高等学校教学用书

# 线性代数

# 学习引导

第二版

喻德生　易青　郑华盛　主编

化学工业出版社

本书参照工、管、经类《线性代数》教材的基本内容，分六章系统地阐述了线性代数教与学的问题，每章均由教学目标、内容提要、学习引导和能力测试四部分组成。教学目标分知识、领会、运用、分析综合四个能力层次，具体地阐述了线性代数教学的基本要求，能使学生明确学习目标，增强学习的主动性和目的性；内容提要用树形图表的方式简明扼要地总结、概括每章内容，能使学生掌握知识间的联系，形成牢固的知识结构；学习引导围绕教材的重点、难点，论述数学思想、教学方法、学习方法、解题方法等方面的内容，能使学生开阔视野，加深对知识的理解，从更高层次把握所学的知识；能力测试精心编选了测试题，包括判断、填空、选择、解答和证明等题型，涉及知识、领会、运用、分析综合各个能力层次的问题，每个题前都标明了正确解答该问题所要求的能力水平；书末附有能力测试题答案，以便学生巩固练习，进行能力测试及评价，明确努力的方向。

本书可作为工、管、经类线性代数课程的教学参考书和学习指导书，也可以作为报考硕士研究生的复习材料。

**图书在版编目（CIP）数据**

线性代数学习引导/喻德生，易青，郑华盛主编. —2版. —北京：化学工业出版社，2008.5
高等学校教学用书
ISBN 978-7-122-02660-6

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①喻…②易…③郑… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 056917 号

责任编辑：唐旭华　　文字编辑：郝英华
责任校对：陈　静　　装帧设计：韩　飞

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张 12　字数 292 千字　2008 年 7 月北京第 2 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：19.80 元

# 前　言

本书是根据工、管、经类线性代数课程教学的基本要求，结合当前教学改革和学生考研复习的实际需要，组织教学经验比较丰富的教师编写的。可作为线性代数课程的学习指导书和报考硕士研究生的复习资料供学生使用，也可以作为教学参考书供教师使用。

本书参照工、管、经类《线性代数》教材的基本内容，分章编写。每章均包括教学目标、内容提要、学习引导和能力测试四部分的内容。各部分编写说明如下。

一、教学目标　按照美国著名教育学家、心理学家布鲁姆博士的教学目标分类学，把线性代数教学大纲的基本要求分解成具体的教学目标，分知识、领会、运用、分析综合四个能力层次，逐点编写。目的是把教学目标交给学生，使学生领会教学大纲的精神和教师的要求，从而增强学习的主动性和目的性。

布鲁姆的教学目标分类学是一个教育的-逻辑的-心理的分类体系。它把学校教育所要达到的全部目标分为认知、情感、动作技能三大领域，其中认知领域包括知识、领会、运用、分析、综合和评价六个能力层次，每个能力层次都有明确的界定。

知识是指那些注重记忆的行为和测验情境，这种记忆是通过对观念、材料或现象的再认识或者回忆而获得的。

领会是指用来包括表明理解交流内容中所含的文字信息的各种目标、行为或者反应。在这种理解过程中，学生可能会在自己头脑中改组交流的内容，或者用自己觉得更有意义的某种类似的形式作出明显反应时改组交流的内容，还可能有一些表示对简单扩大交流本身的范围的反应。

运用某事物，需要“领会”被运用的方法、理论、原理或抽象概念。但“领会”这一类别的问题，要求学生充分了解某一抽象概念，当要求学生具体说明抽象概念的用途时，他们能够正确地加以说明。然而，“运用”要比这更进一步。当学生遇到一个新问题时，他要在没有向他提示哪个抽象概念是正确的情境中运用合适的抽象概念。“领会”的标志在于，当说明抽象概念的用途时，学生能使用该抽象概念；“运用”的标志在于，在没有说明问题解决模式的情况下，学生会正确地把该抽象概念运用于适当的情境。

分析处于领会和运用稍微高级一些的水平。“领会”注重于掌握材料的意义和含义。“运用”注重于回忆适当的抽象概念或原理，并把它们运用于特定的材料。“分析”则注重把材料分解成各个组成部分，弄清各部分之间的相互关系及其构成的方式。分析还包括那些用来传递意义或确定交流结果的技术和手段。

