

目 次

第 一 章

多項式及其最基本之性質

〔節〕	〔頁〕
1. 一元多項式.....	1
2. 多元多項式.....	4
3. 幾何釋義.....	10
4. 齊次坐標.....	14
5. 多項式之連續性.....	17
6. 代數學之基本定理.....	20

第 二 章

行列式之幾個性質

7. 幾個定義.....	24
8. 拉氏展開法.....	29
9. 乘法定理.....	32
10. 加邊行列式.....	34
11. 附屬行列式及其子式.....	36

第三章

平直關係論

- 12. 定義及開端定理.....41
- 13. 常數組有平直關係之條件.....44
- 14. 多項式之平直關係.....46
- 15. 幾何的例47

第四章

平直方程式

- 16. 不齊次的平直方程式52
- 17. 齊次的平直方程式56
- 18. 齊次平直方程式之基本根系60

第五章

關於方陣之秩的幾個定理

- 19. 普通方陣65
- 20. 對稱方陣68

第六章

平直變換及方陣之結合

- 21. 視作複量之方陣.....73

22. 方陣之乘法	76
23. 平直變換	80
24. 直射變換	83
25. 方陣代數學續論	89
26. 組, 系, 與羣	96
27. 同型性	100

第七章

不變式 最初原理及釋例

28. 幾何的, 代數的, 及算術的絕對不變量,	105
29. 相抵	110
30. 點系或平直方式系之秩之爲不變量	112
31. 相對不變式及協變式	114
32. 關於平直方式的幾個定理	120
33. 交比及調和分隔	123
34. 平面坐標與逆步變數	129
35. 空間直線坐標	132

第八章

雙一次方式

36. 代數的理論	137
37. 一個幾何的應用	140

第九章

二次方式之幾何引論

38. 二次曲面及其切線與切面	143
39. 共軛點及極平面	147
40. 二次曲面之按秩分類	149
41. 二次曲面之方程式之化爲法式	151

第十章

二次方式

42. 普通二次方式及其極式	155
43. 二次方式之方陣及其判別式	157
44. 二次方式之頂點	158
45. 二次方式之化爲平方和	160
46. 二次方式之相抵及其法式	164
47. 可約性	166
48. 二次方式之整函數的不變式	168
49. 簡化二次方式爲平方和之第二法	169

第十一章

實二次方式

50. 惰性定律	176
----------------	-----

51. 實二次方式之分類	180
52. 有定方式及無定方式	183

第 十 二 章

二次方式與一次方式所成之系

53. 平面與直線對於二次曲面之關係	190
54. 附屬二次方式及其他不變式	195
55. 附屬方式之秩	198

第 十 三 章

二 次 方 式 耦

56. 圓錐曲線耦	200
57. 二次方式耦之不變式 λ 方程式	203
58. λ 方程式無重根時之簡化爲法式	205
59. 方式 ψ 爲有定而且滿秩時之簡化爲法式	209

第 十 四 章

多項式一般的性質

60. 因子及可約性	213
61. 普通行列式與對稱行列式之不可約	216
62. 對應的齊次多項式與非齊次多項式	218
63. 多項式之除法	221
64. 多項式之一種特殊的變換	225

第 十 五 章

一元多項式及二元方式之因子與公因子

- 65. 一元多項式及二元方式析因子之基本定理 229
- 66. 正整數之最大公因數 231
- 67. 兩個一元多項式之最大公因子 234
- 68. 兩個一元多項式之消元式 238
- 69. 寫成行列式狀之最大公因子 241
- 70. 方程式之公共根 消元法 242
- 71. $a_0=0$ 及 $b_0=0$ 之兩款 245
- 72. 兩個二元方式之消元式 246

第 十 六 章

二元或多元多項式之因子

- 73. 二元多項式之因子祇含一個變數者 249
- 74. 二元多項式的最大公因子之求法 252
- 75. 二元多項式之因子 255
- 76. 三元或多元多項式之因子 259

第 十 七 章

整函數不變式之普遍定理

- 77. 不變式因子之爲不變式 266
- 78. 引進相對不變式之一個較普遍的路徑 268

79. 不變式與協變式之齊權性	271
80. 幾何性質及齊次原理	276
81. 齊次不變式	280
82. 二元方式之消元式及判別式	287

第十八章

對稱多項式

83. 基本概念 Σ 函數與 S 函數	292
84. 初級對稱函數	295
85. 對稱多項式之權及其次	300
86. 兩個一元多項式之消元式與其判別式	303

