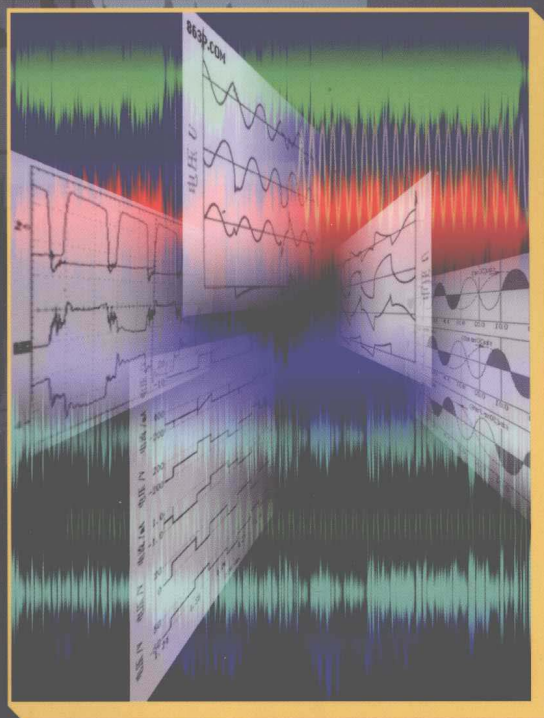


TURING

图灵电子与电气工程丛书

简 明 数字信号处理

姚剑清 编著



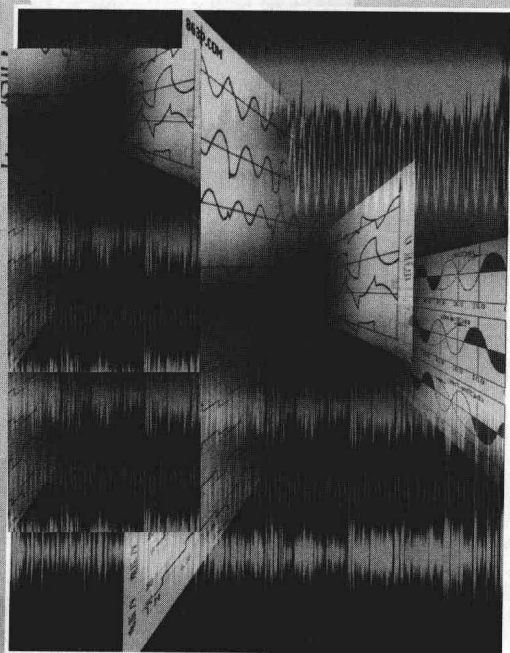
人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING

图灵电子与电气工程丛书

简 明 数字信号处理

姚剑清 编著



人民邮电出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

简明数字信号处理/姚剑清编著. —北京:人民邮电出版社, 2009. 1

(图灵电子与电气工程丛书)

ISBN 978-7-115-18864-9

I. 简… II. 姚… III. 数字信号-信号处理 IV. TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 142667 号

内 容 提 要

数字信号处理(DSP)广泛应用于通信、电子、自动控制等方面,并日益显示出其重要性。本书旨在帮助更多的工程师掌握 DSP 的基本概念和技术。内容包含最基本和最必需的知识,从最本质的层面阐述 DSP 原理,辅以必要的数学公式,配有简明易懂的解释,并尽可能多地使用图表以辅助说明。

本书适用于软硬件研发工程师,也可供高等院校相关专业师生参考。

图灵电子与电气工程丛书 简明数字信号处理

◆ 编著 姚剑清
责任编辑 朱 巍

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本:700×1000 1/16
印张:12
字数:236 千字 2009 年 1 月第 1 版
印数:1-4 000 册 2009 年 1 月北京第 1 次印刷

ISBN 978-7-115-18864-9/TN

定价:29.00 元

读者服务热线:(010)88593802 印装质量热线:(010) 67129223

反盗版热线:(010) 67171154

前 言

当我 25 年前开始学习 DSP(数字信号处理)的时候,DSP 处理器正处于它的第一代,那些处理器是用 N 沟 MOS 工艺制造的,封装在一个比 U 盘还大的 40 线 DIP 内,主频只有 20 MHz,做一次 16 位乘累加需要 200 ns。然而,经过 25 年的发展,DSP 处理器在速度和成本上取得了极大的进展,DSP 技术也越来越显现它的重要性。

尽管 DSP 技术取得了飞速发展,但 DSP 的原理却没有什么改变。而且,这些年的经验告诉我,DSP 原理依然还是那样不易理解。这促使我想到利用我这些年的经验去写一本简单易懂的 DSP 书,这也许对许多从事 DSP 研发的工程师会有些帮助。

