国家工科数学教学基地建设系列教材

复变函数

THE FUNCTION THEORY OF COMPLEX VARIABLES

吴敏 洪毅 刘深泉 编著

华南理工大学出版社

国家工科数学教学基地建设系

复变函数

吴 敏 洪 毅 刘深泉 编著

华南理工大学出版社

·广州·

图书在版编目（CIP）数据

复变函数/吴敏，洪毅，刘深泉编著．—广州：华南理工大学出版社，2004.9
（国家工科数学教学基地建设系列教材）
ISBN 7-5623-2082-9

Ⅰ．复…　Ⅱ．①吴…②洪…③刘…　Ⅲ．复变函数-高等学校-教材
Ⅳ．O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 050552 号

总 发 行：华南理工大学出版社
（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
发行部电话：020－87113487　87111048（传真）
E-mail：scut202@scut.edu.cn　　http://www.scutpress.com
责任编辑：欧建岸
印 刷 者：广东省农垦总局印刷厂
开　　本：787×960　1/16　**印张**：11　**字数**：184 千
版　　次：2004 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数：1～3 000 册
定　　价：17.50 元

总　序

自1995年以来，华南理工大学应用数学系（现数学科学学院）的老师们为建设国家工科数学基地不懈努力，在教育改革中做出了显著的成绩。“国家工科数学教学基地建设系列教材”的出版，就是这些成果的重要部分。

21世纪是全球化、信息化的时代，数学科学在科学技术中占有核心地位，成为直接的生产力。大学数学课程在高等教育中起着关键的作用，对学生素质的提高和创新能力的培养起着越来越重要的作用。提高大学数学的教学质量，是一项艰巨、重要的任务。

大学数学的教学，应该使学生在理解数学思想、数学建模和运算能力等方面，得到最基本的训练。为使学生理解数学思想，必须讲清基本概念，并通过必要的逻辑推理训练使学生理解基本概念和基本定理。通过数学建模的学习，学生可以了解数学的来源，并且学会运用数学。运算能力的培养是以上两种能力的基础。当然，这三种能力的培养是一个有机的整体，根据不同专业的要求和学生的实际情况可以有所侧重。

为了适应新形势，本系列教材力求反映数学与其他学科的最新发展，删减过时的内容，介绍各种数学软件的应用，充分使用多媒体等技术。

本系列教材的出版，反映了我院教师多年来教学改革的成果，也吸取了不少兄弟院校同行的宝贵经验。限于我们的水平，其中疏漏在所难免，恳请国内外专家、同行指正。本系列教材的出版得到华南理工大学领导与华南理大学出版社的大力支持，特此表示感谢。

华南理工大学数学科学学院

2004年8月

前　言

复变函数是工科数学的一门重要基础课程。为了适应高等教育的发展和教育改革的需要，我们编写了这本教材。

复数是16世纪在解代数方程时引入的。开始人们认为复数只是人类主观思维的产物，不是客观世界真实的反映，因此称它为“虚数”。后来发展复数可以表示向量，复数运算实质上是平面上平移、旋转和相似变换。这一观点的进一步发展，把解析函数看作复平面的保形映照，促进了人们对复数的认识，也使复变函数论得到迅速的发展。

在18世纪，达朗贝尔（1717—1783年）和欧拉（1707—1783年）等人逐步阐明了复数的几何意义和物理意义，应用复数和复变函数研究了流体力学等方面的一些问题。复变函数论逐步建立起来，成为数学的一个重要分支。在19世纪，柯西（1789—1857年）、外尔斯特拉斯（1815—1897年）和黎曼（1826—1857年）等人奠定了近代复变函数论的基础。柯西和外尔斯特拉斯应用积分和级数研究复变函数，使人们了解复变函数和一元实变函数的联系和区别。黎曼研究了复变函数的映照性质，使复变函数与数学的其他分支，如偏微分方程、微分几何等联系起来。

复变函数论的建立和发展与解决实际问题有密切联系。复变函数论是在研究流体力学、电学、空气动力学、热力学和理论物理中发展起来的，在解决这些学科的实际问题中起了很大作用。复变函数和数学的其他分支也有密切联系。保形映射在偏微分方程和微分几何中，富里埃变换在微分方程、积分方程、概率论、泛函分析、数论中都是重要工具。即使最简单的函数，如多项式、指数对数函数、三角函数等，也只有在复变函数论中才能充分揭示其本质。

作为高等学校工科的基础课程，本课程主要介绍复变函数的微积分、级数和保形映照等内容，介绍有关的数学建模思想和方程。书中补充的几个阅读材料，旨在帮助学生了解本课程是怎样有趣和有用。

本书的编写得到华南理工大学教务处和应用数学系的支持，特此表示感谢。

编　者

2004年7月

目　　录

第一章　复数与复变函数

本章主要介绍复数及其几何表示，复平面上区域的概念，以及复变函数的极限与连续性等概念，为进一步研究解析函数作准备.

§1.1　复数及其几何表示

一、复数的概念

我们知道，方程 $x^2+1=0$ 在实数集内是没有解的. 为了解方程的需要，我们引入新数 i，称为虚数单位，规定 $i^2=-1$.

若 x、y 为实数，称 $z=x+y\mathrm{i}$ 为复数，x、y 分别称为 z 的实部和虚部. 记为

$$x=\mathrm{Re}(z) \qquad y=\mathrm{Im}(z)$$

如果 $\mathrm{Im}(z)=0$，那么 $z=x+0\mathrm{i}$ 是实数；如果 $\mathrm{Re}(z)=0$ 但 $\mathrm{Im}(z)\neq 0$，$z=0+y\mathrm{i}$称为纯虚数.

两个复数 z_1 和 z_2 的实部和虚部分别相等，就说 z_1 与 z_2 相等，记为 $z_1=z_2$. 两个复数只有当它们都是实数时才能比较大小.

二、复数的代数运算

两个复数 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$、$z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$(x_1、x_2、y_1、y_2 为实数)的和、差与积的定义如下：

$$(x_1+y_1\mathrm{i})\pm(x_2+y_2\mathrm{i})=(x_1\pm x_2)+(y_1\pm y_2)\mathrm{i} \tag{1.1}$$

$$(x_1+y_1\mathrm{i})\cdot(x_2+y_2\mathrm{i})=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_2y_1+x_1y_2)\mathrm{i} \tag{1.2}$$

容易证明，复数的运算也满足交换律、结合律与分配律，而且当 z_1 和 z_2 为实数(即 $y_1=y_2=0$)时，上述公式与实数的运算法则一致.

复数 z_1 除以非零复数 z_2 的商 $z=z_1/z_2$ 是满足条件$z_1=z\cdot z_2$的复数，由此得

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\mathrm{i} \tag{1.3}$$

复数 $x-y\mathrm{i}$ 称为复数 $x+y\mathrm{i}$ 的共轭复数，它们是互相共轭的复数．如果其中之一用 z 表示，则另一个用 $\bar{z}$ 表示．于是

$$z+\bar{z}=(x+y\mathrm{i})+(x-y\mathrm{i})=2x$$

$$z\cdot\bar{z}=(x+y\mathrm{i})\cdot(x-y\mathrm{i})=x^2+y^2$$

都是实数．又有

$$\overline{(z_1+z_2)}=\bar{z}_1+\bar{z}_2 \qquad \overline{(z_1z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2 \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

三、复数的几何表示、复平面

由于复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 由一对有序实数(x, y)惟一确定，所以对于平面上给定的直角坐标系，对应

$$z=x+y\mathrm{i}\longleftrightarrow(x, y)$$

建立了全体复数与平面上全体点之间一一对应的关系．复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 可用平面上坐标为(x, y)的点来表示．此时 x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴，这个平面称为复平面．

复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 还可以用起点在原点、终点在(x, y)的向量表示．因此，一个复数 z 也可称为点 z 或向量 z．向量 $z=x+y\mathrm{i}$ 的长度称为复数 z 的模，记为 $|z|$．所以

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.4}$$

当 $z\neq0$ 时，实轴正向(也称为正实轴)和向量 z 之间的夹角称为复数 z 的幅角(图 1-1)，记为 $\mathrm{Arg}z$．显然 $\mathrm{Arg}z$ 有无穷多个值，其中在$(-\pi, \pi]$之间的值称为 z 的幅角的主值，记为 $\arg z$．z 的其他幅角与 $\arg z$ 相差 2π 的整数倍．所以

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi \quad (k\text{ 为整数}) \tag{1.5}$$

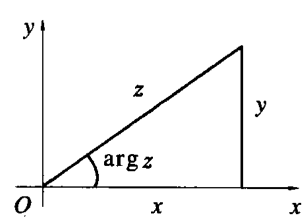


图 1-1

给出了 z 的全部幅角．注意，数 0 的幅角是没有定义的．由此可知，

当 $x>0$ 时，$\arg z=\arctan\frac{y}{x}$；

当 $x=0$，$y>0$ 时，$\arg z=\frac{\pi}{2}$；

当 $x=0$，$y<0$ 时，$\arg z=-\frac{\pi}{2}$；

当 $x<0$，$y\geqslant 0$ 时，$\arg z=\arctan\dfrac{y}{x}+\pi$；

当 $x<0$，$y<0$ 时，$\arg z=\arctan\dfrac{y}{x}-\pi$.

一对共轭复数 z 和 $\bar{z}$ 关于实轴对称，因此

$|z|=|\bar{z}|\qquad \operatorname{Arg}\bar{z}=-\operatorname{Arg}z\qquad z\bar{z}=|z|^2$

根据复数的运算法则知道，两个复数 z_1、z_2 的加法运算与相应向量的加法运算一致(图 1-2). 由此可得三角不等式

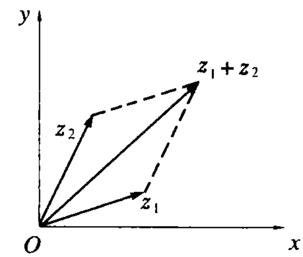


图 1-2

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{1.6}$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big| \tag{1.7}$$

例 1.1 设 z_1、z_2 为复数. 证明：

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

证
$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}\\&=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\&=z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+\overline{(z_1\bar{z}_2)}\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)\end{aligned}$$
□

四、复数的三角表示法

设 z 是复数，$r=|z|$，θ 是 z 的幅角，那么(r,θ)可看作点(x,y)的极坐标，因此有 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$. 所以

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.8}$$

式(1.8)称为复数的三角表示式.

利用欧拉(Euler)公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，得

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.9}$$

这就是复数的指数表示式.

例 1.2 将下列复数化为三角表示式与指数表示式：$z_1=-3-4\mathrm{i}$，$z_2=\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$.

解 $|z_1|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$\arg z_1=\arctan\dfrac{4}{3}-\pi$，故

$$\begin{aligned}z_1&=5\left[\cos\left(\arctan\frac{4}{3}-\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\arctan\frac{4}{3}-\pi\right)\right]\\&=5\mathrm{e}^{\left(\arctan\frac{4}{3}-\pi\right)\mathrm{i}}\end{aligned}$$

$$|z_2|=1 \qquad \arg z_2=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3}{10}\pi$$

故
$$z_2=1\cdot\left(\cos\frac{3}{10}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{10}\pi\right)=\mathrm{e}^{\frac{3}{10}\pi\mathrm{i}}$$
□

例 1.3 设 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$. 试把 $1+z$ 化为三角表示式.

解 $1+z=1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$
□

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，那么

$$\begin{aligned} z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\ &=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}$$

因此，两个复数乘积的模等于因子的模的积，乘积的幅角等于因子幅角的和. 即

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2| \tag{1.10}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2 \tag{1.11}$$

同理
$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\frac{|z_2|}{|z_1|}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=\mathrm{Arg}z_2-\mathrm{Arg}z_1 \quad (z_1\neq0)$$

注意式(1.11)的意思是说：z_1 的任意一个幅角与 z_2 的任意一个幅角的和都是 $z_1\cdot z_2$的一个幅角. 式(1.10)和式(1.11)也可推广到多个复数乘积的情形.

现在考虑复数的乘幂. 设 n 是正整数，$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$是复数，那么由式(1.10)有

$$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta) \tag{1.12}$$

定义 $z^0=1$，则当 $n=0$ 时式(1.12)也成立. 又定义 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$，则得

$$z^{-n}=r^{-n}[\cos(-n\theta)+\mathrm{i}\sin(-n\theta)]$$

所以式(1.12)对所有整数成立.