第十九章

變數耦之對稱多項式

87. 基本概念 Σ 函數與 S 函數	307
88. 變數耦之初級對稱函數	308
89. 元耦對稱函數	311
90. 二元方式之消元式及其判別式	313

第二十章

元因子及入方陣之相抵

91. λ 方陣及其元變換	320
92. 不變因子及元因子	329

93. 計算不變因子及元因子之實施方法.....	333
94. λ 方陣相抵之又一定義	336
95. λ 方陣之乘法及除法.....	339

第二十一章

雙一次方式耦及平直變換之相抵及分類

96. 方陣耦之相抵	342
97. 雙一次方式耦之相抵	347
98. 直射變換之相抵.....	349
99. 雙一次方式耦之分類	351
100. 直射變換之分類.....	358

第二十二章

二次方式耦之相抵及分類

101. 方陣論中兩個定理	362
102. 對稱方陣	367
103. 二次方式耦之相抵	370
104. 二次方式耦之分類	373
105. 二次方式耦及方式束或方程式束	376
106. 結論	382
索引	386
人名索引	394
英中名詞對照表.....	395

高等代數引論

第一章

多項式及其最基本之性質

1. 一元多項式. 一個含 x 之整函數 (integral rational function), 或簡稱含 x 之多項式 (polynomial), 指一個以如下之式爲定義之函數:

$$(1) \quad c_1 x^{\alpha_1} + c_2 x^{\alpha_2} + \cdots + c_k x^{\alpha_k},$$

其中諸 α 爲正整數或零, 諸 c 爲任何實常數或虛常數. 吾人可假定任兩 α 不相等, 不失其普遍性. 有此假定, 則 $c_i x^{\alpha_i}$ 等代數式謂之多項式之項 (term), c_i 爲此項之係數 (coefficient), 而 α_i 爲其次 (degree). 係數不爲零之諸項中, 其最高之次謂之此多項式之次.

於此須注意以上所定之諸概念——項, 係數, 次——不加於多項式之本身, 而加於用以定此多項式之特式 (1), 且吾人在理想上似可造成兩個完全不同之式皆呈 (1) 式之狀者, 用以表示同一 x 之函數. 吾人即將證明 (參看以下定理 5) 此事

爲不可能；吾人固可隨意加入 (1) 式或從 (1) 式取去任何係數不爲零之項，然此在實際上並未變動 (1) 式也。

如將 (1) 中之項按 a 逐次遞減之序排列，有必要時更補入係數爲零之若干項，此多項式可表以法式

$$(2) \quad a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

吾人須緊記此式所表之多項式，其次不必爲 n ，但當 $a_0 \neq 0$ 時，且僅當此時，此多項式之次爲 n 。

定義 若無論 x 之值爲何，兩多項式 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 之值相等，則此兩多項式稱爲恆等 (identically equal : $f_1 \equiv f_2$)。若無論 x 之值爲何，多項式 $f(x)$ 之值等於零，則此多項式稱爲恆等於零 (identically equal to zero : $f \equiv 0$)。

在初等代數中，吾人曾習多項式之加，減，乘*諸法；換言之，已與兩多項式 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 吾人可求另一多項式，等於其和，其差，或其積。

定理 1. 若 $x=a$ 時，多項式

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

之值等於零，則必有另一多項式

$$\phi_1(x) \equiv a_0x^{n-1} + a'_1x^{n-2} + \cdots + a'_{n-1},$$

使 $f(x) \equiv (x-a)\phi_1(x)$ 。

蓋因已知 $f(a)=0$ ，故

* 除法較覺複雜，將於 § 63 另加討論。

$$f(x) \equiv f(x) - f(a) \equiv a_0(x^n - a^n) + a_1(x^{n-1} - a^{n-1}) + \dots + a_{n-1}(x - a).$$

今從初等代數中兩多項式相乘之法則，知

$$x^k - a^k \equiv (x - a)(x^{k-1} + ax^{k-2} + \dots + a^{k-1}).$$

故

$$f(x) \equiv (x - a)[a_0(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-1}) + a_1(x^{n-2} + ax^{n-3} + \dots + a^{n-2}) + \dots + a_{n-1}].$$

若以方括中之多項式爲 $\phi_1(x)$ ，本定理即已證明。

今設 β 爲 x 之另一值，與 a 不相等而 $f(\beta) = 0$ 。則

$$f(\beta) = (\beta - a)\phi_1(\beta) = 0;$$

又因 $\beta - a \neq 0$ ， $\phi_1(\beta) = 0$ 。故可將頃方證明之定理加於多項式 $\phi_1(x)$ 而得一新多項式

$$\phi_2(x) \equiv a_0x^{n-2} + a_1'x^{n-3} + \dots + a_{n-2}'',$$

使
$$\phi_1(x) \equiv (x - \beta)\phi_2(x),$$

故得
$$f(x) \equiv (x - a)(x - \beta)\phi_2(x).$$

照此進行，即得下述之普遍的結果：

定理 2. 若 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 爲 k 個互異之常數，又若

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \quad (n \geq k),$$

且
$$f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_k) = 0,$$

則
$$f(x) \equiv (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k)\phi(x),$$