为了达到上述目标,这样的一本 DSP 书必须体现下面的原则:(1)只包含最基本和最必需的内容;(2)对原理的阐述必须到达最基本的层面;(3)数学公式对于 DSP 是不可避免的,但对每个公式的推导与含义,必须有清晰的和出自最基本层面的解释,并尽可能使用图表。

以我的经验,数字信号处理的基础是模拟电子技术,而模拟电子技术的难点是对模拟信号的理解。为此,本书着重描述了作为信号最小单位的复指数信号,并把它应用于一些最基本概念的推导和说明,这包括傅里叶级数、线谱、频率响应、离散傅里叶变换等。

为了帮助理解和记忆,傅里叶级数、复指数、信号正交性、卷积等重要概念在本书中将多次出现,以便从多个侧面进行描述。比如,本书将从正余弦信号和复指数信号两个侧面叙述信号正交性的概念。

相位在信号处理中是比较难懂的。本书将着重说明相位的问题。比如,对线性相位的概念,我们用信号的时域波形解释。本书对于负频率的相位也做了比较仔细的叙述,说明在实数信号的情况下,负频率的相位是与正频率的相位互补的。我们还说明了如何把幅频响应中的负号归入相频响应的问题。

本书共分 10 章。第 1 章讲述了信号处理的预备知识,包括数学方面和连续时域方面的一些要点。这对于理解本书中的原理和概念是必需的。第 2 章,也就是本章,叙述了数字信号处理的几个侧面,以便让读者从轮廓上对 DSP 有比较完整的了解。

第 3 章和第 4 章讲述了从连续时域过渡到离散时域的全过程。其中第 3 章讲述了连续时域信号是如何用理想采样完成时域离散化的。第 4 章从连续时域的拉普拉斯变换导出 z 变换,还叙述了 z 变换的一些主要性质。当在第 4 章进入离散时域之后, z 变换就成为主要的分析工具。

第5章讨论了离散时域系统的主要特性,这是理解和掌握离散时域系统的最重要的内容。由于第5章的重要性,在接下来的第6章中,详细分析了5个非常基本的离散时域系统。所以,第6章的作用是对前面几章内容的一次复习,同时也有助于对后面数字滤波器和离散傅里叶变换的理解。

第7章讨论了数字滤波器的分析和设计,仔细讨论了相位和线性相移。在这一章的最后还叙述了如何使用 MATLAB 完成滤波器设计的过程。第8章中讨论的插值和抽取以及再采样和 DAC 操作也是数字信号处理的主要内容,而且是实际工作中非常需要的。

第9章和第10章讨论了离散傅里叶变换(DFT)和快速傅里叶变换(FFT)。在这两章的讨论中,主要依靠了第1章中详细讨论的复指数信号,因为DFT和FFT都是依靠复指数矢量来计算的。在第9章中,我们还认真地讨论了窗函数的特性,给出了在DFT和FFT中选用窗函数的一般性建议。在第10章中,我们分析了FFT的时域抽取法和频域抽取法,并由于使用了A两项式和B两项式,使分析变得简洁和直观。

上面这10章构成了数字信号处理的最基本的内容。掌握了这10章的基本内容,也就掌握了DSP的基础,具备了独立完成DSP开发的能力。

本书中对概念的理解方式不少是来自作者自己的经验,因而一定会有不完整的地方,恳请读者评论指正。最后,我要感谢史学晶、成璐、石小磊、李良衍和李应选等同事,他们认真阅读了全书,并提出了许多宝贵建议,指出了不少错误和不妥之处。