综合是指将各种要素和组成部分组合起来，以形成一个整体。它是一个对各种要素和组成部分进行加工的过程，是一个用这种方式将它们组合起来，以构成一种原先不太清楚的模式或结构的过程。

根据教学目标分类学理论，认知领域中各个层次的技能和能力都需要在分类等级中较低层次的技能和能力。据此我们认为较高层次的教学目标包含较低层次的教学目标。因此，在编写教学目标时，如果一个教学内容在较高层次的能力水平有所要求，我们通常不重复列出

相应的较低层次的能力水平的要求，除非这两个层次的侧重点有所不同。

二、内容提要　以章的知识结构为框架，以树形图表的方式简明扼要地总结、概括每章的主要内容。目的是对各章的教学内容进行梳理，使学生掌握知识间的联系，把零散的知识转化为系统的知识结构。在这部分中，我们通常先列出所述内容的名称，这样，当你熟悉这个名称所指的内容时就不必往下看。

三、学习引导　围绕教学内容的重点、难点，分点论述本章的数学思想、数学方法、学习方法、解题方法等内容，阐述本章内容的作用、地位以及与其他章节内容间的联系等。目的是拓宽学生的视野，加深他们对知识的理解，使学生从更高的层次把握所学的知识。

四、能力测试　以每节课约十个问题的幅度设定能力测试题，包括判断题、填空题、选择题、解答题、证明题等题型及知识、领会、运用、分析综合各个能力层次的问题。每个题之前都标明了正确解答问题所要求的能力水平。目的是便于学生巩固练习，让学生对自己的能力水平进行测试，并结合能力测试题答案作出评价，从而诊断学习中存在的问题，明确努力的方向，促进知识向能力、素质的转化。

本书由喻德生、易青、郑华盛主编，参加编写和修订的有：第一、三章郑华盛，第二章危地，第四章王金林，第五章邹水木，第六章李曦。全书最后由喻德生修改定稿。

由于水平有限，经验不足，书中疏漏、错误之处，敬请同行和读者指正。

编　者<br>于南昌航空大学<br>2008 年 3 月

# 目　　录

# 第一章　行　列　式

## 一、教学目标

**（一）知识**

1. 记住二阶、三阶行列式的定义；
2. 知道全排列、逆序、逆序数、奇排列、偶排列的定义；
3. 知道 $n$ 阶行列式的定义；
4. 记住 $n$ 阶行列式的各种记号；
5. 知道对排列进行对换的概念及其结论；
6. 知道对角行列式、上（下）三角形行列式、范德蒙德行列式的定义及结论；
7. 记住行列式关于行（列）三种运算的记号及含义；
8. 知道转置行列式的定义；
9. 知道余子式、代数余子式的定义；
10. 记住行列式按行（列）的展开法则．

**（二）领会**

1. 领会行列式的几个性质；
2. 领会行列式按行（列）的展开法则；
3. 领会求解含有 $n$ 个未知数 $n$ 个方程的线性方程组的克拉默法则；
4. 领会含 $n$ 个未知数 $n$ 个方程的齐次线性方程组有非零解与系数行列式是否等于零之间的关系．

**（三）运用**

1. 会利用对角线法则计算二阶、三阶行列式；
2. 会求排列的逆序数，确定排列的奇偶性；
3. 会利用 $n$ 阶行列式的定义求简单的行列式；
4. 会利用行列式的性质化行列式为上（下）三角形行列式，从而计算行列式的值；
5. 会求行列式中某一元素的余子式、代数余子式；
6. 会利用行列式按行（列）展开法则计算行列式；
7. 会用克拉默法则求解含 $n$ 个未知数 $n$ 个方程的线性方程组；
8. 会用克拉默法则求解齐次线性方程组中含有待定系数的问题．

**（四）分析综合**

1. 综合运用行列式的定义及性质计算行列式；
2. 综合运用行列式的性质及行列式按行（列）展开法则计算行列式；
3. 综合运用行列式的性质及行列式按行（列）展开法则证明关于行列式的等式；
4. 综合运用行列式按行（列）的展开法则、递推法和数学归纳法计算或证明关于行列

式的问题.