其中
$$\phi(x) \equiv a_0x^{n-k} + b_1x^{n-k-1} + \dots + b_{n-k}.$$

將此定理加於 $n = k$ 之特款，可知若 x 等於 n 個各異之值 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 時，多項式 $f(x)$ 之值等於零，則

$$f(x) \equiv a_0(x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_n).$$

又若 $a_0 \neq 0$, 舍 x 等於 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 時外, $f(x)$ 之值不能等於零. 於是已證明.

定理 3. 不能有多於 n 個各異的 x 之值, 令一個含 x 之 n 次多項式之值等於零.

因凡係數皆為零之多項式必為無次, 而無次之多項式顯然恆等於零, 故得下述之基本的結果:

定理 4. 一個含 x 之多項式恆等於零之一個充要條件為其係數皆等於零.

因兩個含 x 之多項式恆等之一個充要條件為其差恆等於零, 得

定理 5. 兩個含 x 之多項式恆等之一個充要條件為其係數皆相同.

此定理示一個多項式之項, 係數及次, 祇繫乎此多項式之本身而與其所藉以表示之特殊方法無關, 如以上所曾言.

2. 多元多項式. 若一個 (x, y) 之函數可表以如下之一式:

$$c_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} + c_2 x^{\alpha_2} y^{\beta_2} + \cdots + c_k x^{\alpha_k} y^{\beta_k},$$

其中諸 α 及諸 β 為正整數或零, 此函數謂之一個多項式.

更普遍的言之, 若一個 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 之函數可表以如下之一式:

$$(1) \quad c_1 x_1^{a_1} x_2^{\beta_1} \cdots x_n^{\nu_1} + c_2 x_1^{a_2} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\nu_2} + \cdots + c_k x_1^{a_k} x_2^{\beta_k} \cdots x_n^{\nu_k},$$

其中諸 a , 諸 β , ... 諸 ν 爲正整數或零, 此函數謂之一個多項式.

於此吾人可假定任意兩項中各 x 之指數不盡相同, 仍不失此定義之普遍性; 例若

$$a_i = a_j, \quad \beta_i = \beta_j, \quad \cdots \quad \mu_i = \mu_j,$$

則 $\nu_i \neq \nu_j$.

有此假定, $c_i x_1^{a_i} x_2^{\beta_i} \cdots x_n^{\nu_i}$ 謂之此多項式之一項, c_i 爲此項之係數, a_i 爲此項對於 x_1 之次, β_i 爲其對於 x_2 之次, 餘類推, 而 $a_i + \beta_i + \cdots + \nu_i$ 爲此項之總次 (total degree), 或簡稱爲此項之次. 係數不爲零之諸項中, 其最高之對於 x_i 之次, 謂之此多項式對於 x_i 之次, 而係數不爲零之諸項中, 其最高之總次, 謂之此多項式之次.

於此, 如 § 1, 以上所解釋之各概念, 不加於多項式之本身而加於用以表此多項式之特式 (1). 但吾人即將證明此表示之方法爲唯一的.

在進一步討論之前, 吾人於此聲明, 照吾人所立之定義, 凡係數皆爲零之多項式係無次的.

當吾人言及一個 n 元多項式時, 其 n 個變數不必皆在, 其變數中之一個或多個, 在各項中之指數可全爲零, 而此一個或多個變數遂完全不現於式中. 例如一個一元多項式, 或即一個常數, 均可視作一個含任何更多個變數之多項式之特

款.

一個多項式,其各項之次相同者稱為齊次 (homogeneous). 此種多項式將稱為方式 (form)*, 按其所含變數之多寡,更別之為二元 (binary), 三元 (ternary), 四元 (quaternary), ..., n 元 (n -ary) 方式,二元方式含兩個變數,三元方式含三,四元方式含四, ..., n 元方式含 n 個.

方式之另一分類法則按其次. 其次為一, 為二, 為三即稱之為一次方式, 二次方式, 三次方式, 餘類推. 但係數皆為零之多項式實際上雖係無次的, 吾人仍可不顧而稱之為一次, 二次, 或任何次的方式.

若一個多項式之係數皆為實數, 則謂之一個實多項式 (real polynomial), 但在本書中, 實多項式之變數仍可有虛值.

