人员安排问题

［例4］ 某工厂的中心调度室，每昼夜24小时都要有调度人员值班，已知每个时段（每4小时为1时段）所需要的值班人数如表1-4所示。又知，每一调度值班人员在任1时段开始上班后，要

表1-4

序　号	时　段	每个时段中至少需要值班人员数	每一时段开始上班工作人数
1	06—10	8	x_1
2	10—14	12	x_2
3	14—18	10	x_3
4	18—22	8	x_4
5	22—02	6	x_5
6	02—06	4	x_6

连续工作 8 小时（包括轮流吃饭时间）才能满足调度值班工作要求。为使参加值班的总人数最少，试列出数学模型。

解：我们可以设每1时段开始上班工作的人数分别为 x_1, x_2, ……x_6如上表。根据问题所给条件和要求，可以列出上述问题的线性规划模型为：

满足约束条件

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\geqslant 12 \\
x_2 + x_3 &\geqslant 10 \\
x_3 + x_4 &\geqslant 8 \\
x_4 + x_5 &\geqslant 6 \\
x_5 + x_6 &\geqslant 4 \\
x_1 \qquad\qquad + x_6 &\geqslant 8 \\
x_1 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

目标函数（值班人数）

$$\min: z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

1.2.3 线性规划数学模型的一般形式

线性规划问题数学模型的一般形式是：求一组变量 x_j（$j = 1, 2, \cdots\cdots, n$）的值，使它满足：

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{m}x_n &\leqslant (= \text{或} \geqslant) b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leqslant (= \text{或} \geqslant) b_2 \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad & \cdots \qquad\qquad (1.2.1) \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leqslant (= \text{或} \geqslant) b_m
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \qquad (1.2.2)$$

$$\max\ (\text{或}\min): z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad (1.2.3)$$

方程组（1.2.1）和（1.2.2）式称为约束条件，其中（1.2.2）式也称为非负条件；（1.2.3）式称为目标函数。

为了便于以后讨论问题（例如单纯形法求解）我们可以用一种统一的标准形式，即：

目标函数：

$$\max\ (\text{或}\min)：\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

约束条件：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1,2,\cdots,n) & \end{aligned}$$

原始模型与等效后的标准形式其解是一样的。通常把上述线性规划模型简写为

$$\max\ (\text{或}\min)：\ z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

其中a_{ij}(工艺常数)，b_i(资源常数)，c_j(性能指标) 均为已知量。

线性规划问题的数学模型是描述实际问题的抽象的数学形式，它反映了客观事物间的本质规律。线性规划问题的一般模型都能够变换为标准形式。

1.2.4 线性规划数学模型的特征和建模步骤

一、线性规划问题及其数学模型具有的共同特征

1. 每一个问题都用一组未知数（x_1，x_2,…，x_n）表示某一方案；这组未知数的一组定值就代表一个具体方案。通常要求这些未知数的取值是非负的。

2. 存在一定的限制条件（称为约束条件），这些限制条件都可以用一组线性等式或线性不等式来表达。

3. 都有一定目标要求，并且这个目标可表示为一组未知数的线性函数（称为目标函数），按研究的问题不同，要求目标函数

实现最大化，或者最小化。

二、线性规划模型建立的一般步骤

1. 研究和明确问题的要求和条件；

2. 设定决策变量；

3. 选定衡量目标函数的数量指标（利润、费用、成本、产量等）；

4. 收集和确定数学模型的所有参数（a_{ij}，b_i，c_j）的数据资料；

5. 列出所有约束条件的线性数学表达式；

6. 列出目标函数的数学表达式。

如何求解一个线性规划问题，这是本章所要讨论的中心问题。我们首先介绍图解法。

1.3 线性规划问题的几何解法——图解法

当某些线性规划问题仅含有两个变量x_1，x_2时，我们可以用图解法求得该问题的最优解。图解法简单直观，有助于了解线性规划问题求解的基本原理和解题步骤。

［例5］ 目标函数：$\max: z=6x_1+4x_2$

约束条件：

$$2x_1+3x_2\leqslant 100$$
$$4x_1+2x_2\leqslant 120$$
$$x_1, x_2\geqslant 0$$

［分析］ 在以x_1，x_2为坐标轴的直角坐标系中，坐标平面上点的坐标为（x_1，x_2），满足约束条件中每一个不等式的点集合是一个平面，如非负条件$x_1\geqslant 0$代表包括x_2轴和它右侧半平面，非负条件 $x_2\geqslant 0$ 代表包括 x_1 轴和它的以上的半平面（如图 1-1）。这两个条件都满足时，是指第一象限。又如约束条件：$2x_1+3x_2\leqslant 100$是代表以直线$2x_1+3x_2=100$为边界的左下方的半平面，若有一点同时满足$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$及$2x_1+3x_2\leqslant 100$的条件，必然落在由这三个半平面交叠的区域内。因为本例的约束条件是4个不等