## 二、内容提要

- **基本概念**
  - **全排列与逆序数**
    - $n$ 个元素的全排列⇔$n$ 个不同的元素排成一列.
    - 逆序⇔一个排列中,某两个元素的先后次序与标准次序不同.
    - 逆序数⇔一个排列中所有逆序的总数.
    - 奇排列⇔逆序数为奇数的排列.
    - 偶排列⇔逆序数为偶数的排列.
    - 由 $n$ 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的 $n!$个排列中,奇偶排列个数相等,各占一半,即$\frac{n!}{2}$个.
  - **对换**
    - 定义
      - 对换⇔排列中,将任意两个元素对调、其余的元素不动,做出新排列的手续.
      - 相邻对换⇔相邻两个元素的对换.
    - 性质
      - 一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.
      - 奇(偶)排列调成标准排列的对换次数为奇(偶)数.
  - $n$ 阶行列式的定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = \sum(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}.$$

记作 $\det(a_{ij})$,其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,$t$ 为排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数.

- **行列式的性质**
  - **基本性质**
    - 行列式与它的转置行列式相等.
    - 互换行列式的两行(列),行列式变号.

      特例↓
    - 行列式有两行(列)完全相同,行列式等于零.
    - 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 $k$,等于用 $k$ 乘此行列式.

      特例↓↑推广
    - 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.
    - 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.
    - 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,则此行列式可写成两个行列式之和的形式.
    - 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数加到另一行(列)对应的元素上去,行列式值不变.
  - **展开性质**
    - 余子式与代数余子式
      - 元素 $a_{ij}$ 的余子式 $M_{ij}$⇔在 $n$ 阶行列式 $\det(a_{ij})$ 中,把元素 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行和第 $j$ 列划去后,留下来的 $n-1$ 阶行列式.
      - 元素 $a_{ij}$ 的代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.
    - 展开法则
      - 行列式的值等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}.$$

$$(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$$

      - 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j) \text{ 或 } a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j).$$

**行列式的计算方法**

- 定义法：利用行列式的定义计算，适用于行列式中有许多元素为零的情形．
- 性质法：利用行列式的基本性质化行列式为上(下)三角形计算．
- 展开法：利用行列式的按行(列)展开法则计算．
- 范德蒙德法：化行列式为范德蒙德行列式的形式计算．
- 递推法：利用行列式的性质或展开法则，找出递推关系进行计算．
- 数学归纳法：利用不完全归纳法寻找行列式的猜想值，用数学归纳法严格证明．
- 观察一次因式法：通过观察或变换，结合行列式的性质找出行列式的所有一次因式进行计算．
- 加边法：在行列式的值不变的情况下，加上特殊的一行一列进行计算．

**克拉默法则**

- 非齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$ 的系数行列式 $D=\det(a_{ij})\neq 0\Rightarrow$ 方程组有惟一解：

  $\begin{cases} x_1=D_1/D, \\ x_2=D_2/D, \\ \cdots\cdots \\ x_n=D_n/D. \end{cases}$ 其中 $D_i=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$；反之，如果该方程组无解或有两个不同的解，则系数行列式 $D=0$.

- 齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$ 系数行列式　$D=\det(a_{ij})\neq 0\Rightarrow$ 方程组只有零解；

  反之，如果齐次线性方程组有非零解，则系数行列式 $D=0$.

## 三、学习引导

### (一) 学习方法概述

行列式是线性代数的一个基本概念，它不仅是讨论线性方程组理论的有力工具，而且在其他领域里也是经常使用的．学好行列式，首先要正确理解 $n$ 阶行列式的定义，明确行列式的本质是一个数．$n$ 阶行列式没有直观的几何意义，比较抽象，应把它与特殊的用对角线法则定义的二阶、三阶行列式联系起来，作为其推广的一般情形，这对于正确理解 $n$ 阶行列式的定义有很大的帮助．在此基础上，要熟练掌握行列式的基本性质及行列式按行（列）展开的方法．要掌握计算行列式的一般方法：对于低阶行列式，一般用定义、或性质、或展开法则可以直接得到；对于高阶行列式，一般是利用展开法则化为低阶行列式，或利用行列式的性质化为特殊的行列式，如上（下）三角行列式，对角行列式等，然后进行计算．另外，也要了解计算行列式的其他特殊技巧，如数学归纳法、递推法、观察一次因式法、加边法等．作为行列式的一个应用，要掌握求解含有 $n$ 个未知数 $n$ 个方程的线性方程组的克拉默法则，并进一步掌握含 $n$ 个未知数 $n$ 个方程的齐次线性方程组有非零解的必要条件．总之，在学习过程中，要理顺该章内容的主线，掌握由具体的到抽象的，由特殊的到一般的普遍的认识规律，把抽象的、一般的概念与具体的、特殊的概念联系起来，对于行列式的学习是有很大帮助的．