為方便起見, 一個多元多項式常按其某一變數之指數遞減之序排列. 例如一個 n 變數多項式可寫作如下之一法式:

$$\phi_0(x_2, \dots, x_n)x_1^n + \phi_1(x_2, \dots, x_n)x_1^{n-1} + \dots + \phi_n(x_2, \dots, x_n),$$

其中諸 ϕ 為含 $n-1$ 個變數 $(x_2, \dots, x_n)$ 之多項式.

在初等代數中, 吾人曾習如何加, 減及乘多項式以得新多項式.

定義. 若無論諸變數之值為何, 兩個多元多項式之值

* 此名詞之用法, 頗有歧異. 作家如 Kronecker 以 form (今譯方式) 之一名詞加於一切多項式. 在另一方面, 英國作家常稱齊次多項式為 quantics.

相等，則此兩個多項式稱為恆等。若無論諸變數之值為何，某多項式之值為零，則此多項式稱為恆等於零。

定理 1. 含任何多變數之一個多項式恆等於零之一個充要條件為其係數皆等於零。

此為充分條件，殆至明顯。吾人用算學歸納法證其為必要條件。吾人既知當變數祇有一個時，此定理為真確（定理 4, § 1），苟吾人假設當變數有 $n-1$ 個時，此定理為真確，而能證明當變數有 n 個時，此定理亦真確，此定理即已完全證明。

今設

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \phi_0(x_2, \dots, x_n)x_1^m + \phi_1(x_2, \dots, x_n)x_1^{m-1} + \dots + \phi_m(x_2, \dots, x_n)$$

恆等於零。若與 $(x_2, \dots, x_n)$ 以任何定值 $(x'_2, \dots, x'_n)$ ， f 成為一個祇含變數 x_1 之多項式，且已知無論 x_1 之值為何，此多項式之值為零。故按定理 4, § 1，其係數必皆為零。

$$\phi_i(x'_2, \dots, x'_n) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, m).$$

但 $(x'_2, \dots, x'_n)$ 既為任何組之值， $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m$ 諸多項式必皆恆等於零。因已假設變數有 $n-1$ 個時，此定理為真確， $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m$ 中之係數必皆為零。但 $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m$ 之係數亦即為 f 之係數。故此定理已證明。

因當兩個多項式之差等於零時，且僅當此時，兩個多項式恆等，吾人立可推得下定理：

定理 2. 兩個多項式恆等之一個充要條件為其相當項之係數各相等。

復次,吾人證

定理 3. 若 f_1 及 f_2 爲含任何多變數的兩個多項式, 其次依序爲 m_1 及 m_2 則其積 $f_1 f_2$ 之次爲 $m_1 + m_2$.

對於一元多項式, 此定理顯爲真確. 今若假設其對於含 $n-1$ 個變數的多項式爲真確, 而能證明其對於含 n 個變數的多項式亦爲真確, 則此定理之算學歸納證法即屬完成.

先取兩多項式均爲齊次之特款. 於此特款, 用初等代數之方法乘兩多項式所得之各項, 其次均爲 $m_1 + m_2$. 故若能證乘積中最少有一項, 其係數不爲零, 此定理對於本特款已屬證明. 將多項式 f_1 及 f_2 按 x_1 之指數遞減之次序排列, 得

$$f_1(x_1, \dots, x_n) \equiv \phi'_0(x_2, \dots, x_n)x_1^{k_1} + \phi'_1(x_2, \dots, x_n)x_1^{k_1-1} + \dots,$$

$$f_2(x_1, \dots, x_n) \equiv \phi''_0(x_2, \dots, x_n)x_1^{k_2} + \phi''_1(x_2, \dots, x_n)x_1^{k_2-1} + \dots.$$

吾人可假設此中 ϕ'_0 及 ϕ''_0 均不恆等於零. f_1 及 f_2 既爲齊次, ϕ'_0 及 ϕ''_0 亦爲齊次, 其次依序爲 $m_1 - k_1$ 及 $m_2 - k_2$. 乘積 $f_1 f_2$ 中對於 x_1 有最高次之項, 必在乘積

$$\phi'_0(x_2, \dots, x_n)\phi''_0(x_2, \dots, x_n)x_1^{k_1+k_2}$$

中, 又因吾人假設本定理對於含 $n-1$ 個變數的多項式爲真確, $\phi'_0\phi''_0$ 爲一個 $m_1 + m_2 - k_1 - k_2$ 次多項式. 在此乘積中任一係數不爲零之項乘以 $x_1^{k_1+k_2}$ 即爲乘積 $f_1 f_2$ 中係數不爲零, 而次爲 $m_1 + m_2$ 之一項. 故此定理對於齊次多項式之款已屬證明.

今取通款, 寫 f_1 及 f_2 如下狀: