中国数学奥林匹克协作体学校培训教材

高中奥数专题讲座与模拟训练

主编 李 迅 陈德燕
顾问 裘宗沪 吴建平

GAOZHONG AOSHU ZHUANTIJIANGZUO YU MONIXUNLIAN

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

最新数学竞赛书目

- 高中奥数培优捷径（上册）
- 高中奥数培优捷径（下册）
- 高中竞赛数学教程
- 竞赛数学解题策略
- 高中奥数专题讲座与模拟训练
- 高中数学联赛一试知识与方法

ISBN 978-7-308-06088-2

9 787308 060882 >

定价：22.00元

中国数学奥林匹克协作体学校培训教材

高中奥数专题讲座与模拟训练

主　编　李　迅　陈德燕

顾　问　裘宗沪　吴建平

编　者　苏　淳　李　生　范永春　肖登鹏
王　欣　张　宁　李兴怀　李　智
薛玉财　邹新宇　顾　滨　邹　明
张　雷　郭希连　汤步斌　李　岩
万　军　周海宁　方廷刚　徐　瑢
张新泽　李振权

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中奥数专题讲座与模拟训练/李迅、陈德燕主编. —杭州：浙江大学出版社，2008.7
ISBN 978-7-308-06088-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①李…②陈… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 095018 号

高中奥数专题讲座与模拟训练

李 迅 陈德燕 主编

责任编辑	沈国明 冯其华(特邀)
出版发行	浙江大学出版社 (杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028) (E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn) (网址：http://www.zjupress.com http://www.press.zju.edu.cn) 电话：0571－88925592，88273066(传真)
排 版	杭州大漠照排印刷有限公司
印 刷	富阳市育才印刷有限公司
开 本	787×1092mm 1/16
印 张	13.25
字 数	322 千
版 印 次	2008 年 7 月第 1 版 2008 年 7 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-308-06088-2
定 价	22.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

序一

在老一辈数学家的倡导和众多数学工作者、数学教师的共同努力下，我国的数学奥林匹克活动得到了较好的发展，取得了丰硕的成果和丰富的经验。近年来出现的一个现象正在引起社会的关注：国内有一批很好的中学，她们把数学奥林匹克活动规范到学校校本课程之中。在这些学校，学生但凭兴趣学习数学，不必奔波于社会上各种“奥班”或“奥校”之间，学得很生动、很有效。这些学校实际上已成为数学和科学人才发现、国际数学奥林匹克选手成长的沃土，如中国人大附中、东北师大附中、湖北武钢三中、华中师大一附中、华东师大二附中、广东深圳中学、浙江镇海中学等学校，在 2006—2007 年的两届 IMO 中，均有两人次入选中国代表队。尤其令人兴奋的是，在这些学校参加过数学奥林匹克活动的学生差不多都是发展较全面、高考成绩最好的学生，而且进入大学学习后，其发展的优势更为明显。

数学奥林匹克也为发现数学人才作出了贡献。素有国际数学界最高荣誉之称的菲尔兹奖，其得主中不少人就曾在 IMO 初试啼声，如俄罗斯的 Gregori Margulis(1962 年获 IMO 银牌，1978 年获菲尔兹奖)；乌克兰的 Valdimir Drinfeld (1969 年获 IMO 金牌，1990 年获菲尔兹奖)；法国的 Jean - Christophe Yoccoz (1974 年获 IMO 金牌，1994 年获菲尔兹奖)；英国的 Richard Borcherds (1977 年获 IMO 金牌，1998 年获菲尔兹奖)；英国的 Timothy Gowers(1981 年获 IMO 金牌，1998 年获菲尔兹奖)；法国的 Laurant Lafforgue (1985 年获 IMO 银牌，2002 年获菲尔兹奖)。而 2006 年菲尔兹奖得主华裔天才陶哲轩，更是于 1986、1987 和 1988 年连续三次在 IMO 中获奖，其不满 13 岁就赢得金牌的纪录至今无人能破。

事实上，学生科学精神和创新品质的培养从来都是具体的教育活动。规范的数学奥林匹克活动体现的正是素质教育的要求，其中就渗透了丰富多彩的研究性学习。对数学

奥林匹克活动这个客观存在，教育管理者和专家应本着实事求是的态度开展研究。

值得庆幸的是，国内一些在数学奥林匹克活动中成绩卓著的学校，为了探索数学科学人才发现与培养的规律、总结数学奥林匹克活动的经验和教训这个值得称道的目的，共同构筑了一个交流的平台——中国数学奥林匹克协作体学校（以下简称“协作体”）。协作体由东北师大附中、东北育才学校、哈尔滨师大附中、大连第二十四中学、中国人民大学附中、清华大学附中、山东青岛二中、江苏盐城中学、上海中学、上海延安中学、复旦大学附中、福建福州一中、湖北黄冈中学、湖北武钢三中、华中师大一附中、湖南师大附中、湖南长沙一中、四川成都七中、华南师大附中、深圳中学等 20 所中学组成。协作体成立近 8 年，开展了一系列有意义的活动，如一年一度的数学夏令营，由中国数学奥委会的委员和协作体学校教师进行讲座和辅导。因此夏令营不仅给那些优秀的数学爱好者提供了交流学习心得的时空舞台，而且通过专家和教师的“教”，实现对教师的培训，促进了数学教师的成长。协作体在实践中显示出旺盛的生命力，较好地促进了中国数学奥林匹克活动和科学教育的健康发展。

第八届中国数学奥林匹克协作体夏令营将于 2008 年 7 月在福建省福州第一中学举办。本书收录的是本次夏令营的活动资料。不难看出，书中内容并不以难取胜，而是通过精选的材料帮助学生理解数学思想、方法，训练学生分析问题、解决问题的能力，因而具有很好的针对性和实用性。