### （二）行列式的基本概念

1．全排列与逆序数

（1）全排列的定义　把 $n$ 个不同元素排成一列，叫做这 $n$ 个元素的全排列．注意这里的元素可以是任何数字，也可以是人、是物，但不管是什么，我们都可以用 1，2，…，$n$ 这 $n$ 个数字来标记这 $n$ 个元素．这样，任意 $n$ 个元素的排列，就可以转化为 1 至 $n$ 这 $n$ 个自然数的排列．因此，教材中所说的排列，通常理解为 1 至 $n$ 这 $n$ 个自然数的排列（参看例 2）．

（2）逆序数的定义　逆序数的定义是建立在排列以及排列的标准顺序之上的．由于任何一个排列可以抽象成 1 至 $n$ 这 $n$ 个自然数的排列，其标准顺序可以抽象成由小到大的自然顺序，因此逆序数可以简单地理解为：

在 1 至 $n$ 这 $n$ 个自然数的排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，任取一对数，如果较大的数排在较小的数之前，就称这对数构成一个逆序．排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数的总数称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$．

**【例 1】** 求下列排列的逆序数

① 4132；② $13\cdots(2n-1)24\cdots2n$；③ $n(n-1)(n-2)\cdots321$.

**解** ① 在排列 4132 中，4 排在首位，逆序数为 0；1 前面的 4 比 1 大，逆序数为 1；3 前面的 4 比 3 大，逆序数为 1；2 前面的 4 和 3 都比 2 大，逆序数为 2；于是这个排列的逆序数为 $\tau(4132)=0+1+1+2=4$.

② 元素 1，3，…，$2n-1$ 的逆序数均为 0；2，4，6，…，$2n$ 的逆序数分别为 $n-1$，$n-2$，$n-3$，…，2，1，0，故该排列的逆序数为

$$\tau[13\cdots(2n-1)24\cdots2n]=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1).$$

③ 元素 $n$，$n-1$，$n-2$，…，3，2，1 的逆序数分别为 0，1，2，…，$n-2$，$n-1$，故该排列的逆序数为

$$\tau[n(n-1)\cdots321]=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1).$$

2．排列的分类与对换

自然数可以分成奇数和偶数（包括零）．因此可以得到排列的一个分类，即

$$\text{排列}\begin{cases}\text{奇排列：逆序数为奇数的排列，}\\\text{偶排列：逆序数为偶数的排列．}\end{cases}$$

对换可以看成是由一个排列得到另一个排列的一种变换，一个排列经过一次这样的变换，只改变其中两个元素的位置．对换具有改变排列奇、偶性的性质，即奇（偶）排列经过一次对换后得到一个偶（奇）排列．据此，易知所有 $n$ 阶排列共有 $n!$ 个，其中奇、偶排列各 $\frac{n!}{2}$ 个．

**【例 2】** 试确定 $i$ 与 $j$，使① $1245i6j97$ 为奇排列；② $3972i15j4$ 为偶排列．

**解** ① 显然 $i$，$j$ 只能取 8，3 两个数，若取 $i=3$，$j=8$ 时，$\tau(124536897)=4$，排列 124536897 为偶排列，由对换的性质，要满足要求，必须取 $i=8$，$j=3$.

② 显然 $i$，$j$ 只能取 6，8 两个数，若取 $i=6$，$j=8$ 时，$\tau(397261584)=20$，排列 397261584 为偶排列，满足要求，故取 $i=6$，$j=8$.

3．$n$ 阶行列式的定义

$n$ 阶行列式有如下三种等价形式的定义，

即
$$\begin{aligned}\det(a_{ij}) &= \sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}\\ &= \sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}\\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n},\end{aligned}$$
其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 和 $q_1q_2\cdots q_n$ 是自然数 1，2，…，$n$ 的排列，$\sum$表示对所有 $n!$ 个排列求和．

理解行列式的定义，应注意：（ⅰ）行列式是一个数值，这个数值不仅与 $n^2$ 个元素 $a_{ij}$（$i$，$j=1$，2，…，$n$）有关，而且与 $a_{ij}$ 在数表
$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}$$
中的位置有关；（ⅱ）行列式是 $n!$ 个项的代数和，而每一项都是取自不同行、不同列的 $n$ 个元素的积，其中每项的符号取决于各元素行标和列标排列的逆序数，且取“＋”的项和取“－”的项各占$\frac{n!}{2}$个；（ⅲ）行列式关于行和列是对称的，因此有多种关于行标和列标形式的等价定义；（ⅳ）$n$ 阶行列式是二阶、三阶行列式的推广，但不能用二阶、三阶行列式类似的“直观化”定义得到．

**【例 3】** 有一个五阶行列式，$a_{21}a_{32}a_{45}a_{13}a_{54}$ 为其中一项，试确定其符号．

**解法一** 将项 $a_{21}a_{32}a_{45}a_{13}a_{54}$ 改写为 $a_{13}a_{21}a_{32}a_{45}a_{54}$，由定义，该项的符号为$(-1)^{\tau(31254)}=(-1)^3=-1$，故该项的符号为负号．

**解法二** 由第三种形式的定义知，其符号为$(-1)^{\tau(23415)+\tau(12534)}=(-1)^{3+2}=-1$，故该项的符号为负号．

**【例 4】** 证明一个 $n$ 阶行列式中，如果等于 0 的元素的个数大于 $n^2-n$，则此行列式为 0.

**证** 行列式共有 $n^2$ 个元素，则非零元素的个数小于 $n^2-(n^2-n)=n$，而行列式的每一项都是不同行不同列 $n$ 个元素的乘积，从而可知每一项至少有一个 0 元素，故所求行列式为 0.

**【例 5】** 求 $f(x)=\begin{vmatrix}5x & 1 & 2 & 3\\ x & x & 1 & 2\\ 1 & 2 & x & 3\\ x & 1 & 2 & 2x\end{vmatrix}$ 中 $x^4$ 与 $x^3$ 的系数．

**解** 行列式展开式中的每一项为 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$，要出现 $x^4$，则 $a_{ip_i}$ 都要取到包含 $x$ 的元素，从而含 $x^4$ 的项为 $(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=(-1)^0\cdot 5x\cdot x\cdot x\cdot 2x=10x^4$，故 $x^4$ 的系数为 10.

含 $x^3$ 的项是 $(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$，$(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$，故 $x^3$ 的系数是$-2-3=-5$.

**（三）行列式的性质**

1. 行列式的基本性质

行列式的基本性质可以分成两类：第一类是由一个行列式 $D$ 得到另一个（或两个）行列式 $D_1$（或 $D_1$，$D_2$）的性质；第二类是直接得出行列式结果的性质．这两类的进一步分类及标记如下．

$$
\text{行列式的基本性质}\begin{cases}
\text{第一类}\begin{cases}
\text{行列式的转置：} D \xlongequal{\mathrm{T}} D_1 \\
\text{行列式的初等变换}\begin{cases}
D \xlongequal{r_i \leftrightarrow r_j\ (\text{或 } c_i \leftrightarrow c_j)} -D_1 \\
D \xlongequal{r_i + kr_j\ (\text{或 } c_i + kc_j)} D_1 \\
D \xlongequal{r_i \div k\ (\text{或 } c_i \div k)} kD_1
\end{cases} \\
\text{行列式的分解：} D \xlongequal{r_i = r_{i1} + r_{i2}\ (\text{或 } c_i = c_{i1} + c_{i2})} D_1 + D_2
\end{cases} \\
\text{第二类}\begin{cases}
D \xlongequal{r_i = r_j\ (\text{或 } c_i = c_j)} 0 \\
D \xlongequal{r_i = kr_j\ (\text{或 } c_i = kr_j)} 0
\end{cases}
\end{cases}
$$

其中在行列式的分解中，$D_1$、$D_2$ 分别是以 $r_{i1}$、$r_{i2}$（或 $c_{i1}$、$c_{i2}$）为第 $i$ 行（列）的矩阵．

行列式的第二类基本性质可以由第一类基本性质得出．因此前者（特别是行列式的初等变换性质）更为重要．

行列式的基本性质，是计算行列式的基础，正确使用这些性质，应注意如下几点：

(1) 在通常情况下，一般不能循环使用行列式的一个性质，这是因为循环使用行列式的性质，得到的是行列式本身．例如 $D \xlongequal{r_i \leftrightarrow r_j} D_1 \xlongequal{r_j \leftrightarrow r_i} D$.

(2) 在通常情况下，$D_1$（或 $D_1$、$D_2$）的计算不应比 $D$ 的计算更难，否则没有必要使用相应的性质．

(3) 使用行列式的基本性质时，应注意行（列）与行（列）、元素与元素之间对应的运算关系及元素的“$\pm$”号，否则容易出错．

(4) 应在求解过程之前用文字说明使用的性质或在“$=$”号上正确地标明使用的性质，以便检查．例如，$r_i + kr_j$ 表示将第 $r_j$ 行的 $k$ 倍加到第 $i$ 行上，也就是说做变换的那一行必须写在前面，而且其系数必须为“$+1$”．因此，把行列式的第 $j$ 行加到第 $i$ 行上，不能写成 $r_j + r_i$，也不能出现诸如 $-r_i + r_j$、$2r_i + 3r_j$ 之类的记号．

例如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{-r_1+r_2}{\neq} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

(5) 在一次变换中，可以施行两个或两个以上的形如 $r_i + kr_j$ 之类的变换．例如

$$D \xlongequal{r_i + k_1 r_{j1}} D_1 \xlongequal{r_i + k_2 r_{j2}} D_2 \Longleftrightarrow D \xlongequal{r_i + k_1 r_{j1} + k_2 r_{j2}} D_2$$

这是因为 $D_1$ 的第 $i$ 行为 $r_i + k_1 r_{j1}$，第 $j_2$ 行就是 $D$ 的第 $j_2$ 行 $r_{j2}$．因此在 $D_1$ 上施行 $r_i + k_2 r_{j2}$，$D_2$ 的第 $i$ 行就是 $(r_i + k_1 r_{j1}) + k_2 r_{j2} = r_i + k_1 r_{j1} + k_2 r_{j2}$.

(6) 在一个等号上，可以同时施行两个或两个以上不同的行列式的初等变换．例如

$$D \xlongequal{r_1 + k_1 r_3} D_1 \xlongequal{r_2 + k_2 r_3} D_2 \Longleftrightarrow D \xlongequal[r_2 + k_2 r_3]{r_1 + k_1 r_3} D_2$$

这是因为 $D_1$、$D_2$ 的第 1 行都是 $r_1 + k_1 r_3$，$D_1$ 的第 2、3 行就是 $D$ 的第 2、3 行，因此在 $D_1$ 上施行 $r_2 + k_2 r_3$ 就相当于在 $D$ 上施行 $r_2 + k_2 r_3$.

但应注意，在一个等号上由 $D$ 到 $D_1$ 所做的所有初等变换中，所涉及的行（列）都应是 $D$ 的行（列），而不能一些是指 $D$ 的行（列），另一些是 $D_1$ 的行（列），以免混淆．例如以下做法

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_2 - c_1 \\ c_3 - c_1}]{\substack{c_1 + c_2 + c_3 \\ c_1 \div 2}} 2 \begin{vmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & -a_1 & -b_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 & -a_2 & -b_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 & -a_3 & -b_3 \end{vmatrix}$$

是不妥的，这是因为第一个列变换中的列是指前一个行列式的列，而第二至四个列变换中的列是指后一个行列式中的列．

(7) 在一个等号上，设行列式 $D$ 经若干初等变换得到 $D_1$，那么 $D_1$ 必须至少有一行（列）和 $D$ 的这一行（列）相同，因此 $n$ 阶行列式在一个等号上最多可以施行 $n-1$ 次复合的初等变换．并且，在一个等号上，切记不能同时施行 $r_i-r_j$ 及 $r_j-r_i$ 两个变换，这是因为任何行列式同时施行这两个变换都等于 0.

**【例 6】** 证明 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

**证法一** 左边 $\xlongequal{c_1+c_2+c_3}\begin{vmatrix} 2(a_1+b_1+c_1) & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ 2(a_2+b_2+c_2) & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ 2(a_3+b_3+c_3) & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_1\div 2}2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2+c_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3+c_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}\xlongequal{c_1-c_2}2\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3-c_1}2\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix}\xlongequal{c_2-c_3}2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\text{右边}.$$

**证法二** 将第一列看成是两列之和，利用行列式的分解性质后，再利用证法一的结论得

$$\text{左边}\xlongequal{c_1=c_{11}+c_{12}}\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\text{右边}.$$

**证法三** 左边各列依次使用行列式的分解性质，将左边表示成 $2^3$ 个行列式之和可证．

**【例 7】** 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 301 \\ 1 & 2 & 102 \\ 2 & 4 & 199 \end{vmatrix}$.

**解** $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 300+1 \\ 1 & 2 & 100+2 \\ 2 & 4 & 200-1 \end{vmatrix}\xlongequal{c_3=c_{31}+c_{32}}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 300 \\ 1 & 2 & 100 \\ 2 & 4 & 200 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_1+c_2+c_3}0+\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}\xlongequal{c_1\div 5}5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-3r_2}5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}=-25.$$

2. 行列式的展开性质

设 $D=\det(a_{ij})$ 为 $n$ 阶行列式，则

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

$$\text{或}\ a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，$M_{ij}$ 称为元素 $a_{ij}$ 的余子式．

利用行列式的展开式，可以把高阶的行列式，化为低阶的行列式，从而简化行列式的计算．但要使用行列式的展开性质，必须熟练掌握余子式和代数余子式的概念．

**【例 8】** 设行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$，则第 4 行各元素余子式之和的值为________． (2001 年考研题)

**解** 第 4 行各元素余子式之和为：$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$.

根据行列式按行展开定理知

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=(-7)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=7\begin{vmatrix}3&4&0\\4&4&0\\-1&-1&1\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}3&4\\4&4\end{vmatrix}=-28.$$

**【例 9】** 计算 $D=\begin{vmatrix}1&0&a&1\\0&-1&b&-1\\-1&-1&c&1\\-1&1&d&0\end{vmatrix}$.

**解** 按第 3 列展开得 $D=aA_{13}+bA_{23}+cA_{33}+dA_{43}$.

其中

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&-1&-1\\-1&-1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=3,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\-1&1&0\end{vmatrix}=0,\quad A_{43}=(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\-1&-1&1\end{vmatrix}=3.$$

所以
$$D=3a+3b+0\cdot c+3d=3(a+b+d).$$

**【例 10】** 设 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\5&5&5&3&3\\3&2&5&4&2\\2&2&2&1&1\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}$，求：① $A_{31}+A_{32}+A_{33}$；② $A_{34}+A_{35}$.

**解** 将 $D$ 中第 3 行的元素换成第 2 行的对应元素，此时第 2 行与第 3 行的对应元素相等，行列式等于 0，按第 3 行展开得

$$5(A_{31}+A_{32}+A_{33})+3(A_{34}+A_{35})=0. \tag{1-1}$$

同理，将 $D$ 中第 3 行的元素换成第 4 行的对应元素，按第 3 行展开，有

$$2(A_{31}+A_{32}+A_{33})+A_{34}+A_{35}=0. \tag{1-2}$$

联立式(1-1)、式(1-2) 求解得 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=0$，　$A_{34}+A_{35}=0$.

**(四) 行列式的计算方法**

计算一般的 $n$ 阶行列式，应注意把握如下三种思想方法．一是降阶，即把高阶的行列式转化为低阶的行列式．由于低阶的行列式元素数及行（列）数少，计算起来通常较高阶的行列式容易，因此通常把高阶行列式转化为低阶行列式来计算．二是特殊化，即把一般的 $n$ 阶行列式化为对角行列式、上（下）三角行列式或其他已知其结果的行列式来计算．三是零化，就是把一般的行列式化为具有尽可能多的零元素的行列式，从而减少行列式的非零项，有效地利用行列式的展开式．具体地说，有如下几种方法．

1. 定义法

利用行列式的定义计算高阶行列式，通常较繁．但若行列式中的零元素很多，可考虑用定义法计算．

**【例 11】** 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

**解** 行列式中有许多元素为零，由行列式的定义，它等于位于不同行不同列的 $n$ 个元素乘积的代数和，于是只要确定那些不为零的项即可，故

$$\begin{aligned} D_n &=(-1)^{\tau[(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot n]}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn} \\ &=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot 1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!. \end{aligned}$$

2. 性质法

利用行列式的基本性质，特别是利用行列式的初等变换把行列式化为上（下）三角行列式来计算．

**【例 12】** 计算 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.　　(1989 年考研题)

**解** $D_4 \xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1\div x} x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\substack{c_3-c_1 \\ c_4+c_1}]{c_2+c_1} x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2\leftrightarrow c_3]{c_1\leftrightarrow c_4} (-1)^2 x\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=x^4.$$

【例 13】 计算 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

**解法一** 将各列都加到第 1 列，再从第 1 列提出 $a+(n-1)b$，然后将第 1 行乘以 $-1$ 分别加到第 2，3，…，$n$ 行，得

$$D_n=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\ \cdots\cdots \\ r_n-r_1}]{r_2-r_1}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

**解法二**

$$D_n\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\ \cdots\cdots \\ r_n-r_1}]{r_2-r_1}\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\cdot(a-b)^{n-1}.$$

【例 14】 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

**解** $$D_n\xlongequal[\substack{c_3-c_2\\ \cdots\cdots \\ c_n-c_{n-1}}]{c_2-c_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3+r_1\\ \cdots\cdots \\ r_n+r_1}]{r_2+r_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 0 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n+1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot(n+1).$$

3. 展开法

利用行列式的按行（列）展开法则，把高阶行列式降为低阶行列式计算．这种方法适用

于某行或某列中零元素较多的情形.

【例 15】 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于（ ）. （1996 年考研题）

A. $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$； B. $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$；

C. $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$； D. $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$.

**解** 按第 1 列展开行列式，得

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} + b_4\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_4\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} + b_4\cdot(-1)^5\cdot b_1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4).$$

故选择 D.

【例 16】 计算 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$. （1991 年考研题）

**解** 按第 1 列展开，得

$$D_n = a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n-1} + b(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}_{n-1}.$$

$$=a\cdot a^{n-1}+b\cdot(-1)^{n+1}\cdot b^{n-1}=a^n+(-1)^{n+1}\cdot b^n.$$

注 由于行列式中有许多元素为零，该题也可用行列式的定义求解.

4. 范德蒙德法

利用行列式的性质化所求行列式为范德蒙德行列式的形式，由已知范德蒙德行列式的值求得所求行列式的值.

【例 17】 计算 $D=\begin{vmatrix} am & bm & cm & dm \\ a^2n & b^2n & c^2n & d^2n \\ a^3e & b^3e & c^3e & d^3e \\ a^4f & b^4f & c^4f & d^4f \end{vmatrix}$.

**解** $$D \xlongequal[r_3\div e, r_4\div f]{r_1\div m, r_2\div n} mnef\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3\div c,c_4\div d]{c_1\div a,c_2\div b} mnefabcd\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$=abcdefmn(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

**【例 18】** 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$.

**解** $D_n \xlongequal{T} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2^n & 3^n & \cdots & n^n \end{vmatrix} \xlongequal[c_n\div n]{c_2\div 2 \atop c_3\div 3} n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$

$$=n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)]$$

$$=n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!.$$

5. 递推法

利用行列式的性质或展开法则，把给定的 $n$ 阶行列式 $D_n$ 用具有同样形式的 $n-1$ 阶或更低阶行列式表示出来，即找出递推关系，然后根据递推关系式求出 $D_n$.

**【例 19】** 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

**解** 将 $D_n$ 按第 1 行展开得递推关系式

$$D_n=2D_{n-1}-D_{n-2},$$

因此有 $D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}=\cdots=D_2-D_1=1$,

因此 $D_n=1+D_{n-1}=2+D_{n-2}=\cdots=(n-1)+D_1=n-1+2=n+1.$

**【例 20】** 计算 $D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$.

**解** 按第 1 列展开 $D_n$ 得递推关系式

$$D_n=xD_{n-1}+a_n,$$

同理得 $D_{n-1}=xD_{n-2}+a_{n-1}$，$D_{n-2}=xD_{n-3}+a_{n-2}$，…，$D_3=xD_2+a_3$，$D_2=xD_1+a_2$，$D_1=x+a_1$