YU HUANGJIN FENGE
YOU GUAN DE
JISHU HE SHULIE

石崇鑫◎编著

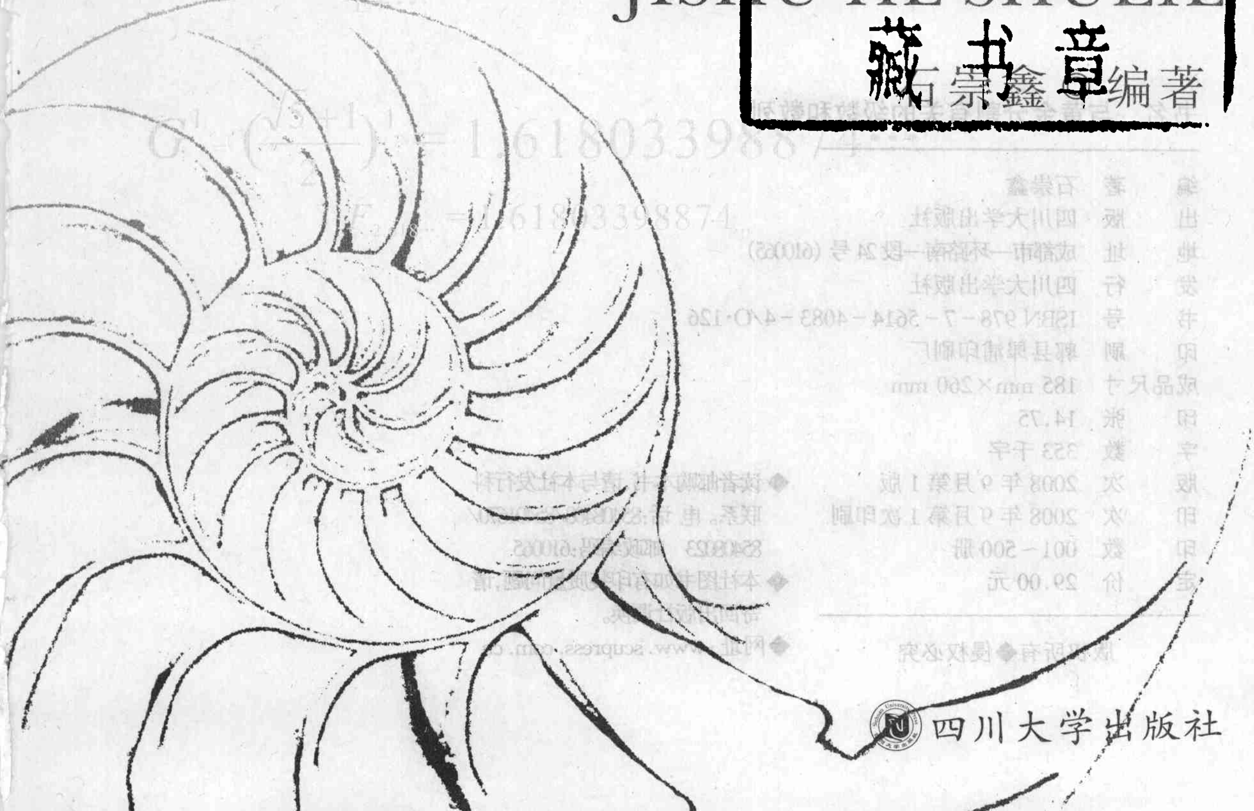
与黄金分割有关的级数和数列

四川大学出版社

与黄金分割有关的级数和数列

YU HUANGJIN FENGE YOU GUAN DE JISHU HE SHULIE

石崇鑫 编著



四川大学出版社

责任编辑：廖庆扬
责任校对：曾 鑫
封面设计：米茄设计工作室
责任印制：李 平

图书在版编目(CIP)数据

与黄金分割有关的级数和数列／石崇鑫编著．—成都：四川大学出版社，2008.7
ISBN 978-7-5614-4083-4

Ⅰ．与… Ⅱ．①石… Ⅲ．①级数②数列 Ⅳ．O173

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 110578 号

书名 **与黄金分割有关的级数和数列**

编　著	石崇鑫
出　版	四川大学出版社
地　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　行	四川大学出版社
书　号	ISBN 978-7-5614-4083-4/O·126
印　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　张	14.75
字　数	353 千字
版　次	2008 年 9 月第 1 版
印　次	2008 年 9 月第 1 次印刷
印　数	001～500 册
定　价	29.00 元

◆读者邮购本书，请与本社发行科联系。电 话：85408408/85401670/85408023 邮政编码：610065
◆本社图书如有印装质量问题，请寄回出版社调换。
◆网址：www.scupress.com.cn

内容简介——代前言

《与黄金分割有关的级数和数列》这本书稿经过三十多年的努力，终于准备出书进行交流了。

《与黄金分割有关的级数和数列》与初等数论有关，探讨的内容包括代数部分和几何部分，全书共分两篇。第一篇“黄金代数学”探讨的内容有三章，第一章为“无限全等阶连分数”；第二章为“斐波那契数”；第三章为“黄金数”。第二篇“黄金几何学”探讨的内容有一章，为“等比直角三角形数列及其图形”。

第一章“无限全等阶连分数”分十三节对连分数进行了讨论。在探讨方法上与传统研究连分数的方法有所不同。传统研究连分数的方法是采取辗转相除法将二次根式演化成循环连分数，其特点是各阶的分母是循环的，各阶的分子都是1。“无限全等阶连分数”探讨的是采取假设的方法，先设连分数各阶的分母都等于a，各阶的分子都等于b，然后采取逼近的方法求出其极限。因此“无限全等阶连分数”的特点是各阶的分母和分子都是一样的。当连分数的各阶分母a和各阶分子b都等于1时，有形如下列连分数：

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}$$

简记为：$\dfrac{1}{1+\downarrow}$

这个连分数的每一个渐进分数实际上就是两个斐波那契数之比。当渐进分数取值趋向无限大时，这个连分数有一个极限，这个极限就是黄金分割数，即0.618033989…

全书的主要内容在第二章至第四章。因第一章里，当无限全等阶连分数的各阶的分子和分母都等于1时，连分数的每个渐进分数、连分数的极限与连分数的n次幂的基阶分母的系数之和与斐波那契数、黄金数和卢卡斯数有关，所以，我们把它收录于书中。由于第一章阅读起来非常枯燥，大家在阅读时，完全可以跳过第一章，直接从第二章开始。

第二章“斐波那契数”共有十一节，探讨的内容除了包括斐波那契数的两种通项表达式以外，还涉及斐波那契数的和项（F_{n+m}）、差项（F_{n-m}）、倍项（F_{nm}）、分项（$F_{\frac{n}{m}}$）、幂项（F_{n^m}）公式，此外还探讨了斐波那契数的负数项（F_{-n}）与小数项（$F_{n+\frac{p}{q}}$）。当然斐波那契数列本身就是一列与黄金分割有关的数列。

第三章“黄金数”共有七节，探讨的是以黄金分割数$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1.618033989\cdots$为底的一列数列。数列设代码$G^n=(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n$，探讨了黄金数的各种各样的代数形态。黄金数除了有代码形态、小数数值形态以外，还有二次根式乘幂形态、二次根式乘幂展开式形态、斐波那契数形态、连分数形态等十多种形态。此外还探讨了由黄金数展现的黄金曲线与斐波那契数展现的折线的坐标关系，黄金曲线对斐波那契折线中的每一段都进行黄金分割的函数图形。

第四章“等比直角三角形数列及其图形”共有二十节，探讨的是等比直角三角形数列及其几何图形，这种数列是黄金数的一种特例，属等比数列。数列中任意相邻的三项都可以组成一个直角三角形，且这个直角三角形的三条边也成等比例关系。全部数列可以组成一串等比直角三角形链。本章对数列和链进行了比较详尽的讨论，其中包括斐波那契数通项式的几何图形、卢卡斯数通项式的几何图形、黄金数的几何图形以及黄金旋臂的几何图形。等比直角三角形链很可能与宇宙的数学模型——黄金分割模型有关。《与黄金分割有关的级数和数列》很可能是我们探讨宇宙某种模型的数学基础，我们将在另一篇文章《宇宙的黄金分割模型——宇宙若干问题的假说》中进行深入的探讨。

全书的第一章“无限全等阶连分数”曾参阅并采用陈景润老师的《初等数论》中关于连分数渐进分数的表示方法。第二章“斐波那契数”通项表达式（1）曾全文引用史剂怀老师用母函数证明的方法。除第一章与第二章的部分内容与业内少数人士交流过以外，第三章与第四章的内容尚是第一次与大家见面。因《与黄金分割有关的级数和数列》与初等数论有关，里面有许多新的数学公式的推导证明过程十分繁杂，在推导、证明、演算、书写、打印、校对过程中难免出现一些错误。在这里，我诚恳地向大家表示，欢迎大家随时批评指正，以便在再版时进行修改。同时，对在编写本书过程中提供过帮助的各位老师、编辑深表感谢！

石崇鑫

二〇〇七年四月一十二日

目录

第一篇　黄金代数学

第2篇　黄金几何学

第1篇　黄金代数学

第1章　无限全等阶连分数

1.1　全等阶连分数的基本概念

1.1.1　和式有限全等阶连分数

设 a_1 和 b_1 都是大于0的实数，而 $a_2, a_3, \cdots, a_n$ 和 $b_2, b_3 \cdots, b_n$ 都是大于0的实数，我们把分数

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cdots+\cfrac{b_n}{a_n}}}} \tag{1-1-1}$$

叫做和式有限连分数. 由于(1－1－1)式的写法很占篇幅，我们把(1－1－1)式改写成

$$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+\cdots+\frac{b_n}{a_n} \tag{1-1-2}$$

如果(1－1－2)式中的 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n=a, b_1=b_2=b_3=\cdots=b_n=b$，且 a 与 b 都大于0，我们又可以把(1－1－2)式改写成

$$\underbrace{\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\cdots+\frac{b}{a}}_{n\text{个}} \tag{1-1-3}$$

或缩写成

$$\frac{b}{a+\downarrow_n}. \tag{1-1-4}$$

(1－1－3)式与(1－1－4)式，我们把它叫做和式有限全等阶连分数，或和式 n 阶全等阶连分数. (1－1－3)式中的每一个分数 $\frac{b}{a}$ 叫做1个阶，n 个 $\frac{b}{a}$ 就有 n 个阶. (1－1－4)式中的 $\frac{b}{a}$ 是连分数的第1阶，我们把它叫做基阶；"$\downarrow_n$"号代表从第2阶到第 n 阶；"＋"代表各阶是以求和的方式连结起来的. 知道和式有限全等阶连分数的基阶和阶数，我们可以毫

无困难地写出整个连分数.

例 1－1－1　已知和式有限全等阶连分数的基阶为$\frac{3}{5}$,并知道它有 5 个阶,写出这个连分数.

解　这个连分数为$\frac{3}{5+\downarrow_5}$,或写作

$$\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}.$$

定义 1－1－1　当 $1\leqslant k\leqslant n$ 是一个整数时,我们把$\frac{b}{a+\downarrow_k}=\frac{p_k}{q_k}$叫做(1－1－4)式$\frac{b}{a+\downarrow_n}$的第 k 个渐进分数.

由定义 1－1－1 可知,$\frac{p_k}{q_k}$是和第 1 阶到第 k 阶有关的,但是和第 $k+1$ 阶到第 n 阶没有关系.

由定义 1－1－1,我们还得知,

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{b}{a},$$

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{b}{a}+\frac{b}{a}=\frac{ab}{a^2+b},$$

$$\frac{p_3}{q_3}=\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a}=\frac{a^2b+b^2}{a^3+2ab}.$$

由于$\frac{p_1}{q_1}=\frac{b}{a}$,所以有　$p_1=b,q_1=a$;

由于$\frac{p_2}{q_2}=\frac{ab}{a^2+b}$,所以有　$p_2=ab=bq_1,q_2=a^2+b=aq_1+p_1$;

由于$\frac{p_3}{q_3}=\frac{a^2b+b^2}{a^3+2ab}$,所以有

$$p_3=a^2b+b^2=b(a^2+b)=bq_2,$$

$$q_3=a^3+2ab=a(a^2+b)+ab=aq_2+p_2.$$

更一般地,有表 1－1 的递推关系.

表 1－1

阶	1	2	3	4	…	$k-1$	k
$p=b$	$b=p_1$	$bq_1=p_2$	$bq_2=p_3$	$bq_3=p_4$	…	$bq_{k-2}=p_{k-1}$	$bq_{k-1}=p_k$
$q=a$	$a=q_1$	$aq_1+p_1=q_2$	$aq_2+p_2=q_3$	$aq_3+p_3=q_4$	…	$aq_{k-2}+p_{k-2}=q_{k-1}$	$aq_{k-1}+p_{k-1}=q_k$

连续仿照上面的式子进行推算,即能得到(1－1－5)式,即

$$p_k=bq_{k-1},q_k=aq_{k-1}+p_{k-1}.\qquad(1-1-5)$$

当 $b=a$ 时,有表 1－2 的递推关系.

表 1－2

阶	1	2	3	4	…	$k-1$	k
$p=b$ $b=a$	$a=p_1$	$aq_1=p_2$	$aq_2=p_3$	$aq_3=p_4$	…	$aq_{k-2}=p_{k-1}$	$aq_{k-1}=p_k$
$q=a$	$a=q_1$	$aq_1+p_1=q_2$	$aq_2+p_2=q_3$	$aq_3+p_3=q_4$	…	$aq_{k-2}+p_{k-2}=q_{k-1}$	$aq_{k-1}+p_{k-1}=q_k$

当 $b=1$ 时，有表 1－3 的递推关系.

表 1－3

阶	1	2	3	4	…	$k-1$	k
$p=b$ $b=1$	$1=p_1$	$q_1=p_2$	$q_2=p_3$	$q_3=p_4$	…	$q_{k-2}=p_{k-1}$	$q_{k-1}=p_k$
$q=a$	$a=q_1$	$aq_1+1=q_2$	$aq_2+q_1=q_3$	$aq_3+q_2=q_4$	…	$aq_{k-2}+q_{k-3}=q_{k-1}$	$aq_{k-1}+q_{k-2}=q_k$

例 1－1－2　计算 $\dfrac{2}{6+\downarrow_7}$ 的值.

解　$\dfrac{2}{6+\downarrow_7}$ 的前 6 个近似分数为：$\dfrac{2}{6},\dfrac{12}{38},\dfrac{76}{240},\dfrac{480}{1516},\dfrac{3032}{9576},\dfrac{19152}{60488}$. 由(1－1－5)式，有

$$\frac{p_7}{q_7}=\frac{bq_6}{aq_6+p_6}=\frac{2\times 60488}{6\times 60488+19152}=\frac{120976}{382080}=0.316624790\cdots$$

因此　$\dfrac{2}{6+\downarrow_7}=0.316624790\cdots$

例 1－1－3　计算 $\dfrac{1}{4+\downarrow_8}$ 的值.

解　$\dfrac{1}{4+\downarrow_8}$ 的前 7 个近似分数为：$\dfrac{1}{4},\dfrac{4}{17},\dfrac{17}{72},\dfrac{72}{305},\dfrac{305}{1292},\dfrac{1292}{5473},\dfrac{5473}{23184}$. 由表 1－3 的递推关系，有

$$\frac{p_8}{q_8}=\frac{23184}{4\times 23184+5473}=\frac{23184}{98209}=0.236067\cdots$$

因此　$\dfrac{1}{4+\downarrow_8}=0.236067\cdots$

1.1.2　差式有限全等阶连分数

设 a_1 和 b_1 都是大于 0 的实数，而 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 和 $b_2,b_3,\cdots,b_n$ 都是大于 0 的实数，我们把分数

$$\cfrac{b_1}{a_1-\cfrac{b_2}{a_2-\cfrac{b_3}{a_3-\cdots-\cfrac{b_n}{a_n}}}}\tag{1－1－6}$$

叫做差式有限连分数. 同样由于(1－1－6)式的写法很占篇幅，我们把其改写成

$$\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}-\frac{b_3}{a_3}-\cdots-\frac{b_n}{a_n} \tag{1-1-7}$$

如果式中的 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n=a$，$b_1=b_2=b_3=\cdots=b_n=b$，且 a 与 b 都大于 0，$a^2\geqslant 4b$.（注：当 $a^2<4b$ 时，连分数具有发散性，而无限连分数出现虚数值.我们将在后面的章节里讨论 $a^2=4|b|$，$a^2>4|b|$ 和 $a^2=4|b|$ 的情况，这里我们设连分数都具有实数值）则我们同样可以把(1-1-7)式改写成如下形式：

$$\underbrace{\frac{b}{a}-\frac{b}{a}-\frac{b}{a}-\cdots-\frac{b}{a}}_{n\text{ 个}} \tag{1-1-8}$$

或缩写成

$$\frac{b}{a-\downarrow_n}. \tag{1-1-9}$$

(1-1-8)式与(1-1-9)式，我们把它叫做差式有限全等阶连分数，或差式 n 阶全等阶连分数.(1-1-8)式中的每一个分数 $\frac{b}{a}$ 叫做 1 个阶，n 个 $\frac{b}{a}$ 就有 n 个阶.(1-1-9)式中的 $\frac{b}{a}$ 是连分数的第 1 阶，我们把它叫做基阶；“$\downarrow_n$”号代表第 2 阶到第 n 阶；“$-$”代表各阶是以求差的方式连结起来的.知道差式有限全等阶连分数的基阶和阶数，我们可以毫无困难地写出整个连分数.

例 1-1-4 已知差式有限全等连分数的基阶为 $\frac{4}{7}$，并知道它有 8 个阶，写出这个连分数.

解 这个连分数为 $\frac{4}{7-\downarrow_8}$，或写作

$$\frac{4}{7}-\frac{4}{7}-\frac{4}{7}-\frac{4}{7}-\frac{4}{7}-\frac{4}{7}-\frac{4}{7}-\frac{4}{7}.$$

定义 1-1-2 当 $1\leqslant k\leqslant n$ 是一个整数时，我们把 $\frac{b}{a-\downarrow_k}=\frac{p_k}{q_k}$ 叫做(1-1-9)式 $\frac{b}{a-\downarrow_n}$ 的第 k 个渐进分数.

由定义 1-1-2 可以知道，$\frac{p_k}{q_k}$ 是和第 1 阶到 k 阶有关的，但是和第 $k+1$ 阶到第 n 阶没有关系.

由定义 1-1-2 我们还得知，

$\frac{p_1}{q_1}=\frac{b}{a}$，

$\frac{p_2}{q_2}=\frac{b}{a}-\frac{b}{a}=\frac{ab}{a^2-b}$，

$$\frac{p_3}{q_3}=\frac{b}{a}\,\underset{-}{}\,\frac{b}{a}\,\underset{-}{}\,\frac{b}{a}=\frac{a^2b-b^2}{a^3-2ab}.$$

由于$\frac{p_1}{q_1}=\frac{b}{a}$，所以有 $p_1=b, q_1=a$；

由于$\frac{p_2}{q_2}=\frac{ab}{a^2-b}$，所以有 $p_2=ab=bq_1, q_2=a^2-b=aq_1-p_1$；

由于$\frac{p_3}{q_3}=\frac{a^2b-b^2}{a^3-2ab}$，所以有

$p_3=a^2b-b^2=b(a^2-b)=bq_2$，

$q_3=a^3-2ab=a(a^2-b)-ab=aq_2-p_2$.

更一般地，有表1－4的递推关系.

表1－4

阶	1	2	3	4	…	$k-1$	k
$p=b$	$b=p_1$	$bq_1=p_2$	$bq_2=p_3$	$bq_3=p_4$	…	$bq_{k-2}=p_{k-1}$	$bq_{k-1}=p_k$
$q=a$	$a=q_1$	$aq_1-p_1=q_2$	$aq_2-p_2=q_3$	$aq_3-p_3=q_4$	…	$aq_{k-2}-p_{k-2}=q_{k-1}$	$aq_{k-1}-p_{k-1}=q_k$

连续按照上面的式子进行推算，即能得到(1－1－10)式，即

$$p_k=bq_{k-1}, q_k=aq_{k-1}-p_{k-1}. \qquad (1-1-10)$$

当$b=a$时，有表1－5的递推关系.

表1－5

阶	1	2	3	4	…	$k-1$	k
$p=b$ $b=a$	$a=p_1$	$aq_1=p_2$	$aq_2=p_3$	$aq_3=p_4$	…	$aq_{k-2}=p_{k-1}$	$aq_{k-1}=p_k$
$q=a$	$a=q_1$	$aq_1-p_1=q_2$	$aq_2-p_2=q_3$	$aq_3-p_3=q_4$	…	$aq_{k-2}-p_{k-2}=q_{k-1}$	$aq_{k-1}-p_{k-1}=q_k$

当$b=1$时，有表1－6的递推关系.

表1－6

阶	1	2	3	4	…	$k-1$	k
$p=b$ $b=1$	$1=p_1$	$q_1=p_2$	$q_2=p_3$	$q_3=p_4$	…	$q_{k-2}=p_{k-1}$	$q_{k-1}=p_k$
$q=a$	$a=q_1$	$aq_1-1=q_2$	$aq_2-q_1=q_3$	$aq_3-q_2=q_4$	…	$aq_{k-2}-q_{k-3}=q_{k-1}$	$aq_{k-1}-q_{k-2}=q_k$

例1－1－5 计算$\frac{3}{5-\downarrow_5}$的值.

解 $\frac{3}{5-\downarrow_5}$的前4个近似分数为$\frac{3}{5},\frac{15}{22},\frac{66}{95},\frac{285}{409}$. 由(1－1－10)式，有

$$\frac{p_5}{q_5}=\frac{bq_4}{aq_4-p_4}=\frac{3\times409}{5\times409-285}=\frac{1227}{1760}=0.697159\cdots$$

因此 $\dfrac{3}{5-\downarrow_5}=0.697159\cdots$

例 1－1－6 计算$\dfrac{4}{4-\downarrow_4}$的值.

解 $\dfrac{4}{4-\downarrow_4}$的前 3 个近似分数为$\dfrac{4}{4}$，$\dfrac{16}{12}$，$\dfrac{48}{32}$.

由于$\dfrac{48}{32}=\dfrac{3}{2}$，所以$\dfrac{p_3}{q_3}=\dfrac{3}{2}$，即 $p_3=3,q_3=2$.

由表 1－5 的递推关系，有

$$\frac{p_4}{q_4}=\frac{aq_3}{aq_3-p_3}=\frac{4\times2}{4\times2-3}=\frac{8}{5}=1.6,$$

因此 $\dfrac{4}{4-\downarrow_4}=1.6$.

1.1.3 和式无限全等阶连分数

如果和式全等连分数的阶不是有限的，而是无限的，那么则有

$$\underbrace{\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\cdots+\frac{b}{a}+\cdots}_{\text{无穷多个}} \tag{1－1－11}$$

或缩写成

$$\frac{b}{a+\downarrow}. \tag{1－1－12}$$

我们把(1－1－11)式和(1－1－12)式叫做和式无限全等阶连分数.(1－1－12)式中的$\dfrac{b}{a}$仍表示连分数的基阶，“↓”号表示从第 2 阶到无穷尽阶，“＋”号表示无穷多个$\dfrac{b}{a}$用求和的方式连接起来. 我们看到，用“↓”号表示第 2 阶与第 2 阶以后的阶要比(1－1－11)式的书写方法简便得多. 我们还将看到，无限全等阶连分数在进行加、减、乘、除、乘方、开方等各种运算时，用“↓”号来表示连分数的第 2 阶和第 2 阶以后的阶是十分省事的.

对于和式无限全等阶连分数，我们仍然规定$\dfrac{p_k}{q_k}=\dfrac{b}{a+\downarrow_k}$是$\dfrac{b}{a+\downarrow}$的第 k 个渐进分数. 当 $k\to\infty$时，$\dfrac{p_k}{q_k}$有一个极限，我们把这一极限叫做连分数的值. 在 1.4 节里我们将讨论这一极限与二次根式有关.

在以后的章节里，如不特殊声明，我们把和式无限全等阶连分数$\dfrac{b}{a+\downarrow}$常简称为和式连分数，而把和式有限全等阶连分数$\dfrac{b}{a+\downarrow_n}$仍叫做和式有限全等阶连分数，把和式无限循环连分数(或无限不等阶连分数)叫做和式不等阶连分数. 这样，既方便讨论问题，又方便区别各种不同的连分数.

1.1.4 差式无限全等阶连分数

如果差式全等阶连分数的阶不是有限的，而是无限的，那么则有

$$\underbrace{\frac{b}{a}-\frac{b}{a}-\frac{b}{a}-\cdots-\frac{b}{a}-\cdots}_{\text{无穷多个}} \tag{1-1-13}$$

或缩写成

$$\frac{b}{a-\downarrow}. \tag{1-1-14}$$

我们把(1－1－13)式和(1－1－14)式叫做差式无限全等阶连分数，(1－1－14)式中的$\frac{b}{a}$仍表示连分数的基阶，"↓"号表示从第2阶到无穷尽阶，"－"号表示无穷多个$\frac{b}{a}$用求差的方式连接起来.

对于差式无限全等阶连分数，我们仍然规定$\frac{p_k}{q_k}=\frac{b}{a-\downarrow_k}$是$\frac{b}{a-\downarrow}$的第$k$个渐进分数.当$k\to\infty$时，$\frac{p_k}{q_k}$有一个极限，我们把这一极限叫做连分数的值.差式无限全等阶连分数同和式无限全等阶连分数一样，它的极限也与二次根式有关.我们将看到，无论是和式无限全等阶连分数，还是差式无限全等阶连分数，都具有收敛性，但是收敛的特点却不相同.这一点，我们将在下一节中讨论.

在以后的章节里，如不特殊声明，我们把差式无限全等阶连分数$\frac{b}{a-\downarrow}$简称为差式连分数，而把差式有限全等阶连分数$\frac{b}{a-\downarrow_n}$仍叫做差式有限全等阶连分数，把差式无限循环分数(或无限不等阶连分数)叫做差式不等阶连分数.这样，既方便我们讨论问题，又方便区别各种不同的连分数.

1.2 无限全等阶连分数的收敛性

1.2.1 和式连分数的收敛特点

引理1－2－1 设$\frac{p_k}{q_k}(k=1,2,\cdots)$是$\frac{b}{a+\downarrow}$($a$和$b$都是大于零的实数)的第$k$个渐进分数，则当$k\geqslant2$时，有

$$p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k=(-1)^{k-1}b^k; \tag{1-2-1}$$

而当$k\geqslant3$时，有

$$p_kq_{k-2}-p_{k-2}q_k=(-1)^kab^{k-1}. \tag{1-2-2}$$

(1－2－1)式证明如下：

证 由于$p_2=ab=bq_1,q_1=a,p_1=b,q_2=a^2+b=aq_1+p_1$，故有

$$p_2q_1-p_1q_2=ab\cdot a-b\cdot(a^2+b)=a^2b-a^2b-b^2=-b^2.$$

所以，当 $k=2$ 时，(1－2－1)式成立.

现设 $k\geqslant 3$，设(1－2－1)式当 $k-1$ 时是成立的，即

$$p_{k-1}q_{k-2}-p_{k-2}q_{k-1}=(-1)^{k-2}b^{k-1},$$

则由表 1－1，有

$$\begin{aligned}p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k&=bq_{k-1}(aq_{k-2}+p_{k-2})-bq_{k-2}(aq_{k-1}+p_{k-1})\\&=bp_{k-2}q_{k-1}-bp_{k-1}q_{k-2}\\&=-b(p_{k-1}q_{k-2}-p_{k-2}q_{k-1})\\&=(-b)(-1)^{k-2}b^{k-1}\\&=(-1)^{k-1}b^k,\end{aligned}$$

故由数学归纳法得知(1－2－1)式成立.

(1－2－2)式证明如下：

证 由于 $p_3=b(a^2+b)=bq_2$，$q_1=a$，$p_1=b$，$q_3=a^3+2ab=aq_2+p_2$，所以有

$$p_3q_1-p_1q_3=abq_2-abq_2-bp_2=-ab^2.$$

所以，当 $k=3$ 时，(1－2－2)式成立.

现设 $k\geqslant 4$，设(1－2－2)式当 $k-1$ 时是成立的，即

$$p_{k-1}q_{k-3}-p_{k-3}q_{k-1}=(-1)^{k-1}ab^{k-2},$$

则由表 1－1，有

$$\begin{aligned}p_kq_{k-2}-p_{k-2}q_k&=bq_{k-1}(aq_{k-3}+p_{k-3})-bq_{k-3}(aq_{k-1}+p_{k-1})\\&=bp_{k-3}q_{k-1}-bp_{k-1}q_{k-3}\\&=-b(p_{k-1}q_{k-3}-p_{k-3}q_{k-1})\\&=(-b)(-1)^{k-1}ab^{k-2}\\&=(-1)^kab^{k-1},\end{aligned}$$

故由数学归纳法得知(1－2－2)式成立.

引理 1－2－1 得证. 显然(1－2－1)式和(1－2－2)式也适合和式有限全等阶连分数.

引理 1－2－2 若 $\dfrac{p_k}{q_k}(k=1,2,\cdots)$ 是 $\dfrac{b}{a+\downarrow}$(a 和 b 都是大于零的实数)的第 k 个渐进分数，则当 $k\geqslant 2$ 时，有

$$\frac{p_{2k-3}}{q_{2k-3}}>\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}>\frac{p_{2k}}{q_{2k}}>\frac{p_{2(k-1)}}{q_{2(k-1)}}.\tag{1－2－3}$$

证 由于连分数的各阶都是 $\dfrac{b}{a}$，而 a 与 b 都是大于零的实数，并由(1－1－5)式，有 $p_1,p_2,\cdots,p_k,\cdots$ 和 $q_1,q_2,\cdots,q_k,\cdots$ 都是大于等于 1 的实数，由(1－2－2)式得

$$\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}-\frac{p_{2k-3}}{q_{2k-3}}=\frac{p_{2k-1}q_{2k-3}-p_{2k-3}q_{2k-1}}{q_{2k-1}q_{2k-3}}=\frac{(-1)^{2k-1}ab^{2k-2}}{q_{2k-1}q_{2k-3}}<0,$$

故得 $\dfrac{p_{2k-3}}{q_{2k-3}}>\dfrac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}$.

由(1−2−1)式得

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}}-\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}=\frac{p_{2k}q_{2k-1}-p_{2k-1}q_{2k}}{q_{2k}q_{2k-1}}=\frac{(-1)^{2k-1}b^{2k}}{q_{2k}q_{2k-1}}<0,$$

故得 $\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}>\frac{p_{2k}}{q_{2k}}$.

又由(1−2−2)式得

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}}-\frac{p_{2(k-1)}}{q_{2(k-1)}}=\frac{p_{2k}q_{2(k-1)}-p_{2(k-1)}q_{2k}}{q_{2k}q_{2(k-1)}}=\frac{(-1)^{2k}ab^{2k-1}}{q_{2k}q_{2(k-1)}}>0,$$

故得 $\frac{p_{2k}}{q_{2k}}>\frac{p_{2(k-1)}}{q_{(2k-1)}}$.

引理1−2−2得证.

引理1−2−3 设$\frac{p_k}{q_k}(k=1,2,\cdots)$是$\frac{b}{a+\downarrow}$($a$与$b$都是大于零的实数)的第$k$个渐进分数,则当$k\to\infty$时,$\frac{p_k}{q_k}$有一个极限,则有

$$\frac{p_1}{q_1}>\frac{p_3}{q_3}>\frac{p_5}{q_5}>\frac{p_7}{q_7}>\frac{p_9}{q_9}>\cdots>\frac{b}{a+\downarrow}>\cdots>\frac{p_{10}}{q_{10}}>\frac{p_8}{q_8}>\frac{p_6}{q_6}>\frac{p_4}{q_4}>\frac{p_2}{q_2}. \quad (1-2-4)$$

继续使用引理1−2−2,即可证明.

1.2.2 差式连分数的收敛特点

引理1−2−4 设$\frac{p_k}{q_k}(k=1,2,\cdots)$是$\frac{b}{a-\downarrow}$($a$和$b$都是大于零的实数,且$a^2\geqslant 4b$)的第$k$个渐进分数,则当$k\geqslant 2$时,有

$$p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k=b^k; \quad (1-2-5)$$

而当$k\geqslant 3$时,有

$$p_kq_{k-2}-p_{k-2}q_k=ab^{k-1}. \quad (1-2-6)$$

(1−2−5)式证明如下:

证 由于 $p_2=ab=bq_1, q_1=a, p_1=b, q_2=a^2-b=aq_1-p_1$,

有 $p_2q_1-p_1q_2=ab\cdot a-b\cdot(a^2-b)=b^2$.

所以,当$k=2$时,(1−2−5)式成立.

现设$k\geqslant 3$,设(1−2−5)式当$k=1$时是成立的,即

$$p_{k-1}q_{k-2}-p_{k-2}q_{k-1}=b^{k-1},$$

则由表1−4,有

$$\begin{aligned}p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k&=bq_{k-1}(aq_{k-2}-p_{k-2})-bq_{k-2}(aq_{k-1}-p_{k-1})\\&=(-bp_{k-2}q_{k-1})-(-bp_{k-1}q_{k-2})\\&=b(p_{k-1}q_{k-2}-p_{k-2}q_{k-1})\\&=b\cdot b^{k-1}\\&=b^k,\end{aligned}$$

故由数学归纳法得知(1－2－5)式成立.

(1－2－6)式证明如下：

由于 $p_3=b(a^2-b)=bq_2, q_1=a, p_1=b, q_3=a^3-2ab=aq_2-p_2$,

有

$$p_3q_1-p_1q_3=abq_2-abq_2+bp_2=ab^2.$$

所以，当 $k=3$ 时，(1－2－6)式成立.

现设 $k\geqslant 4$，设(1－2－6)式当 $k-1$ 时是成立的，即

$$p_{k-1}q_{k-3}-p_{k-3}q_{k-1}=ab^{k-2},$$

则由表1－4，有

$$\begin{aligned}p_kq_{k-2}-p_{k-2}q_k &=bq_{k-1}(aq_{k-3}-p_{k-3})-bq_{k-3}(aq_{k-1}-p_{k-1})\\&=(-bp_{k-3}q_{k-1})-(-bp_{k-1}q_{k-3})\\&=b(p_{k-1}q_{k-3}-p_{k-3}q_{k-1})\\&=b\cdot ab^{k-2}\\&=ab^{k-1},\end{aligned}$$

故由数学归纳法得知(1－2－6)式成立.

引理1－2－4得证. 显然(1－2－5)式和(1－2－6)式也适合差式有限全等阶连分数.

引理1－2－5 若 $\frac{p_k}{q_k}(k=1,2,\cdots)$ 是 $\frac{b}{a-\downarrow}$(a 和 b 都是大于零的实数，且 $a^2\geqslant 4b$)的第 k 个渐进分数，则当 $k\geqslant 2$ 时，有

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}>\frac{p_k}{q_k}>\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}. \tag{1－2－7}$$

证 由于连分数的各阶都是 $\frac{b}{a}$，而 a 与 b 是大于零的实数，且 $a^2\geqslant 4b$，并由(1－1－10)式，有 $p_1,p_2,\cdots,p_k,\cdots$ 和 $q_1,q_2,\cdots,q_k,\cdots$ 都是大于零的实数，由(1－2－5)式，有

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}-\frac{p_k}{q_k}=\frac{p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}}{q_{k+1}q_k}=\frac{b^{k+1}}{q_{k+1}q_k}>0,$$

$$\frac{p_k}{q_k}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}=\frac{p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k}{q_kq_{k-1}}=\frac{b^k}{q_kq_{k-1}}>0,$$

故得 $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}>\frac{p_k}{q_k}>\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$.

用(1－2－6)式仍可证明

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}=\frac{p_{k+1}q_{k-1}-p_{k-1}q_{k+1}}{q_{k+1}q_{k-1}}=\frac{ab^k}{q_{k+1}q_{k-1}}>0,$$

故引理1－2－5得证.

引理1－2－6 设 $\frac{p_k}{q_k}(k=1,2,\cdots)$ 是 $\frac{b}{a-\downarrow}$(a 和 b 都是大于零的实数，且 $a\geqslant 4b$)的第 k 个渐进分数，则当 $k\to\infty$ 时，$\frac{p_k}{q_k}$ 趋近于一个极限，则有