目　次

第 一 章

多項式及其最基本之性質

第 二 章

行列式之幾個性質

第三章

平直關係論

第四章

平直方程式

第五章

關於方陣之秩的幾個定理

第六章

平直變換及方陣之結合

第七章

不變式　最初原理及釋例

第八章

雙一次方式

第九章

二次方式之幾何引論

第十章

二次方式

第十一章

實二次方式

第十二章

二次方式與一次方式所成之系

第十三章

二次方式耦

第十四章

多項式一般的性質

第 十 五 章

一元多項式及二元方式之因子與公因子

第 十 六 章

二元或多元多項式之因子

第 十 七 章

整函數不變式之普遍定理

第十八章

對稱多項式

第十九章

變數耦之對稱多項式

第二十章

元因子及λ方陣之相抵

第二十一章

雙一次方式耦及平直變換之相抵及分類

第二十二章

二次方式耦之相抵及分類

高等代數引論

第一章

多項式及其最基本之性質

1. 一元多項式. 一個含 x 之整函數(integral rational function),或簡稱含 x 之多項式(polynomial),指一個以如下之式爲定義之函數:

$$c_1x^{\alpha_1}+c_2x^{\alpha_2}+\cdots+c_kx^{\alpha_k}, \tag{1}$$

其中諸 α 爲正整數或零,諸 c 爲任何實常數或虛常數.吾人可假定任兩 α 不相等,不失其普遍性.有此假定,則 $c_ix^{\alpha_i}$ 等代數式謂之多項式之項 (term), c_i 爲此項之係數 (coefficient), 而 α_i 爲其次 (degree). 係數不爲零之諸項中,其最高之次謂之此多項式之次.

於此須注意以上所定之諸概念——項,係數,次——不加於多項式之本身,而加於用以定此多項式之特式(1),且吾人在理想上似可造成兩個完全不同之式皆呈(1)式之狀者,用以表示同一 x 之函數.吾人即將證明(參看以下定理5)此事

爲不可能;吾人固可隨意加入(1)式或從(1)式取去任何係數不爲零之項,然此在實際上並未變動(1)式也.

如將(1)中之項按 x 逐次遞減之序排列,有必要時更補入係數爲零之若干項,此多項式可表以法式

(2) $$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

吾人須緊記此式所表之多項式,其次不必爲 n,但當 $a_0\neq 0$ 時,且僅當此時,此多項式之次爲 n.

定義. 若無論 x 之值爲何,兩多項式 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 之值相等,則此兩多項式稱爲恆等(identically equal : $f_1\equiv f_2$). 若無論 x 之值爲何,多項式 $f(x)$ 之值等於零,則此多項式稱爲恆等於零(identically equal to zero : $f\equiv 0$).

在初等代數中,吾人曾習多項式之加,減,乘*諸法;換言之,已與兩多項式 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 吾人可求另一多項式,等於其和,其差,或其積.

定理 1. 若 $x=\alpha$ 時,多項式

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

之值等於零,則必有另一多項式

$$\phi_1(x)\equiv a_0x^{n-1}+a_1'x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}',$$

使 $$f(x)\equiv(x-\alpha)\phi_1(x).$$

蓋因已知 $f(\alpha)=0$, 故

* 除法較覺複雜,將於 § 63 另加討論.

$$f(x)\equiv f(x)-f(\alpha)\equiv a_0(x^n-\alpha^n)+a_1(x^{n-1}-\alpha^{n-1})+\cdots\cdots+a_{n-1}(x-\alpha).$$

今從初等代數中兩多項式相乘之法則,知

$$x^k-\alpha^k\equiv(x-\alpha)(x^{k-1}+\alpha x^{k-2}+\cdots\cdots+\alpha^{k-1}).$$

故

$$f(x)\equiv(x-\alpha)[a_0(x^{n-1}+\alpha x^{n-2}+\cdots\cdots+\alpha^{n-1})+a_1(x^{n-2}+\alpha x^{n-3}+\cdots\cdots+\alpha^{n-2})+\cdots\cdots+a_{n-1}].$$

若以方括中之多項式爲$\phi_1(x)$,本定理卽已證明.

今設β爲x之另一值,與α不相等而$f(\beta)=0$. 則

$$f(\beta)=(\beta-\alpha)\phi_1(\beta)=0;$$

又因$\beta-\alpha\neq0$, $\phi_1(\beta)=0$. 故可將頃方證明之定理加於多項式$\phi_1(x)$而得一新多項式

$$\phi_2(x)\equiv a_0x^{n-2}+a_1''x^{n-3}+\cdots\cdots+a_{n-2}'',$$

使 $$\phi_1(x)\equiv(x-\beta)\phi_2(x),$$

故得 $$f(x)\equiv(x-\alpha)(x-\beta)\phi_2(x).$$

照此進行,卽得下述之普遍的結果:

定理2. 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\alpha_k$爲$k$個互異之常數,又若

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n \qquad (n\geqq k),$$

且 $$f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=\cdots\cdots=f(\alpha_k)=0,$$

則 $$f(x)\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_k)\phi(x),$$

其中 $$\phi(x)\equiv a_0x^{n-k}+b_1x^{n-k-1}+\cdots\cdots+b_{n-k}.$$

將此定理加於$n=k$之特款,可知若x等於n個各異之值$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\alpha_n$時,多項式$f(x)$之值等於零,則

$$f(x) \equiv a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

又若 $a_0 \neq 0$, 舍 x 等於 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 時外, $f(x)$ 之值不能等於零. 於是已證明.

定理3. 不能有多於 n 個各異的 x 之值, 令一個含 x 之 n 次多項式之值等於零.

因凡係數皆爲零之多項式必爲無次, 而無次之多項式顯然恆等於零, 故得下述之基本的結果:

定理4. 一個含 x 之多項式恆等於零之一個充要條件爲其係數皆等於零.

因兩個含 x 之多項式恆等之一個充要條件爲其差恆等於零, 得

定理5. 兩個含 x 之多項式恆等之一個充要條件爲其係數皆相同.

此定理示一個多項式之項, 係數及次, 祇繫乎此多項式之本身而與其所藉以表示之特殊方法無關, 如以上所曾言.

2. 多元多項式. 若一個 (x, y) 之函數可表以如下之一式:

$$c_1x^{\alpha_1}y^{\beta_1}+c_2x^{\alpha_2}y^{\beta_2}+\cdots+c_kx^{\alpha_k}y^{\beta_k},$$

其中諸 α 及諸 β 爲正整數或零, 此函數謂之一個多項式.

更普遍的言之, 若一個 $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 之函數可表以如下之一式:

(1) $$c_1x_1^{\alpha_1}x_2^{\beta_1}\cdots x_n^{\nu_1}+c_2x_1^{\alpha_2}x_2^{\beta_2}\cdots x_n^{\nu_2}+\cdots+c_kx_1^{\alpha_k}x_2^{\beta_k}\cdots x_n^{\nu_k},$$

其中諸 α,諸 β,…諸 ν 為正整數或零,此函數謂之一個多項式.

於此吾人可假定任意兩項中各 x 之指數不盡相同,仍不失此定義之普遍性;例若

$$\alpha_i=\alpha_j,\quad \beta_i=\beta_j,\cdots \mu_i=\mu_j,$$

則 $$\nu_i\neq\nu_j.$$

有此假定,$c_ix_1^{\alpha_i}x_2^{\beta_i}\cdots x_n^{\nu_i}$ 謂之此多項式之一項,c_i 為此項之係數,α_i 為此項對於 x_1 之次,β_i 為其對於 x_2 之次,餘類推,而 $\alpha_i+\beta_i+\cdots+\nu_i$ 為此項之總次 (total degree),或簡稱為此項之次.係數不為零之諸項中,其最高之對於 x_i 之次,謂之此多項式對於 x_i 之次,而係數不為零之諸項中,其最高之總次,謂之此多項式之次.

於此,如§1,以上所解釋之各概念,不加於多項式之本身而加於用以表此多項式之特式(1).但吾人即將證明此表示之方法為唯一的.

在進一步討論之前,吾人於此聲明,照吾人所立之定義,凡係數皆為零之多項式係無次的.

當吾人言及一個 n 元多項式時,其 n 個變數不必皆在,其變數中之一個或多個,在各項中之指數可全為零,而此一個或多個變數遂完全不現於式中.例如一個一元多項式,或即一個常數,均可視作一個含任何更多個變數之多項式之特

款.

一個多項式,其各項之次相同者稱爲齊次(homogeneous).此種多項式將稱爲方式(form)*,按其所含變數之多寡,更別之爲二元(binary),三元(ternary),四元(quaternary),…… n元(n-ary)方式,二元方式含兩個變數,三元方式含三,四元方式含四,…… n元方式含n個.

方式之另一分類法則按其次.其次爲一,爲二,爲三卽稱之爲一次方式,二次方式,三次方式,餘類推.但係數皆爲零之多項式實際上雖係無次的,吾人仍可不顧而稱之爲一次,二次,或任何次的方式.

若一個多項式之係數皆爲實數,則謂之一個實多項式(real polynomial),但在本書中,實多項式之變數仍可有虛值.

爲方便起見,一個多元多項式常按其某一變數之指數遞減之序排列.例如一個n變數多項式可寫作如下之一法式:

$$\phi_0(x_2, \cdots x_n)x_1^m + \phi_1(x_2, \cdots x_n)x_1^{m-1} + \cdots + \phi_m(x_2, \cdots x_n),$$

其中諸ϕ爲含$n-1$個變數$(x_2, \cdots x_n)$之多項式.

在初等代數中,吾人曾習如何加,減及乘多項式以得新多項式.

定義. 若無論諸變數之值爲何,兩個多元多項式之值

---

* 此名詞之用法,頗有歧異.作家如Kronecker以form(今譯方式)之一名詞加於一切多項式.在另一方面,英國作家常稱齊次多項式爲quantics.

相等,則此兩個多項式稱爲恆等.若無論諸變數之值爲何,某多項式之值爲零,則此多項式稱爲恆等於零.

定理1. 含任何多變數之一個多項式恆等於零之一個充要條件爲其係數皆等於零.

此爲充分條件,殆至明顯.吾人用算學歸納法證其爲必要條件.吾人既知當變數祇有一個時,此定理爲眞確(定理4, §1),苟吾人假設當變數有 $n-1$ 個時,此定理爲眞確,而能證明當變數有 n 個時,此定理亦眞確,此定理即已完全證明.

今設

$$f(x_1,\cdots x_n)\equiv\phi_0(x_2,\cdots x_n)x_1^m+\phi_1(x_2,\cdots x_n)x_1^{m-1}+\cdots+\phi_m(x_2,\cdots x_n)$$

恆等於零.若與 $(x_2,\cdots x_n)$ 以任何定值 $(x_2',\cdots x_n')$, f 成爲一個祇含變數 x_1 之多項式,且已知無論 x_1 之值爲何,此多項式之值爲零.故按定理4, §1,其係數必皆爲零.

$$\phi_i(x_2',\cdots x_n')=0 \qquad (i=0,1,\cdots m).$$

但 $(x_2',\cdots x_n')$ 既爲任何組之值, $\phi_0,\phi_1,\cdots\phi_m$ 諸多項式必皆恆等於零.因已假設變數有 $n-1$ 個時,此定理爲眞確, $\phi_0,\phi_1,\cdots\phi_m$ 中之係數必皆爲零.但 $\phi_0,\phi_1,\cdots\phi_m$ 之係數亦即爲 f 之係數.故此定理已證明.

因當兩個多項式之差等於零時,且僅當此時,兩個多項式恆等,吾人立可推得下定理:

定理2. 兩個多項式恆等之一個充要條件爲其相當項之係數各相等.

復次,吾人證

定理3. 若f_1及f_2為含任何多變數的兩個多項式,其次依序為m_1及m_2則其積f_1f_2之次為m_1+m_2.

對於一元多項式,此定理顯為眞確.今若假設其對於含$n-1$個變數的多項式為眞確,而能證明其對於含n個變數的多項式亦為眞確,則此定理之算學歸納證法即屬完成.

先取兩多項式均為齊次之特款.於此特款,用初等代數之方法乘兩多項式所得之各項,其次均為m_1+m_2.故若能證乘積中最少有一項,其係數不為零,此定理對於本特款已屬證明.將多項式f_1及f_2按x_1之指數遞減之次序排列,得

$$f_1(x_1, \cdots x_n) \equiv \phi_0'(x_2, \cdots x_n)x_1^{k_1} + \phi_1'(x_2, \cdots x_n)x_1^{k_1-1} + \cdots,$$

$$f_2(x_1, \cdots x_n) \equiv \phi_0''(x_2, \cdots x_n)x_1^{k_2} + \phi_1''(x_2, \cdots x_n)x_1^{k_2-1} + \cdots.$$

吾人可假設此中ϕ_0'及ϕ_0''均不恆等於零.f_1及f_2既為齊次,ϕ_0'及ϕ_0''亦為齊次,其次依序為m_1-k_1及m_2-k_2.乘積f_1f_2中對於x_1有最高次之項,必在乘積

$$\phi_0'(x_2, \cdots x_n)\phi_0''(x_2, \cdots x_n)x_1^{k_1+k_2}$$

中,又因吾人假設本定理對於含$n-1$個變數的多項式為眞確,$\phi_0'\phi_0''$為一個$m_1+m_2-k_1-k_2$次多項式.在此乘積中任一係數不為零之項乘以$x_1^{k_1+k_2}$即為乘積f_1f_2中係數不為零而次為m_1+m_2之一項.故此定理對於齊次多項式之款已屬證明.

今取通款,寫f_1及f_2如下狀: