抽象調和分析

賴漢卿 著

賴漢卿著

抽象調和分析

抽象調和分析

66.12.0154

中華民國六十六年十二月初版

定價新臺幣一一〇元

著　者　賴　漢　卿
發行人　王　必　成

出版者　聯經出版事業公司
臺北市忠孝東路四段555號
電　話：7683708・7678738
郵政劃撥帳戶第 100559 號

行政院新聞局出版事業登記證局版臺業字第0130號

序言

調和分析是研究拓樸群上的函數與函數空間，也稱為富氏分析，是泛函分析的一分枝。在歐幾里得空間上的調和分析通常稱為富氏分析，有時也相混言之。抽象調和分析是特別强調研究有關拓撲群上的函數空間或其表現的種種分析。

本課目在一學期所包含的材料，都是基本性質的介紹，各章節均可再深入一層做為一小分枝的專題研究。因之本講義所包含的資料較為廣泛，大致網羅有泛函分析中的 Banach 代數理論，拓撲群的基本性質，局部緊緻可換群的富氏分析基礎，表現論淺說，緊緻群的對偶性與酉表現等。最後一章討論乘算子，做為調和分析的一種應用。

關於局部緊緻可換拓撲群上的調和分析，若能參照 Rudin 的 Fourier Analysis on Group 第一、二章，似乎對於新接觸調和分析者較容易直接進入研讀。也有基於可換 Banach代數的 Gelfand 理論來接近的：如 Hewitt and Ross〔17〕；Loomis〔32〕第六、七章；Naimark〔36〕§31；Katznelson〔21〕第八章。

非可換的局部緊緻拓撲群上的調和分析之研究，Godement, Gelfand 與 Raikov 等人都以表現論為工具，此情形屬無限維的表現。與此混合的主要方法常借助於正型（正定）函數，以這方面接近的方法，可參照 Hewitt and Ross〔17〕§21、22 以及 Naimark〔36〕§30。

至於緊緻群的情形，有由有限維的表現來接近的，如 Weil 〔53〕與 Hewitt and Ross〔17〕Vol. 2，也有基於 H*-代數的研究（為非可換 Banach 代數的一特別型）如 Loomis〔32〕§§ 27、39、40與Naimark〔36〕PP330、431等。

本講義第一章是介紹 Banach 代數的理論；包含*-代數，Gelfand理論，C*-代數，H*-代數等。第二章是拓撲群的性質與 Haar 積分；包含褶積代數，齊性空間，以及 Weil 的公式之推廣情形。第三章主要的是介紹局部緊緻可換群上的富氏分析，我們以第一章 Gelfand 理論引進古典的 Fourier 變換，並敘述了有關富氏分析的基本定理，Pontryagin 對偶定理、Bochner 定理、Bohr 緊緻化定理、Plancherel 定理等。第四章介紹表現論，包含代數表現，局部緊緻群的表現，有Schur's Lemma、Gelfand 與 Raikov 定理。第五章是緊緻群的富氏分析，特別引用第一章 § 5 H*-代數的性質，討論緊緻群的酉表現；包含緊緻群的對偶空間，Fourier 變換以及 Peter-Weyl 定理 Fourier 代數等。在這一章我們兼用有限維的表現與 H*-代數的方法接近。

本講義由清華大學數學研究所許多同學熱心的研讀與討論，特別是劉崇吉先生每堂課的接近，並提供許多寶貴的意見，使講義的內容更加堅實。又葉芳栢與陳應勝兩同學將講義原稿一一過目後再行抄寫，於此順便申謝。本講義之完成承蒙本所同仁的鼎力支持，國科會數學中心的部分協助。著者特於此表萬分的謝意。本講義因倉促脫稿，難免疏漏，如蒙專家惠予指正當感激不盡。

本講義出現後，承蒙聯經出版事業公司的厚愛；本着支持科學在國內生根，學術在國內活躍，願將本講義印成專書，做為科學叢書之一，著者實感欣慰，於此特申謝意。

賴漢卿　謹識

民國65年初夏於清華園

著者簡介

著　　者：賴　　漢　　卿

日本　東北大學　理學博士

59年度中山學術獎得獎人

64年度徐氏基金會科學獎理科得獎人

曾　　任：國立清華大學　講師　副教授

教授　系主任

現　　任：國立清華大學　教授兼數學系主任暨所長

著專書有：Hilbert 空間論導論，

複變數函數論，

微積分等，

譯　　著：高等微積分（高木貞治著：解析概論）

目錄

第三章　可換 Fourier 分析上的基本定理

第四章　表現論的淺說

第五章　非可換的 Fourier 分析

第六章　乘算子

第一章　代數與 Banach 代數

§1　代數、賦範代數

設**C**表複數體，**R**表實數體，F表純量體（本書中F表**C**或**R**）。在F上的**代數**（algebra）A是表示一集合中具有下列三個**双運算**（binary operation）的條件:

1. $(x, y) \longrightarrow x+y$
2. $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$
3. $(x, y) \longrightarrow xy$

此處a_1，a_2，$a \in A$，$\lambda \in F$，且對於這些運算又滿足
下列三種性質

(1)　$x(yz) = (xy)z$

(2)　$(x+y)z = xz + yz,$　　　　$x(y+z) = xy + xz$

(3)　$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

式中 x、y、$z \in A$，$\alpha \in F$.

且對於這些運算又滿足

代數A的**理想子環**I（ideal）是A的一子代數，且是A視爲環時的双邊理想子環。有時我們祇需單邊的運算，而稱左（右）

理想子環，意思是表示一子代數同時又是環的左(右)理想子環。注意單邊理想子環 I 是一子代數，所以 $\lambda a \in I (a \in I,\ \lambda \in F)$，一般環論中的理想子環並不必要求滿足代數意義下的理想子環。

一賦範空間 A 在 F 上成一**賦範代數**（normed algebra）就是 A 本身是 F 上的一代數且滿足條件:

$$\|xy\| \leqq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in A$$

若 $e \in A$ 爲代數 A 的**單位元**（identity）卽:

$$ex = xe = x \qquad \forall x \in A$$

顯然代數至多有一單位元 e，且在賦範代數 A 的單位元 e，因滿足 $xe=x$ 知 $\|e\| \geqq 1$。

命題 1.1.　設 A 是具有單位元 e 的賦範代數，且 $\|e\| \geqq 1$，則我們可以重新定義範數在同拓撲下使 $\|e\|=1$。

證明　我們重新定義範數 $|\cdot|$ 爲

$$|x| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|xy\|}{\|y\|}$$

則 $|e|=1$ 且 $\|xy\| \leqq \|x\|\|y\|$，得 $|x| \leqq \|x\|$。取 $y=e$，我們可得 $|x| \geqq \|x\|/\|e\|$。故 $\|x\|$ 與 $|x|$ 導致 A 上的同等拓撲。更有進者我們不難得到:

$$\|x_1 x_2 y\| \leqq |x_1| \|x_2 y\| \leqq |x_1| \cdot |x_2| \cdot \|y\|$$

因 y 是 A 中任意非零元素，故 $|x_1 x_2| \leqq |x_1||x_2|$。(證明終了)

由此命題今後我們可設賦範代數的單位元（如果存在的話）e 都滿足 $\|e\|=1$。

任意代數 A 可擴大成代數 A_e 使 A_e 有單位元 e，且 A 爲 A_e 中的双邊**極大理想子環**（*maximal ideal*）卽:

命題 1.2.　純量體 F 上的任意代數 A 可擴大至一代數 A_e 使之

有單位元 e，且 A 成爲 A_e 的双邊極大理想子環。

證明　設 $A_e=F\times A$ 並將元素 $\lambda e+a$ 寫成 $(\lambda, a)\in F\times A$，如此則 e 表 $(1, 0)$，而 A 的全體可定著 $\{0\}\times A$。現在我們在 A_e 上定義加法與乘法規則如下:

$$(\lambda_1, a_1)+(\lambda_2, a_2)=(\lambda_1+\lambda_2, a_1+a_2)$$

$$(\lambda_1, a_1)\cdot(\lambda_2, a_2)=(\lambda_1\lambda_2, \lambda_1 a_2+\lambda_2 a_1+a_1 a_2)$$

則 A_e 變成一代數且 $\{0\}\times A$ 顯然是 A_e 的極大理想子環。

（證明終了）

一個賦範代數 A 可如命題 1.2 一樣擴大成有單位元的賦範代數 A_e，其範數爲 $\|\lambda e+a\|=|\lambda|+\|a\|$。又 A 完備的充要條件是 A_e 完備 (complete)。

完備的賦範代數 A 稱爲 **Banach 代數** (Banach algebra)；若 Banach 代數的純量體 $F=\mathbf{C}$，我們稱之爲**複數 Banach 代數**。以後除非冠以複數，在文中出現的 Banach 代數是同時在複數及實數體上討論。不具有單位元的 Banach 代數 A 可附著一單位元 e 於 A 使成一 Banach 代數，其範數爲 $\|\lambda e+a\|=|\lambda|+\|a\|$。當然原來的 A 如有單位元，則依前法擴大的 A_e 之單位元不會與 A 的單位元相同。有一點需要提到的是若 A 爲實數代數，我們令 $A_C=\{(a_1, a_2)\,|\,a_1, a_2\in A\}$ 且滿足下面條件:

1. $(a_1, a_2)+(b_1, b_2)=(a_1+b_1, a_2+b_2)$
2. $(\alpha+i\beta)(a_1, a_2)=(\alpha a_1-\beta a_2, \alpha a_2+\beta a_1)$
3. $(a_1, a_2)(b_1, b_2)=(a_1b_1-a_2b_2, a_1b_2+a_2b_1)$

則 A_C 是複數代數，且寫像

$$a\longrightarrow(a, 0)$$

是 A 到 A_C 的同構變換。這個代數 A_C 稱爲 A 的**複數化** (complexification) **代數**。

不難證明賦範代數A複數化以後，用

$$|(x, y)| = \|x\| + \|y\|$$

爲範數則$x \longrightarrow (x, 0)$ 是等距同構；但 A_c 是以 $|(x, y)|$ 爲範數成爲**一實數賦範（複數）代數**。但若再定義：

$$\|(x, y)\| = \sup_{\theta} |e^{i\theta}(x, y)|$$

則 A_c 仍是以 $\|(x, y)\|$ 爲範數成**一複數賦範代數**，且

$$\|(x, 0)\| = \sqrt{2}\,\|x\|$$

所以在此範數下，$x \longrightarrow (x, 0)$ 是拓撲變換，並非等距離變換。故在複數化賦範代數 A_c 上所定的範數有點兒不可捉摸。如上述若A有單位元 e，A_c 則以 $(e, 0)$ 爲單位元，但 $\|e\| = 1$, $\|(e, 0)\| = \sqrt{2}$。因此欲將A嵌入 A_c，卽使$x \longrightarrow (x, 0)$ 爲等距離同構，則定義

$$|(x, y)| = \|x\| + \|y\|$$

$$\|(x, y)\| = (1/\sqrt{2}) \sup_{\theta} |e^{i\theta}(x, y)|$$

時，A_c以 $\|(x, y)\|$ 爲範數可得 $\|x\| = |(x, 0)| = \|(x, 0)\|$ 且

$$(1/\sqrt{2})\,|(x, y)| \leqq \|(x, y)\| \leqq |(x, y)|$$

所以 $|(x, y)|$ 與 $\|(x, y)\|$ 是同等的範數，同時注意 A_c 在 $\|(x, y)\|$ 完備的充要條件是A完備。對於這一些結果我們不大會用到，故不多加討論。

比賦範代數廣大的是**拓撲代數**（topological algebra）這種代數可定義如下：

在F上的代數A稱爲拓撲代數，意思是A滿足下列條件：

(1) A爲F上的代數，

(2) A爲局部凸性 Hausdorff 拓撲線性空間，

(3) $(x, y) \longrightarrow xy$ 是 $A \times A \longrightarrow A$ 的連續變換。

部份集合 $B \subseteq A$ 稱爲A的**閉子代數**（closed subalgebra）卽B爲一子代數且爲$\bar{A}$的閉子空間。顯然當B爲A的子代數時，則

$\bar{B}$為一閉子代數。為敍述拓撲群之便，我們就提一提拓撲代數的一些性質。這些性質的特別情形可視作賦範代數及 Banach 代數。

命題 1.3.　拓撲代數的極大可換子代數是閉的。

證明　設B為A的極大可換代數。因$\bar{B}$是A的可換子代數且$B\subseteq\bar{B}$，故 $B=\bar{B}$。　　（證明終了）

系　拓撲代數A中的（左、右、双邊）極大理想環是閉的。

命題 1.4　設S為拓撲代數A的任意子集，則集合

$$S'=\{x\in A\,|\,xy=yx,\ \ \forall y\in S\}$$

（S'稱為S的**交換團**（commutant））為A的閉子代數。

證明　不難檢驗 S' 是一子代數。我們證明 S' 是閉集。設 $x\in A$，並置

$$A_x=\{y\in A\,|\,xy=yx\},$$

則 A_x 包含所有 $y\in A$ 使連續函數 $f_1(y)=xy$ 與 $f_2(y)=yx$ 一致，換句話說 $y_\alpha\in A_x$，$y_\alpha\longrightarrow y$ 時，$yx=xy$。故 $y\in A_x$，因此 A_x 是閉集。但

$$S'=\bigcap_{x\in S}A_x$$

所以S'是閉子代數。　　（證明終了）

讀者不難證明 $S_1\subseteq S_2\Longrightarrow S_2'\subseteq S_1'$，且$S\subseteq S''$。

集合 $Z=A'=\{y\in A\mid yx=xy,\ \forall x\in A\}$ 稱為A的**中心**(center)。顯然Z是A的可換閉子代數（closed abelian-subalgebra)。

定義　具有單位元 e 的拓撲代數 A 稱爲**有連續逆元代數** (algebra with continuous inverse) 卽存在單位元近傍 $U(e)$ 滿足:

(1) $x\in U(e)\Longrightarrow x$ 有逆元 x^{-1}。

(2) $x\longrightarrow x^{-1}$ 在 e 連續。

引理 1.5　設 A 表有連續逆元代數，對於 $x_0\in A$，x_0^{-1} 存在。則存在 x_0 近傍 $U(x_0)$ 使

(1) $x\in U(x_0)\Longrightarrow x^{-1}$ 存在。

(2) $x\longrightarrow x^{-1}$ 在點 x_0 連續。

證明　首先我們注意 $y\longrightarrow e+x_0^{-1}y$ 是 $A\longrightarrow A$ 的連續函數。特別於 $y=0$ 時，則有 0 近傍 $U(0)$ 使

$$y\in U(0)\Longrightarrow e+x_0^{-1}y\in U(e)$$

因此 $(e+x_0^{-1}y)^{-1}$ 存在。($\forall y\in U(0)$)。置

$$U(x_0)=\{x_0+y\,|\,y\in U(0)\}$$

卽 $U(x_0)$ 爲 x_0 的近傍。顯然 $x\in U(x_0)$，則 x^{-1} 存在，蓋因

$$x^{-1}=(x_0+y)^{-1}=(e+x_0^{-1}y)^{-1}x_0^{-1}$$

而其右邊兩因子的逆元存在。

(2) 的結果由 (1) 及 A 爲有連續逆元代數而得。

(證明終了)

在有單位元代數 A 中，以 G 表示具有逆元存在之元素的全體，因此 G 在乘法運算下成爲一個群。我們稱 G 爲 A 的**乘法性群** (Multiplicative group of A or group of regular elements or group of units)。G 的元素稱爲 A 的**正則元** (regular element)。必要時也有分成左（右）正則元來討論，並以 $G^l(G^r)$ 表示左（右）正則元所成之集合。

命題 1.6　設 Banach 代數 A 有單位元 e，則 $\|x\|<1$ 時，

$e-x\in G$。且

$$(1)\ (e-x)^{-1}=e+x+x^2+\cdots\cdots\ ,$$

更進一層得

$$(2)\ \|e-(e-x)^{-1}\|\leq\frac{\|x\|}{1-\|x\|}。$$

證明　因 $\|x^n\|\leq\|x\|^n$，若 $\|x\|\leq 1$ 顯然級數 (1) 是絕對收歛，以 $(e-x)$ 乘此級數便得單位元。因此該級數之和爲 $(e-x)^{-1}$。又因 $e-(e-x)^{-1}=-(x+x^2+\cdots\cdots)$ 故得不等式 (2)。

（證明終了）

系　若 $\|e-x\|<1$，則 $x\in G$ （卽 x 爲正則元）。

定理 1.7　設 A 是具有單位元的 Banach 代數，則其乘法性群 G 是開集合，且 $x\longrightarrow x^{-1}$ 是 $G\longrightarrow G$ 的拓撲同構寫像 (homeomorphic onto mapping)。

證明　設 $a\in G$ 則 a^{-1} 存在。我們祇要證明任意 $x\in A$，如果滿足 $\|x-a\|<\|a^{-1}\|^{-1}$，則 $x\in G$。卽 G 爲開集合。事實上是因

$$\|e-a^{-1}x\|=\|a^{-1}(a-x)\|\leq\|a^{-1}\|\ \|a-x\|$$

於是當 $\|a-x\|<\|a^{-1}\|^{-1}$ 時 $\|e-a^1x\|<1$。由上面系 1.6 得 $a^{-1}x\in G$。因之 x 也是 G 的一元素。

其次證明 $x\longrightarrow x^{-1}$ 將 G 拓撲寫像映成 G 本身。爲此祇要證明 $x\longrightarrow x^{-1}$ 連續卽可（爲什麼？）；卽證明當 $a\in G$ 且 $\|y\|$ 很小時，$\|(a+y)^{-1}-a^{-1}\|$ 是很小的數。首先我們注意祇要設 $\|y\|<\|a^{-1}\|^{-1}$，則 $a\in G\Longrightarrow a+y\in G$。蓋因在命題 1.6 中取 $x=-a^{-1}y$，則當 $\|y\|<\|a^{-1}\|^{-1}$ 時，$\|x\|<1$，因之 $e+a^{-1}y\in G$ 且 $a+y=a(e+a^{-1}y)\in G$ 故也。今

$$
\begin{aligned}
\|(a+y)^{-1}-a^{-1}\| &= \|a^{-1}\|\ \|(e+a^{-1}y)^{-1}-e\| \\
&\leqq \frac{\|a^{-1}y\|}{1-\|a^{-1}y\|}\|a^{-1}\| \\
&\leqq \frac{\|a^{-1}\|^2\|y\|}{1-\|a^{-1}\|\ \|y\|}\ 。
\end{aligned}
$$

故給任意 ε，$0<\varepsilon<\|a^{-1}\|$，取 $\delta=\varepsilon/2\|a^{-1}\|^2$，則 $\|y\|<\delta$（此時 $\|y\|\ \|a^{-1}\|<\delta\|a^{-1}\|<1/2$）

$$\Longrightarrow \|(a+y)^{-1}-a^{-1}\|<\varepsilon$$

因此證明了 $a\longrightarrow a^{-1}$ 是 G 映成 G 本身的連續函數。（證明終了）

注意證明中 a 是依有右逆元 a_r^{-1} 的情形進行的。若 a 有左逆元 a_l^{-1} 時其證法仍然相同。

對於任意代數 A，我們可定義**圓運算**（circle operation）$x\circ y=x+y-xy$。且滿足

$x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ z$，若 $x\circ y=0$，則 y 稱爲 x 的**右擬逆元**（right quasi-inverse），而 x 稱爲 y 的**左擬逆元**（left quasi-inverse）。

如果 A 有單位元 e，則

$$x\circ y=0\ \text{與}\ (e-x)\ (e-y)=e$$

是同等的。且若 $x\circ y_1=0=y_2\circ x$，則 $y_1=y_2$。蓋因

$$
\begin{aligned}
y_2(x\circ y_1) &= y_2(y_1+x)-y_2(xy_1) \\
&= y_2x+(y_2-y_2x)y_1 \\
&= y_2x-xy_1=y_2-y_1=0\ 。
\end{aligned}
$$

故 $y_1=y_2$，由此知一元素 x 的左、右擬逆元存在的話，那是唯一且相等，此時稱 x 有一**擬逆元**（quasi-inverse）y，使 $x\circ y=y\circ x=0$，以後以 x' 代 y 便得

$$x'\circ x=x\circ x'=0\ 。$$

A 的擬逆元全體的集合，以 Q（即擬正則元的全體）表之，稱爲 A 的**擬群**（quasi-group）顯然 Q 在運算 $x\circ y$ 下是一個群。

蓋當 $x\circ u=0$ 及 $y\circ v=0$ 時

$(x\circ u)\circ(y\circ v)=0$ 而 0 是 Q 的單位元。

命題 1.8 設 A 爲無單位元的代數，A_e 爲對於 A 附以單位元的代數，則 $x\in A$ 有右（左）擬逆元的充要條件是 $e-x$ 在 A_e 中有右（左）逆元。因之 $x\in A$ 的擬逆元 x' 與 $(e-x)^{-1}$ 在 A_e 中相對應。

證明 若 $x\circ y=0$ 則 $(e-x)(e-y)=e$，所以 $e-y$ 爲 $e-x$ 的右逆元。反之 $e-x$ 有右逆元 $e-y$，則 $x+y=xy$，而 A 爲 A_e 的双邊理想子環，所以 $y=xy-x\in A$ 爲 $x\in A$ 的右擬逆元。

系 A 的擬群與 A_e 的乘法性群有下列關係：

$$Q=G+e \text{ 且 } G=Q+e$$

顯然對於 A 有單位元 e 時，其擬群 Q 與乘法性群 G 仍有上述的關係式。因此有連續逆元的代數其擬群 Q 是開集，更有

定理 1.9 一具有單位元拓撲代數A能成爲有連續擬逆元代數的充要條件是A有連續逆元的代數。

上述所謂有連續擬逆元的代數是 Q 爲開集合且 $x\longrightarrow x'$ 是將 Q 映成 Q 本身的一連續變換。其證明由 $Q=G+e$ 及 $x'=e-(e-x)^{-1}$ 且 $x^{-1}=e-(e-x)'$ 便易得之。

Banach代數 A 之元素 x 稱爲**左（右）拓撲零除子** (topological divisor of zero) 即在 A 內有一系列 $x_n(n=1, 2, \cdots\cdots)$，$\|x_n\|=1$ 且使

$$xx_n\longrightarrow 0 \qquad (x_nx\longrightarrow 0)$$