设 z 是已知复数，考虑方程

$$\omega^n=z \tag{1.13}$$

当 $z=0$ 时，它只有惟一的根(n 重根)$\omega=0$. 当 $z\neq0$ 时，它有 n 个根. 每一个根称为 z 的 n 次根，都记作$\sqrt[n]{z}$. 令 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$\omega=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，那么

$$\omega^n=\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

上式成立的充要条件是

$$\rho^n=r \qquad n\varphi=\theta+2k\pi \quad (k\ 为整数)$$

取 $\theta=\arg z$，当 $k=0，1，\cdots，n-1$ 时，我们得到式(1.13)的 n 个根：

$$\omega_k = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{1}{n}(\arg z + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin\frac{1}{n}(\arg z + 2k\pi)\right] \tag{1.14}$$

当 k 取其他整数值时，这些根又重复出现.

由于这 n 个根的模都相等，它们都在以原点为中心，$r^{\frac{1}{n}}$为半径的圆上，又因相邻两个根(看作向量)的夹角都是$\frac{2\pi}{n}$，所以这 n 个根是圆内接正 n 边形的 n 个顶点.

例 1.4 求$(1+\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}$的所有值.

解 因 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$，有

$$(1+\mathrm{i})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) + \mathrm{i}\sin\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]\ (k=0,\ 1,\ 2)$$

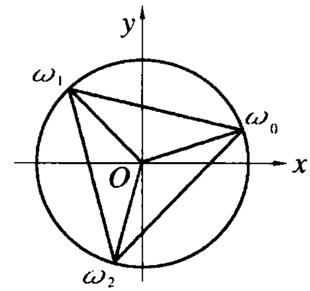


图 1-3

故$(1+\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}$的 3 个值为

$$\omega_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\omega_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$\omega_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{17}{12}\pi\right)$$

如图 1-3. □

例 1.5 已知正三角形两顶点为 $z_1=1$ 和 $z_2=2+\mathrm{i}$，求它的第三个顶点.

解 如图 1-4，设第三个顶点为 z_3，那么向量 z_3-z_1是由向量 z_2-z_1 绕 z_1 正向旋转$\frac{\pi}{3}$(或$-\frac{\pi}{3}$)所得，所以 $z_3-z_1=\mathrm{e}^{\pm\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}(z_2-z_1)$. 由此可得问题的两个解

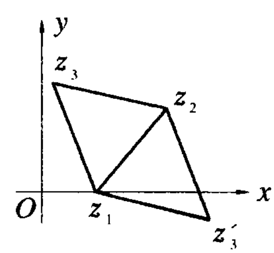


图 1-4

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}(z_2-z_1) \\ &= 1+\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)(1+\mathrm{i}) \\ &= \frac{1}{2}(3-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_3 &= z_1+\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}(z_2-z_1) \\ &= \frac{1}{2}(3+\sqrt{3})+\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})\mathrm{i} \end{aligned}$$

□

例 1.6 设 $P_0P_1\cdots P_{n-1}$是单位圆内接正 n 边形. 证明 $P_0P_1\cdot P_0P_2\cdot\cdots\cdot$

$P_0P_{n-1}=n$.

证 取圆心 O 为原点，OP_0 为实轴正向，则 P_k 对应复数 $z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}$，$0\leqslant k\leqslant n-1$. 它们满足方程 $z^n-1=0$，故

$$z^n-1=(z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_{n-1})$$

因而

$$\begin{aligned}P_0P_1\cdot P_0P_2\cdot\cdots\cdot P_0P_{n-1}&=|(z_0-z_1)(z_0-z_2)\cdots(z_0-z_{n-1})|\\&=\lim_{z\to z_0}\left|\frac{z^n-1}{z-z_0}\right|=\lim_{z\to z_0}|nz^{n-1}|=n\end{aligned}$$

□

例 1.7 试用 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 表示 $\cos3\theta$ 和 $\sin3\theta$.

解 由式(1.12)得

$$\begin{aligned}\cos3\theta+\mathrm{i}\sin3\theta&=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3\\&=\cos^3\theta+3\cos^2\theta\cdot\mathrm{i}\sin\theta+3\cos\theta\cdot(\mathrm{i}\sin\theta)^2+(\mathrm{i}\sin\theta)^3\\&=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+\mathrm{i}(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)\end{aligned}$$

所以

$$\cos3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$
$$\sin3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

□

例 1.8 已知三角形的三个顶点为 z_1、z_2、z_3，求其面积.

解 记 θ 为由向量 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 转动到向量 $\overrightarrow{z_1z_3}$ 的转动角，则

$$\theta=\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)\Big/\left|\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right|$$

因 θ 可能为正或负，所以

$$\begin{aligned}\pm S_{\triangle z_1z_2z_3}&=\frac{1}{2}|z_2-z_1||z_3-z_1|\sin\theta\\&=\frac{1}{2}|z_2-z_1||z_3-z_1|\,\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(|z_2-z_1||z_3-z_1|\frac{(z_3-z_1)|z_2-z_1|}{(z_2-z_1)|z_3-z_1|}\right)\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}((z_3-z_1)(\bar{z}_2-\bar{z}_1))\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(z_3\bar{z}_2-z_1\bar{z}_2-z_3\bar{z}_1)\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{z}_1z_2+\bar{z}_2z_3+\bar{z}_3z_1)\end{aligned}$$

所以

$$S_{\triangle z_1z_2z_3}=\frac{1}{2}|\mathrm{Im}(\bar{z}_1z_2+\bar{z}_2z_3+\bar{z}_3z_1)|$$

□

例 1.9 求四点 z_1、z_2、z_3、z_4 共圆的充要条件.

解 先设四点的位置如图 1-5，则四点共圆的充要条件是

$$\arg\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}=\arg\frac{z_3-z_2}{z_4-z_2}$$

(当然要求四点不共线). 上式等价于

$$\arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}\div\frac{z_3-z_2}{z_4-z_2}\right)=0$$

也就是说，四点 z_1、z_2、z_3、z_4 共圆的充要条件为 $\frac{(z_3-z_1)}{(z_4-z_1)}$、$\frac{(z_3-z_2)}{(z_4-z_2)}$为实数. 但$\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}$不是实数.

在其他情况下，也可证明这一结论. □

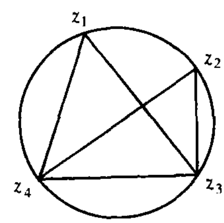


图 1-5

例 1.10 n 个内角都相等的凸 n 边形内任一点到各边的距离之和等于一个常数.

证 如图 1-6，设在复平面上有一个凸 n 边形，按逆时针向绕行的 n 个顶点对应的复数分别为 z_1、z_2、…、z_n. 点 z 在凸 n 边内，它到各边距离分别为 δ_1、δ_2、…、δ_n，z 到各边的垂线两两夹角为$\frac{2\pi}{n}$. 因此若 z 到边 z_1z_2 的垂线的幅角为 φ_0，则 z 到边 z_kz_{k+1}的垂线的幅角为 $\varphi_0+(k-1)\frac{2\pi}{n}$. 现取凸 n 边形内另一点 z'，它到凸 n 边形各边距离为δ'_1、…、δ'_n. 记 $w=z'-z$，$\varphi=\arg w$，那么有

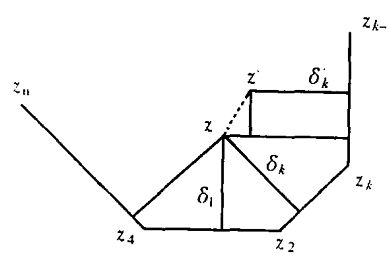


图 1-6

$$\delta'_k-\delta_k=|w|\cos\left(\varphi-\varphi_0-\frac{2(k-1)}{n}\pi\right)$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\delta'_k-\sum_{k=1}^{n}\delta_k&=|w|\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\varphi-\varphi_0-\frac{2(k-1)}{n}\pi\right)\\&=|w|\cdot\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{i(\varphi-\varphi_0-\frac{2(k-1)}{n}\pi)}\right)\\&=|w|\cdot\mathrm{Re}\left[\frac{e^{i(\varphi-\varphi_0)}-e^{i(\varphi-\varphi_0-2\pi)}}{1-e^{-\frac{2\pi i}{n}}}\right]=0\end{aligned}$$

所以凸 n 边形内任一点到各边距离之和为常数. □

五、复球面和无穷远点

复数还有一种重要的表示方法，就是用球面上的点表示复数.

在三维空间中取定直角坐标系$(x,\ y,\ u)$，把 xOy 平面看作 $z=x+y\mathrm{i}$ 平面，考虑球面

$$x^2+y^2+u^2=1$$

球面上的点 $N(0,\ 0,\ 1)$称为北极(图 1-7). 在平面 xOy 上任意取一点 $P(x,y,0)$，它表示复数 $z=x+y\mathrm{i}$. 直线 NP 与球面的另一交点P'称为P 在球面上的球极射影，它的坐标为

$$x'=\frac{2x}{x^2+y^2+1}\qquad y'=\frac{2y}{x^2+y^2+1}\qquad u'=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

于是建立了复数集和去掉北极的球面之间的一一对应，因而可以用点 P'表示复数$z=x+y\mathrm{i}$. 复数 z 的模越大，它的球极射影越接近北极 N. 在复平面上添加一个假想的点∞，称为无穷远点，并把它与复球面上的北极相对应. 加上无穷远点的复平面称为扩充复平面. 扩充复平面与球面之间建立了一一对应关系，这种球面称为复球面. 扩充复平面(或复球面)记为 C_∞.

复数∞的模约定为$+\infty$，它的实部、虚部和幅角都没有意义. 其他复数称为有限复数. 关于∞的四则运算作如下规定：

设 a 为有限复数，则

$$a\pm\infty=\infty\pm a=\infty$$

$$a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty(a\neq0)$$

$$\frac{a}{0}=\infty(a\neq0)\qquad\frac{a}{\infty}=0\qquad\frac{\infty}{a}=\infty$$

$\infty\pm\infty$，$0\cdot\infty$，$\frac{0}{0}$以及$\frac{\infty}{\infty}$都没有意义.

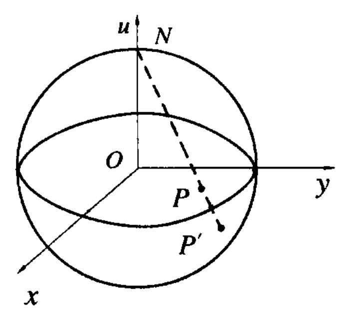


图 1-7

§1.2 复变函数及其极限与连续性

1. 平面点集

由于复平面就是$\mathbb{R}^2$ 平面的另一种形式，所以复平面上的点集的理论与高等数学中讲过的完全相同，只不过把实数坐标$(x,\ y)$换成复数坐标 $z=x+y\mathrm{i}$. 这里只把主要内容回顾一下.

设 a 是复平面$\mathbb{C}$上一点，r 是正数. 集合

$$B(a,\ r)=\{z\mid z\in\mathbb{C},\ |z-a|<r\}\tag{1.15}$$

称为以 a 为中心，r 为半径的开圆盘，也称为 a 的 r 邻域．而集合

$$\overline{B}(a, r)=\{z \mid z\in\mathbb{C}, |z-a|\leqslant r\} \tag{1.16}$$

称为以 a 为中心，r 为半径的闭圆盘．集合

$$\dot{B}(a, r)=\{z \mid z\in\mathbb{C}, 0<|z-a|<r\} \tag{1.17}$$

称为 a 的去心 r 邻域．

定义 1.1 设 $E\subset\mathbb{C}$ 是平面点集．若复数 a 有邻域 $B(a, r)\subset E$，称 a 是 E 的内点．若复数 b 有邻域 $B(b, \varepsilon)$ 与 E 无公共点，称 b 为 E 的外点．若复数 c 的任意邻域 $B(c, \delta)$ 都同时包含 E 和 E^c（E 的补集）的点，称 c 为 E 的边界点．

由定义可知，给定点集 E，复平面上所有的点恰好被分成三类：内点、外点和边界点．注意：E 的内点必属于 E，E 的外点必不属于 E，E 的边界点既可能属于 E，也可能不属于 E（图 1-8）．

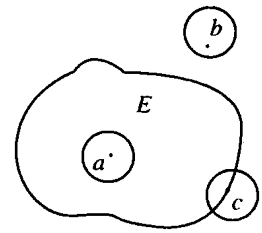


图 1-8

E 的全部边界点所组成的集合，称为 E 的边界，记为 ∂E．

定义 1.2 若集合 E 的每个点都是它的内点，E 称为开集．若集合 E 的所有边界点都属于 E，E 称为闭集．

例如，开圆盘 $B(a, r)$ 是开集，闭圆盘 $\overline{B}(a, r)$ 是闭集．

定义 1.3 设 $E\subset\mathbb{C}$，$a\in\mathbb{C}$，若 a 的任意去心邻域 $\dot{B}(a, \delta)$ 必包含 E 的点，则称 a 是 E 的聚点（或极限点）．

集合 E 的聚点不一定属于 E．例如，集合

$$E=\{z \mid 1<|z|\leqslant 2\}\cup\{0\}$$

那么 E 的聚点组成集合

$$\{z \mid 1\leqslant|z|\leqslant 2\}$$

其中圆周 $|z|=1$ 上的点不属于 E．又 E 的边界是

$$\partial E=\{z \mid |z|=1 \quad \text{或} \quad |z|=2\}\cup\{0\}$$

其中，圆周上 $|z|=1$ 的点也不属于 E．又边界上的点 0 不是 E 的聚点．

若点 $a\in E$，但 a 不是 E 的聚点，那么 a 必有去心邻域 $\dot{B}(a, r)$ 不含 E 的点，这时 a 是 E 的边界点，称 a 为 E 的孤立点．

闭集与聚点这两个概念有密切关系，即有下列重要定理．

定理 1.1 集合 E 是闭集的充要条件是 E 的聚点必属于 E．

证 必要性．设集合 E 是闭集，a 是 E 的聚点．假如 $a\overline{\in}E$，由定义，它的任意邻域 $B(a, r)$ 必含 E 的点，所以 a 必是 E 的边界点，但由闭集的定义又得出 $a\in E$，引起矛盾．因此 $a\in E$．

充分性．若 E 的聚点必属于 E，要证 E 是闭集．设 a 是 E 的边界点，但 $a\overline{\in}E$．由定义知 a 的任意邻域 $\dot{B}(a, r)$ 必含 E 的点 b，但 $a\overline{\in}E$，所以

$b \in \check{B}(a, r)$，可知 a 是 E 的聚点，从而 $a \in E$，引起矛盾．因而 E 的边界点必属于 E，故 E 是闭集．

设

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{1.18}$$

是平面上一条参数曲线，若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都在闭区间 $[a, b]$ 上连续并有连续导数（在端点 a 和 b 分别是左导数和右导数），且 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 不同时为零，就称式(1.18)给出了平面上一条光滑曲线．若把式(1.18)写成复数形式

$$z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{1.19}$$

称式(1.19)为复平面上一条光滑曲线．这条曲线的切向量定义为

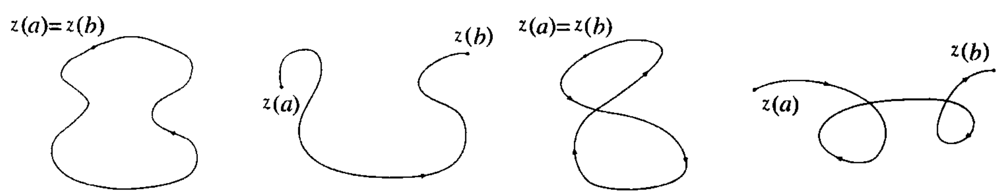
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{1.20}$$

且在区间 $[a, b]$ 上，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \neq 0$．若在式(1.19)中，函数 $z(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续（即 $x(t)$、$y(t)$ 都在 $[a, b]$ 上连续），且可把 $[a, b]$ 分为有限个子区间

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

使得式(1.19)在每个子区间 $[t_{i-1}, t_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 上都是光滑曲线，那么就称式(1.19)给出了一条分段光滑曲线．

若式(1.19)所表示的曲线满足条件：对 $[a, b]$ 上任意不同两点 t_1 和 t_2，其中至少有一点不是端点，都有 $z(t_1) \neq z(t_2)$，称它为简单曲线．若 $z(a) = z(b)$，这条曲线称为闭曲线．满足 $z(a) = z(b)$ 的简单曲线称为简单闭曲线（如图 1-9）．



(a)简单闭曲线　(b)简单非闭曲线　(c)非简单、闭曲线　(d)非简单、非闭曲线

图 1-9

定义 **1.4**　具有下列性质的点集 D 称为区域：

(1) D 是开集；

(2) D 内任意两点可以用一条连续曲线连结起来，这条曲线上的点全部属于 D．

根据区域 D 是否有界，我们分别称它为有界区域和无界区域．

性质(2) 称为连通性．因此，区域就是连通的开集．区域 D 和它的边界 ∂D