随着科学技术的发展，数学的重要性会不断为人类所认识，年轻一代学习数学的热情会更加高涨。如何通过数学奥林匹克活动这种被广泛接受的形式更好地发现和培养数学和科学人才，无疑是一个很有价值的课题。祝愿协作体和所有有相同志趣的学校在数学和科学人才的发现与培养方面不断取得新的成果、新的经验。

裘宗沪

2008 年 6 月

序二

我所了解的中国数学奥林匹克协作体

1999年11月“全国高级中学校长委员会会议”在广州召开，会议期间，中国数学奥林匹克委员会约请有关学校的校长召开了一个小型研讨会，裘宗沪教授主持了这个会议，我当时也应邀参加了。有来自8个省份的16家学校参加：东北育才学校、上海中学、华南师大附中、湖南师大附中、武钢三中、大连第二十四中、人大附中、清华附中、青岛二中、盐城中学、复旦附中、上海延安中学、华中师大一附中、黄冈中学、长沙一中、深圳中学。

会议回顾了开展数学竞赛活动的历史并分析了现状，介绍了各自学校开设数学选修课及活动课的情况，交流探索了数学与科学人才发现和培养的规律，大家一致认为共同构筑一个平台是十分必要的，于是就有了“中国数学奥林匹克协作体”，中国数学奥林匹克委员会作为这个协助体的业务指导单位。

校长们为这个“俱乐部”制定了若干规则，明确了工作任务：

1. 每两年召开一次协作体学校校长会议，确定大政方针；每两年由两位校长共同担任轮值主席，负责实施这两年的工作（2000—2001年的轮值主席是东北育才学校和华南师大附中，2002—2003年的轮值主席是湖南师大附中和武钢三中，2004—2005年的轮值主席是清华附中和大连第二十四中，2006—2007年的轮值主席是华中师大一附中和深圳中学，2008—2009年的轮值主席是福州第一中学和青岛二中）。

2. 偶数年份召开一次部分校长参加的小会议，奇数年份召开全体成员学校校长参加的大会议，以便确定未来的发展方针（我记得参加了2002年至2006年召开的五次会议，2007年由于全国高中数学联赛试卷复评工作会议与在深圳中学召开的校长会冲突而未能参加）。

3. 每年3月份在中国国家集训队选拔活动期间，各成员学校选派两名学生单独组成一个训练班，并且确定协作体学校的五位老师组成教练组，一方面协助国家教练组的工作，一方面也让这些老师增强交流与合作。

4. 每年暑假举办一次协作体内部的高中数学夏令营，出版或汇编由各成员学校提供的专题讲座、模拟试题，供协作体成员校使用。本书就是由这次夏令营的举办方福州一中组织出版的。

在 2003 年 9 月长沙召开第三次协作体成员校校长会议上，增补福州一中和东北师大附中为新成员，至此协作体成员校达到了 18 家，涉及 10 个省份。

在 2005 年 10 月大连召开的第四次协作体成员校校长会议上，增补成都七中和哈师大附中为新成员，至此协作体成员校达到了 20 家，涉及 12 个省份。

9 年来(2000 年至 2008 年)，协作体的工作在成员学校各位领导的关心支持和老师们的悉心努力下，取得了令人瞩目的成绩，为我国的数学奥林匹克事业作出了显著的贡献，从下面的数据(截至 2008 年)可略见一斑，在参加 IMO 的中国代表队 54 人次中有 37 人次来自“协作体”成员校：

2000 年	2001 年	2002 年	2003 年	2004 年	2005 年	2006 年	2007 年	2008 年
华南师大附中	东北育才学校	东北育才学校	华南师大附中	华南师大附中	上海复旦附中	深圳中学	深圳中学	北京人大附中
华南师大附中	湖北武钢三中	武钢三中	武钢三中	上海中学	深圳中学	东北师大附中	东北师大附中	上海中学
上海中学	湖南师大附中	湖南师大附中	湖南师大附中	华南师大附中	天津耀华中学	天津耀华中学	人大附中	华中师大一附中
长沙一中	湖南长沙一中	清华附中	长沙一中	湖南师大附中	华东师大二附中	武钢三中	湖南师大附中	华东师大二附中
湖北黄冈中学	北京人大附中	华东师大二附中	清华附中	黄冈中学	江西师大附中	华中师大一附中	武钢三中	山东师大附中
江苏常州中学	江苏启东中学	西安铁一中	四川彭州中学	江西鹰潭一中	石家庄二中	浙江镇海中学	浙江镇海中学	浙江嘉兴一中

衷心祝愿中国数学奥林匹克协作体不断取得新的成绩。

2008 年 6 月 16 日

目　　录

专题讲座 …… 1
1. 函数性质研究及其应用 …… 1
2. 递归数列 …… 9
3. 函数与数列 …… 13
4. 不等式的证明方法与技巧 …… 18
5. 几个重要不等式及其应用 …… 24
6. 圆锥曲线 …… 31
7. 轨迹方程 …… 40
8. 离散极值 …… 46
9. 几何著名定理及其应用 …… 54
10. 几何不等式 …… 58
11. 组合恒等式、组合不等式 …… 64
12. 组合几何 …… 70
13. 组合杂题 …… 76
14. 组合几何问题 …… 82
15. 同余 …… 86
16. 数学竞赛中的初等数论问题 …… 97
17. 操作变换问题 …… 104
18. 图论与染色 …… 112
19. 多项式 …… 118

模拟训练 …… 123
全国高中数学联赛模拟试题(一) …… 123
全国高中数学联赛模拟试题(二) …… 125
全国高中数学联赛模拟试题(三) …… 127
全国高中数学联赛模拟试题(四) …… 129
全国高中数学联赛模拟试题(五) …… 131
全国高中数学联赛模拟试题(六) …… 133
全国高中数学联赛模拟试题(七) …… 135
全国高中数学联赛模拟试题(八) …… 137

全国高中数学联赛模拟试题(九) …………………………………………… 139
全国高中数学联赛模拟试题(十) …………………………………………… 141
全国高中数学联赛模拟试题(十一) ………………………………………… 143
全国高中数学联赛模拟试题(十二) ………………………………………… 145
全国高中数学联赛模拟试题(十三) ………………………………………… 147
全国高中数学联赛模拟试题(十四) ………………………………………… 149
全国高中数学联赛模拟试题(十五) ………………………………………… 151
全国高中数学联赛模拟试题(十六) ………………………………………… 153

模拟试题参考答案 ……………………………………………………… 155

专题讲座

1. 函数性质研究及其应用

江苏盐城中学 李 生

函数是数学中最重要的概念,它贯穿于整个中学教学,渗透到数学的每一个分支与领域,函数的思想也是一种重要的数学思想,对函数的研究与考察,是中学数学的一个重点,也是数学竞赛的热点内容,本专题侧重对竞赛中函数性质及其应用问题进行研究.

一、函数解析式问题

函数的解析式是函数的基本表现形式,针对函数的解析式确定研究函数性质的方法,是解决函数问题的一种基本策略.

例1 已知 $f(x)=x^2+ax+b$.

(1) 求证:$|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$ 三数中至少有一个不小于$\frac{1}{2}$;

(2) 是否存在满足 $|f(1)|=|f(2)|=|f(3)|=\frac{1}{2}$ 的函数 $f(x)$,若存在求出所有的函数 $f(x)$,若不存在,说明理由.

分析 至多、至少问题常用反证法进行证明,对于存在型问题,常可假设存在,再结合条件分析,或导出矛盾,可求得满足条件的结果.

证明:(1) 用反证法.假设 $|f(1)|<\frac{1}{2}$,$|f(2)|<\frac{1}{2}$,$|f(3)|<\frac{1}{2}$,则由 $f(1)=1+a+b$,$f(2)=4+2a+b$,$f(3)=9+3a+b$,得 $f(1)-2f(2)+f(3)=2$ (*)

那么,$2=|f(1)-2f(2)+f(3)|\leqslant|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|<\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$ 矛盾.

所以 $|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$ 中至少有一个不小于$\frac{1}{2}$.

(2) 假设这样的 $f(x)$ 存在,由 $|f(1)|=|f(2)|=|f(3)|=\frac{1}{2}$,得到下列8种情形:

① $f(1)=f(2)=f(3)=\frac{1}{2}$;

② $f(1)=f(2)=f(3)=-\frac{1}{2}$;

③ $f(1)=f(2)=\frac{1}{2},f(3)=-\frac{1}{2}$;

④ $f(1)=f(2)=-\frac{1}{2},f(3)=\frac{1}{2}$;

⑤ $f(1)=f(3)=\frac{1}{2},f(2)=-\frac{1}{2}$;

⑥ $f(1)=f(3)=-\frac{1}{2},f(2)=\frac{1}{2}$;

⑦ $f(2)=f(3)=\frac{1}{2},f(1)=-\frac{1}{2}$;

⑧ $f(2)=f(3)=-\frac{1}{2},f(1)=\frac{1}{2}$.

由于 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{1}{2}$ 或 $y=-\frac{1}{2}$ 至多只有两个交点,故情形 ①② 不可能;又若 $f(1)=f(2)=\frac{1}{2}$,知 $y=f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{3}{2}$,依 $y=f(x)$ 的单调性知:$f(3)>f(2)=\frac{1}{2}$,故情形 ③ 不可能;同样情形 ⑥,⑦ 不可能;又情形 ④,⑧ 不满足(1)问中(*)式,故情形 ④,⑧ 不可能;下面为情形 ⑤:

由$\begin{cases}f(1)=1+a+b=\frac{1}{2},\\ f(2)=4+2a+b=-\frac{1}{2},\\ f(3)=9+3a+b=\frac{1}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-4,\\ b=\frac{7}{2},\end{cases}$

故存在唯一的 $f(x)=x^2-4x+\frac{7}{2}$.

例 2 把函数 $F(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ 表示为两个次数不同的实系数多项式函数平方差的形式.

分析 多项式函数解析式研究.

解: 设 $x^4+x^3+x^2+x+1=[f(x)]^2-[g(x)]^2$，由题意，$f(x)$ 为二次多项式，$g(x)$ 的次数低于 2 次，故可设 $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+a$，

$[f(x)]^2=x^4+x^3+\left(2a+\frac{1}{4}\right)x^2+ax+a^2$，

$[g(x)]^2=[f(x)]^2-x^4-x^3-x^2-x-1$

$=\left(2a-\frac{3}{4}\right)x^2+(a-1)x+(a^2-1)$，上式为完全平方式，$\Delta=0$ 得，

$$\begin{cases}2a-\frac{3}{4}>0,\\(a-1)(4a^2+2a-1)=0,\end{cases}\quad 得\ a=1,$$

故可得： $x^4+x^3+x^2+x+1$

$$=\left(x^2+\frac{1}{2}x+1\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2.$$

二、函数的基本性质

函数的基本性质主要包括函数的单调性、奇偶性、周期性的研究及定义域、值域、最值的探求.

例 3 (1) 已知 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4$（$a,b$ 为实数）且 $f(\lg\log_3 10)=5$，则 $f(\lg\lg 3)$ 的值是 ( )

A. -5

B. -3

C. 3

D. 随 a,b 取不同值而取不同值

解: 注意到 $\lg\lg 3=-\lg\log_3 10$，设 $g(x)=f(x)-4=a\sin x+b\sqrt[3]{x}$ 是奇函数，从而 $f(-x)=-[f(x)-4]$，即 $f(-x)=-f(x)+8$，所以 $f(\lg\lg 3)=f(-\lg\log_3 10)+8=3$，选 C.

(2) 已知 $x,y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，$a\in\mathbf{R}$，且 $\begin{cases}x^3+\sin x-2a=0\\4y^3+\sin y\cos y+a=0\end{cases}$，求 $\cos(x+2y)$ 的值.

分析 1994 年联赛题，特点是入口非常小，所求与题设联系不大，注意比较两个式子的结构，大胆想像，就能找到一条成功之路.

解: 条件可化为 $\begin{cases}x^3+\sin x-2a=0\\8y^3+\sin 2y+2a=0\end{cases}$，从而 $x^3+\sin x=-8y^3-\sin 2y$，显然 $x,-2y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，构造函数 $f(x)=t^3+\sin t$，$t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，可知该函数单调，$x=-2y$，从而 $\cos(x+2y)=1$.

例 4 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上给定非负函数 $f(x)$，有 $f(1)=1$，此处，对于任何两数 x_1 和 x_2，$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，且 $x_1+x_2\leqslant 1$，满足不等式 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$. (1) 求证：$f(x)\leqslant 2x$. (2) $f(x)\leqslant 1.9x$ 是否正确，说明理由.

证明: (1) 对 $0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1$，有 $f(y)=f(y-x+x)\geqslant f(y-x)+f(x)\geqslant f(x)$，即 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不减，且 $f(2x)\geqslant 2f(x)$，因此，① $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ 时，$f(x)\leqslant f(1)=1\leqslant 2x$；② 当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 时，必有 $x\in\left(\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right]$，$f(x)\leqslant\frac{1}{2}f(2x)\leqslant\frac{1}{4}f(4x)\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{2^n}f(2^n x)\leqslant\frac{1}{2^n}\leqslant 2x$. 又 $f(0)=0$，所以 $f(x)\leqslant 2x$ 恒成立.

(2) 不等式 $f(x)\leqslant 1.9x$ 不成立，反例：

$$f(x)=\begin{cases}0 & \left(0\leqslant x<\frac{1}{2}\right)\\1 & \left(\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right)\end{cases}$$，此函数满足问题的全部条件，但是 $f(0.51)=1>1.9\times 0.51=0.969$.

说明: 举反例在数学中具有十分重要的作用，是否定命题时常用的工具.

例 5 设 a 是大于 0 的实数，$f(x)$ 是定义在全体实数集上的一个函数，并且对每一实数 x 满足条件：

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}.$$

试证明：函数是周期函数.

证明： 因为 $f(x+a)-\frac{1}{2}=\sqrt{-\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2+\frac{1}{4}}$，

令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}$，所以 $g(x+a)=\sqrt{-g^2(x)+\frac{1}{4}}$，因为 $g^2(x+a)=-g^2(x)+\frac{1}{4}$，所以 $g^2(x+2a)-g^2(x+a)+\frac{1}{4}=g^2(x)$，$f(x+2a)=f(x)$，函数 $f(x)$ 是周期函数.

例 6 设函数 $f(x)$ 对任一实数 x 满足：$f(2-x)=f(2+x)$，$f(7-x)=f(7+x)$ 且 $f(0)=0$. 求证：$f(x)=0$ 在区间 $[-30,30]$ 上至少有 13 个根.

证明： 由题设知，函数 $f(x)$ 图像关于直线 $x=2$ 和 $x=7$ 对称，所以

$$f(4)=f(2+2)=f(2-2)=f(0)=0$$
$$f(10)=f(7+3)=f(7-3)=f(4)=0,$$

于是 $f(x)=0$ 在 $(0,10]$ 上至少有两个根. 另一方面，有 $f(x+10)=f(7+3+x)=f(7-3-x)=f(4-x)=f(2-2+x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 10 为周期的周期函数，因此 $f(x)=0$ 的根在区间 $[-30,30]$ 上至少有 $6\times2+1=13$ 个根.

例 7 设 $x,y\in\mathbf{R}$，求 $u=x^2+xy+y^2-x-2y+3$ 的最小值.

解：（配方法）$u=x^2+(y-1)x+y^2-2y+3=\left(x+\frac{y-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y-1)^2+2$，最小值为 2.

例 8 (1) 求函数 $y=\sqrt{2x^2-3x+1}+\sqrt{x^2-2x}$ 的最小值.

解：（单调性）先求定义域 $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$，注意到两个根号内的函数在 $(-\infty,0]$ 上都递减，在 $[2,+\infty)$ 上都递增，故原函数亦如此. 故 $y_{\min}=\min\{f(0),f(2)\}=1$. 当 $x=0$ 时取到最小值.

(2) 求函数 $y=\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}$ 的最小值.

解法一(构造法)：

$y=\sqrt{(x+1)^2+1^2}+\sqrt{(x-1)^2+1^2}$，表示动点 $P(x,1)$ 到定点 $A(1,0)$，$B(-1,0)$ 的距离之和，故 $y_{\min}=2\sqrt{2}$.

解法二(不等式法)：

$$y=\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}$$
$$\geqslant 2\sqrt[4]{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$$
$$=2\sqrt[4]{x^4+4}\geqslant 2\sqrt{2},$$

当 $x=0$ 时，两等号同时成立，故 $y_{\min}=2\sqrt{2}$.

例 9 (1996 年美国中学数学竞赛题) 对实数 x，求函数 $f(x)=\sqrt{8x-x^2}-\sqrt{14x-x^2-48}$ 的最大值.

解法一： $f(x)$ 的定义域为 $[6,8]$，$u(x)=\sqrt{8x-x^2}=\sqrt{16-(x-4)^2}$，当 $x=6$ 时，$u_{\max}=\sqrt{12}$；$v(x)=-\sqrt{14x-x^2-48}=-\sqrt{1-(x-7)^2}$，当 $x=6$ 时，$v_{\max}=0$，从而当 $x=6$ 时，$f(x)$ 有最大值 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

解法二： $f(x)$ 定义域为 $[6,8]$，令 $u(x)=\sqrt{8x-x^2}$，$v(x)=\sqrt{14x-x^2-48}$，

$u^2-v^2=48-6x$. 因为 $x\in[6,8]$，所以 $0\leqslant 48-6x\leqslant 12$，所以 $0\leqslant u^2-v^2\leqslant 12$……①. 所以 $y=u-v$，所以 $u=y+v$，代入①得：$y^2+2vy\leqslant 12$，易知 $y\geqslant 0$，$v=\sqrt{1-(x-7)^2}\geqslant 0$……②，所以 $y^2\leqslant y^2+2vy\leqslant 12$，所以 $y\leqslant 2\sqrt{3}$，当 $x=6$ 时，①、②同时取等号. 故 $f(x)$ 有最大值 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

解法三： $f(x)$ 的定义域为 $[6,8]$，$f(x)=\sqrt{8-x}(\sqrt{x}-\sqrt{x-6})=\frac{6\sqrt{8-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-6}}$，

因为 $\sqrt{8-x}$，$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-6}}$ 在 $[6,8]$ 上是减函数，从而当 $x=6$ 时，$f(x)$ 有最大值 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

评注： 联想思维是解决数学问题的重要思维方式，解法一运用知识点“若 $f(x)=u(x)+v(x)$，$u(x)$，$v(x)$ 同时在 $x=x_0$ 处取得最大值，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最大值”；解

法二运用不等式的放缩法求解;解法三运用知识点"若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上为单调函数,则 $f(x)$ 在端点处取得最值".

例 10　已知函数 $f(x)=ax^2-1(a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R})$,设集合 $A=\{x\mid f(x)=x\}$,集合 $B=\{x\mid f[f(x)]=x\}$,且 $A=B\neq\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

解:$a\neq 0$ 时,由 $A=\{x\mid ax^2-x-1=0\}\neq\varnothing$ 得:$a\geqslant-\frac{1}{4}$,设 $t\in A$,则必有 $t\in B$,故 $A\subseteq B$;又 B 中元素为方程 $a(ax^2-1)^2-1=x$ 的实根,整理得:$a^3x^4-2a^2x^2-x+a-1=0$,由 $A\subseteq B$ 知,上式含有因子 ax^2-x-1,由辗转相除法或待定系数法可知上式可因式分解为

$(ax^2-x-1)(a^2x^2+ax-a+1)$,要使 $A=B$,方程 $a^2x^2+ax-a+1=0$ 无实根或实根为 $ax^2-x-1=0$ 的实根,分别讨论得 $a\in\left[-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$. 当 $a=0$ 时,也成立.

类题:(2007 年高考江苏卷第 21 题)已知 a,b,c,d 是不全为零的实数,函数 $f(x)=bx^2+cx+d$,$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. 方程 $f(x)=0$ 有实数根,且 $f(x)=0$ 的实数根都是 $g(f(x))=0$ 的根;反之,$g(f(x))=0$ 的实数根都是 $f(x)=0$ 的根.

(1) 求 d 的值;

(2) 若 $a=0$,求 c 的取值范围;

(3) 若 $a=1,f(1)=0$,求 c 的取值范围.

解:(1) 设 r 为方程的一个根,即 $f(r)=0$,则由题设得 $g(f(r))=0$. 于是,

$g(0)=g(f(r))=0$,即 $g(0)=d=0$.

所以,$d=0$.

(2) 由题意及(1) 知 $f(x)=bx^2+cx$,$g(x)=ax^3+bx^2+cx$.

由 $a=0$ 得 b,c 是不全为零的实数,且 $g(x)=bx^2+cx=x(bx+c)$,

则 $g(f(x))=x(bx+c)[bx(bx+c)+c]$
$=x(bx+c)(b^2x^2+bcx+c)$.

方程 $f(x)=0$ 就是 $x(bx+c)=0$. ①

方程 $g(f(x))=0$ 就是 $x(bx+c)(b^2x^2+bcx+c)$. ②

(ⅰ) 当 $c=0,b\neq 0$ 时,方程 ①、② 的根都为 $x=0$,符合题意.

(ⅱ) 当 $c\neq 0$, $b=0$ 时,方程 ①、② 的根都为 $x=0$,符合题意.

(ⅲ) 当 $c\neq 0,b\neq 0$ 时,方程 ① 的根为 $x=0,x_2=-\frac{c}{b}$,它们也都是方程 ② 的根,但它们不是方程 $b^2x^2+bcx+c=0$ 的实数根.

由题意,方程 $b^2x^2+bcx+c=0$ 无实数根,此方程根的判别式 $\Delta=(bc)^2-4b^2c<0$,得 $0<c<4$.

综上所述,所求 c 的取值范围为 $[0,4)$.

(3) 由 $a=1,f(1)=0$ 得 $b=-c$,$f(x)=bx^2+cx=cx(-x+1)$,

$g(f(x))=f(x)[f^2(x)-cf(x)+c]$. ③

由 $f(x)=0$ 可以推得 $g(f(x))=0$,知方程 $f(x)=0$ 的根一定是方程 $g(f(x))=0$ 的根.

当 $c=0$ 时,符合题意.

当 $c\neq 0,b\neq 0$ 时,方程 $f(x)=0$ 的根不是方程 $f^2(x)-cf(x)+c=0$　④ 的根,

因此,根据题意,方程 ④ 应无实数根.

那么,当 $\Delta=(-c)^2-4c<0$,即 $0<c<4$ 时,$f^2(x)-cf(x)+c>0$,符合题意.

当 $(-c)^2-4c\geqslant 0$,即 $c<0$ 或 $c\geqslant 4$ 时,由方程 ④ 得

$$f(x)=-cx^2+cx=\frac{c\pm\sqrt{c^2-4c}}{2},$$

即 $cx^2-cx+\frac{c\pm\sqrt{c^2-4c}}{2}=0$,⑤

则方程 ⑤ 应无实数根,所以有

$$(-c)^2-4c\frac{c+\sqrt{c^2-4c}}{2}<0,$$

且 $(-c)^2-4c\frac{c-\sqrt{c^2-4c}}{2}<0$.

当 $c<0$ 时,只需 $-c^2-2c\sqrt{c^2-4c}<0$,解得 $0<c<\frac{16}{3}$,矛盾,舍去.

当 $c\geqslant 4$ 时,只需 $-c^2+2c\sqrt{c^2-4c}<0$,解得 $0<c<\frac{16}{3}$.

因此，$4 \leqslant c < \frac{16}{3}$.

综上所述，所求 c 的取值范围为 $\left[0, \frac{16}{3}\right)$.

例 11　已知 $x = \sqrt{19} + \sqrt{99}$ 是函数 $f(x) = x^4 + bx^2 + c$ 的一个零点，b, c 为整数，则 $b + c =$ ________.

解：（逆向思考：什么样的方程有这样的根？）由已知变形得 $x - \sqrt{19} = \sqrt{99}$，所以 $x^2 - 2\sqrt{19}x + 19 = 99$，

即 $x^2 - 80 = 2\sqrt{19}x$，再平方得 $x^4 - 160x^2 + 6400 = 76x^2$，即 $x^4 - 236x^2 + 6400 = 0$，所以 $b = -236, c = 6400 b + c = 6164$.

例 12　已知 a, b, c, d 为非零实数，$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, x \in \mathbf{R}$，且 $f(19) = 19, f(97) = 97$，若当 $x \neq -\frac{d}{c}$ 时，对于任意实数 x，均有 $f[f(x)] = x$，试求出 $f(x)$ 值域以外的唯一数.

分析　（第 15 届美国数学邀请赛，值域问题）19 与 97 是方程 $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = x$ 的两根. 即方程 $cx^2 + (d - a)x - b = 0$ 的两个根，故有 $\frac{a - d}{c} = 116, -\frac{b}{c} = 1843$. $f[f(x)] = x$ 得，$(a + d)cx^2 + (d^2 - a^2)x - b(a + d) = 0$，由于上述方程对 $x \neq -\frac{d}{c}$ 恒成立，故 $a + d = 0$ 且 $d^2 - a^2 = 0$，且 $d = -a$. 从而可得 $a = 58c, b = -1843c, d = -58c$，从而 $f(x) = \frac{58x - 1843}{x - 58} = 58 + \frac{1521}{x - 58}$，于是 $f(x)$ 取不到 58 这个数.

例 13　对每一实数 x, y，函数 $f(t)$ 满足 $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy + 1$，若 $f(-2) = -2$，试求满足 $f(a) = a$ 的所有整数 a.

解法一：令 $x = y = 0$ 得 $f(0) = -1$，令 $x = y = -1$，由 $f(-2) = -2$ 得 $f(-1) = -2$，又令 $x = 1, y = -1$ 得 $f(1) = 1$，再令 $x = 1$ 得 $f(y + 1) = f(y) + y + 2$，又 $f(1) = 1$，所以 $y \geqslant 1$ 时，$f(y + 1) = f(y) + y + 2 > y + 1$，即对大于 1 的正整数 t 恒有 $f(t) > t$. 又由条件可得，$f(-3) = -1, f(-4) = 1, f(-5) = 4, f(-6) = 7$，猜想 $t \leqslant -4$ 时，$f(t) > 0$. 证明如下：$f(t) - f(t + 1) = -(t + 2)$ 得，当 $t < -2$ 时，$f(t) > f(t + 1)$，所以 $t \leqslant -4$ 时，$f(t)$ 递减，故 $f(t) \geqslant f(-4) = 1 > 0$，综上所述，满足 $f(a) = a$ 的所有整数 a 只有 $a = 1$ 或 $a = -2$.

解法二：同解法一，求得 $f(1) = 1$，由 $f(y + 1) = f(y) + y + 2$，令 $y = n$，由数列递推知识得，$f(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 1$，令 $f(n) = n$ 得，$n^2 + n - 2 = 0$，得 $n = 1$ 或 $n = -2$.

三、二次函数有关问题

在所有初等函数中，对二次函数的研究最为深入，它也是竞赛中函数问题的考查热点.

例 14　已知抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 1 + a$ 与直线 $x = 2, x = 3, y = 1, y = 2$ 围成的正方形有公共点，求 a 的取值范围.

提示 1：原函数可化为 $y = a(x - 1)^2 - 1$，该抛物线顶点为 $(1, -1)$，对称轴为 $x = 1$，a 的变化只会影响抛物线的开口方向和大小. a 越大抛物线的开口越小，a 越小抛物线的开口越大. ① 若 $a < 0$，根据图像可知抛物线和正方形没有公共点（因此时抛物线的最高点为 $(1, -1)$）. ② 若 $a > 0$，由抛物线的开口大小与 a 的关系及与正方形之间的位置关系可知：抛物线过点 $(2, 2)$ 时开口最小，a 最大，把点 $(2, 2)$ 代入原函数解得 $a = 3$. 抛物线过点 $(3, 1)$ 时开口最大，a 最小，把点 $(3, 1)$ 代入原函数解得 $a = 0.5$. 所以 $0.5 \leqslant a \leqslant 3$.

提示 2：原函数化为 $y = a(x - 1)^2 - 1$.

① $a < 0$ 不可能. ② $a > 0$ 时，原函数在 $[2, 3]$ 上为增函数，故 $f(2) \leqslant f(x) \leqslant f(3)$，即 $f(x) \in [a - 1, 4a - 1]$，设 $A = [a - 1, 4a - 1], B = [1, 2]$，则集合 A 与 B 的交集非空，在数轴上表示出两个集合，先求使 $A \cap B$ 为空的范围，即 $4a - 1 < 1$ 或 $a - 1 > 2$，其补集即为 $A \cap B$ 非空的范围，可得 $0.5 \leqslant a \leqslant 3$.

例 15　一幢 $k(k > 2)$ 层楼的公寓有一部电梯，最多能容纳 $k - 1$ 个人，现有 $k - 1$ 个学生同时在第一层楼乘电梯，他们中没有两人是住

同一层楼的. 电梯只能停一次，停在任意选择的一层. 而对每一个学生而言，自己往下走一层感到一分不满意，而往上走一层感到 2 分不满意，问电梯停在哪一层，可使不满意的总分达到最小?

解: 设电梯停在第 x 层，则不满意的总分为 $S=(1+2+\cdots+x-2)+2(1+2+\cdots+k-x)=\frac{1}{2}[3x^2-(4k+5)x]+k^2+k+1$，所以当 $x=N\left(\frac{4k+5}{6}\right)$ 时，S 最小，其中 $N(a)$ 表示最接近于 a 的整数. 例如 $N(3)=3$，$N(3.6)=4$，$N(2.1)=2$，$N(2.5)=2$ 或 3，即停在 $N\left(\frac{4k+5}{6}\right)$ 时，不满意总分最小.

例 16 考察所有可能的抛物线 $y=x^2+ax-b^2$，它们与坐标轴各有三个不同的交点，对于每一条这样的抛物线，过其与坐标轴的三个交点作圆. 求证：所有这些圆周经过一定点.

证明: 设抛物线 $y=x^2+ax-b^2$ 与 x 轴的交点为 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$. 由韦达定理知 $x_1\cdot x_2-b^2<0$（因为 $b=0$，则 $y=x^2+ax$ 与坐标轴只有两个不同的交点），故点 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$ 在坐标原点的两侧. 又因为 $|x_1|\cdot|x_2|=|-b^2|\cdot 1$，由相交弦定理的逆定理知，点 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$，$(0,-b^2)$，$(0,1)$ 在同一个圆周上，即过抛物线与坐标轴的三个交点 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$，$(0,-b^2)$ 的圆一定过定点 $(0,1)$. 于是所有的这些圆周均经过一定点 $(0,1)$.

例 17 设 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4\geqslant 2$，且 $x_2+x_3+x_4\geqslant x_1$，求证：$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2\leqslant 4x_1x_2x_3x_4$.

证明: 令 $a=x_2+x_3+x_4$，$b=x_2x_3x_4$，则原不等式为 $(x_1+a^2)\leqslant 4x_1b$，即 $x_1^2+2(a-2b)x_1+a^2=0$，令 $f(x)=x^2+2(a-2b)x+a^2$，则只需证明 $f(x_1)\leqslant 0$，因 $\Delta=4(a-2b)^2-4a^2=16b(b-a)$ 而

$$\frac{a}{b}=\frac{x_2+x_3+x_4}{x_2x_3x_4}=\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_4}+\frac{1}{x_2x_4}$$

$$\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}<1,$$

所以 $b>a$，从而 $\Delta>0$，$f(x)$ 与 x 轴有两个不同的交点，易知这两个交点为 $\begin{cases}u=2b-a-2\sqrt{b(b-a)}\\ v=2b-a+2\sqrt{b(b-a)}\end{cases}$，下证 $x_1\in[u,v]$.

$a\leqslant 3x_1\leqslant 3a$，所以 $x_1\in\left[\frac{a}{3},a\right]$，只需证 $\left[\frac{a}{3},a\right]\subset[u,v]$，即 $u\leqslant\frac{a}{3}$，$a\leqslant v$，由于

$$v=2b-a+2\sqrt{b(b-a)}\geqslant 2b-a\geqslant a,$$

$$\begin{aligned}u&=2b-a-2\sqrt{b(b-a)}\\&=(\sqrt{b}-\sqrt{b-a})^2\\&=\left(\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{b-a}}\right)^2\\&=\frac{a}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{b}{a}-1}\right)^2},\\&\leqslant\frac{a}{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2}=\frac{a}{3},\end{aligned}$$

所以 $x_1\in[u,v]$，从而必有 $f(x_1)\leqslant 0$.

解法二: 只需证明 $f(x_1)\leqslant 0$，而 $\frac{a}{3}\leqslant x_1\leqslant a$，因此只需证 $f(a)\leqslant 0$，$f\left(\frac{a}{3}\right)\leqslant 0$，而 $f(a)=4a(a-b)$，$f\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{4}{9}a(4a-3b)$，由 $\frac{a}{b}\leqslant\frac{3}{4}$ 可证得，$f(a)\leqslant 0$，$f\left(\frac{a}{3}\right)\leqslant 0$.

说明: 通过构造二次函数，然后利用二次函数的性质来证明一些不等式问题，往往会使问题简化.

四、函数思想应用

1. 构造函数解方程或求函数值.

例 18 k 为何实数时，方程 $x^2-2|x|+3=k$ 有四个互不相等的实数根?

解: 将原方程变形为 $x^2-2|x|+1=k-2$，设 $y=f(x)=x^2-2|x|+1$，作出其图像，而 $y=k-2$ 是一条平行于 x 轴的直线，原方程有四个互不相等的实根，即直线与曲线有四个不同的交点，由图像可知，$0<k-2<1$，即

$2<k<3$.

例 19 若抛物线 $y=x^2+ax+2$ 与连接两点 $M(0,1)$,$N(2,3)$ 的线段(包括 M、N 两点)有两个相异的交点,求 a 的取值范围.

解:易知过两点 $(0,1)$,$(2,3)$ 的直线方程为 $y=x+1$,而抛物线 $y=x^2+ax+2$ 与线段 MN 有两个交点,就是方程 $x^2+ax+2=x+1$ 在区间 $[0,2]$ 上有两个不等的实根.

令 $f(x)=x^2+(a-1)x+1$,

则 $\begin{cases}0<\dfrac{a-1}{2}<2,\Delta=(a-1)^2-4>0,\\ f(0)=1\geqslant 0,f(2)=2a+3\geqslant 0,\end{cases}$

解得 a 的范围为 $-\dfrac{3}{2}\leqslant a\leqslant -1$.

说明:利用二次函数来研究一元二次方程的根的分布是非常有效的手段.

例 20 设 $A=\{x\mid 1<x<3\}$,又设 X 是关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x^2-2x+a\leqslant 0\\ x^2-2bx+5\leqslant 0\end{cases}$ 的解集,试确定 a,b 的取值范围,使得 $A\subseteq X$.

分析 本题以二次曲线为背景,它的通法是先求不等式组的解集 X,然后再来考虑 A 与 X 的包含关系,则必然导致浩繁的讨论,但如果由数想形,构造函数,就可简捷获解.

解:设 $f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+(a-1)$,$g(x)=x^2-2bx+5=(x-b)^2+(5-b)^2$.

要使 $A\subseteq X$ 时,则必使 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[1,3]$ 上的函数图像落在 x 轴下方,即

$\begin{cases}f(1)\leqslant 0\\ f(3)\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow a\leqslant -3$;$\begin{cases}g(1)\leqslant 0\\ g(3)\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow b\leqslant 3$.

例 21 求函数 $y=(3x-1)(\sqrt{9x^2-6x+5}+1)+(2x-3)(\sqrt{4x^2-12x+13}+1)$ 的图像与 x 轴的交点坐标.

分析 利用函数奇偶性、单调性,观察发现,$y=(3x-1)(\sqrt{(3x-1)^2+4}+1+(2x-3)(\sqrt{(2x-3)^2+4}+1)$.

解:令 $f(t)=t(\sqrt{t^2+4}+1)$,易知 $f(t)$ 是奇函数,且是增函数. $y=f(3x-1)+f(2x-3)$,当 $y=0$ 时,有 $f(3x-1)=f(3-2x)$,得 $x=\dfrac{4}{5}$.

例 22 设 $f(x)$ 是一个 98 次的多项式,使得 $f(k)=\dfrac{1}{k}$,$k=1,2,\cdots,99$. 求 $f(100)$ 的值.

解:构造函数 $g(x)=xf(x)-1$,则 $g(1)=g(2)=\cdots=g(99)=0$,且 $g(x)$ 是 99 次多项式,所以可设 $g(x)=a(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$,待定求出 a 值即可. 又 $g(0)=-1$,即 $g(0)=a(-1)(-2)\cdots(-99)=-1$,$a=\dfrac{1}{99!}$,所以

$$f(x)=\frac{\frac{1}{99!}(x-1)(x-2)\cdots(x-99)+1}{x},$$

所以 $f(100)=\dfrac{1+1}{100}=\dfrac{1}{50}$.

2. 构造函数证不等式.

例 23 设 a,b,c 是绝对值小于 1 的实数,求证:$ab+bc+ca+1>0$.

证明:构造一次函数 $f(x)=(b+c)x+bc+1$,$-1<x<1$. 它的图像是一条线段,但不包括两个端点,若能证明其两个端点的函数值 $f(-1)$ 和 $f(1)$ 均大于 0,则定义域内的每一点 x,$f(x)>0$ 恒成立.

$$\begin{aligned}f(-1)&=-(b+c)+bc+1\\&=(b-1)(c-1)>0,\\ f(1)&=(b+c)+bc+1\\&=(b+1)(c+1)>0,\end{aligned}$$

故定义域内的每一点 x,$f(x)>0$ 恒成立. 故 $f(a)>0$.

说明:构造一次函数是解题的关键.

例 24 证明柯西不等式:设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是实数,则

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2.$$

证明:若 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=0$,此时命题显然成立. 若 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\neq 0$,构造一个二次函数 $f(x)=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_ix-b_i)^2\geqslant 0$ 恒成立,故 $\Delta\leqslant 0$,命题得证.

说明:对于要证明 $AC\leqslant(\geqslant)B^2$,可将其