姚剑清

2008年6月于北京

目 录

第 1 章 信号处理预备知识 1

1.1 复数运算 1

1.1.1 复函数的定义 1

1.1.2 直角坐标与极坐标 1

1.1.3 单值函数与多值函数 2

1.1.4 等比级数求和 3

1.2 复指数信号与负频率 3

1.3 sinc 函数 6

1.4 傅里叶级数 7

1.4.1 周期信号展开为傅里叶级数 7

1.4.2 函数与展开式的奇偶性 9

1.4.3 复指数形式的傅里叶级数 11

1.5 傅里叶变换与反变换 12

1.5.1 傅里叶变换 13

1.5.2 傅里叶反变换 14

1.6 能量信号与功率信号 15

1.7 线谱与连续谱 16

1.7.1 线谱 16

1.7.2 连续谱 17

1.7.3 线谱与连续谱的关系 18

小结 18

习题 19

第 2 章 数字信号处理概述 21

2.1 数字信号处理系统 21

2.2 原理与实现 22

2.3 硬件与软件 22

2.4 数字滤波与频谱分析 23

2.5 开发周期 23

2.5.1 把需求表达式变为

高级语言算法 23

2.5.2 把高精度程序变为低精度程序 24

2.5.3 把高级语言程序变为低级语言程序 24

2.5.4 把低级语言程序变为硬件描述代码 25

2.6 优点与缺点 25

第 3 章 采样 27

3.1 用 ADC 完成采样 27

3.2 理想采样 28

3.2.1 δ 函数的筛选特性 29

3.2.2 采样脉冲函数 $p(t)$ 31

3.2.3 理想采样的谱分析 32

3.3 采样定理与混叠 35

3.4 抗混叠 36

小结 38

习题 38

第 4 章 z 变换 40

4.1 已采样信号的拉普拉斯变换 40

4.2 从拉普拉斯变换到 z 变换 42

4.3 s 平面与 z 平面的映射 45

4.4 z 变换的性质 45

4.4.1 线性性质 46

4.4.2 初值定理 46

4.4.3 终值定理 46

4.4.4 卷积定理 47

4.5 延迟操作 49

4.6 z 反变换 52

4.6.1 长除法 53

4.6.2 部分分式法 54

小结 55

习题	55	6.3.2 梳状滤波器的分析	87
第 5 章 离散时域系统	57	6.4 平均滤波器	88
5.1 离散时域系统的性质	57	6.5 全通滤波器	91
5.1.1 移不变系统	57	习题	93
5.1.2 因果性系统	58	第 7 章 数字滤波器	95
5.1.3 线性系统	58	7.1 模拟滤波器设计	95
5.2 卷积	59	7.1.1 常用模拟滤波器	95
5.2.1 单位冲击响应	59	7.1.2 滤波器的频率变换	96
5.2.2 把输入序列分解为 δ 序列	60	7.2 数字滤波器的实现	99
5.2.3 把每个 δ 序列转换成输出序列	60	7.2.1 直接形式	99
5.2.4 用输出序列合成卷积输出	61	7.2.2 串联形式	101
5.2.5 本意的卷积算法	62	7.2.3 并联形式	101
5.2.6 卷积小结	63	7.3 IIR 滤波器设计	102
5.3 差分方程与传递函数	63	7.3.1 单位冲击不变性	103
5.3.1 差分方程	63	7.3.2 双线性变换	104
5.3.2 从差分方程导出传递函数	64	7.4 FIR 滤波器设计	106
5.3.3 由系统冲击响应计算传递函数	64	7.4.1 线性相位	106
5.3.4 从传递函数导出差分方程	65	7.4.2 窗函数法	109
5.4 频率响应	65	7.5 用 MATLAB 设计数字滤波器	115
5.5 零点与极点	69	7.5.1 进入滤波器设计与分析窗口	115
5.6 频率响应的零极点图解法	71	7.5.2 完成滤波器设计	115
5.7 离散时域系统的稳定性	76	7.5.3 核对滤波器特性	116
5.7.1 稳定性时域判据	76	7.5.4 把滤波器系数存入文件	116
5.7.2 稳定性频域判据	77	小结	116
小结	78	习题	117
习题	79	第 8 章 插值与抽取	119
第 6 章 离散时域系统实例	81	8.1 插值	119
6.1 点阻滤波器	81	8.2 抽取	122
6.2 谐振器	83	8.3 插值与抽取的结合使用	123
6.3 梳状滤波器	85	8.4 再采样	124
6.3.1 频率响应在 $[0, \omega_s]$ 区间内的周期性	86	8.5 用 DAC 从离散时域返回连续时域	128
		小结	131
		习题	132

第 9 章 离散傅里叶变换	133
9.1 复指数形式的傅里叶级数	133
9.2 离散傅里叶变换	133
9.3 离散傅里叶反变换	136
9.4 离散傅里叶变换与反变换	
小结	137
9.5 旋转矢量	137
9.6 整数基频信号分解到 DFT 频	
率点	139
9.7 非整数基频信号分解到 DFT 频	
率点	141
9.8 DFT 的性质	143
9.8.1 线性叠加	144
9.8.2 时移定理	144
9.8.3 频移定理	146
9.8.4 循环卷积	146
9.8.5 帕塞伐尔定理	147
9.8.6 对称性	148
9.9 窗函数的特性	149
9.9.1 矩形窗	150
9.9.2 汉宁窗	151
9.9.3 汉明窗	152
9.9.4 布莱克曼窗	153
9.10 窗函数的比较	153
9.10.1 窗函数引起频谱的循	
环卷积	154
9.10.2 循环卷积的计算过	
程	155
9.10.3 通过频谱测试比较窗	
函数的泄漏	157
9.10.4 窗函数的主要特性	158
9.10.5 如何选用窗函数	159
小结	159
习题	160

第 10 章 快速傅里叶变换	161
10.1 时域抽取 FFT 算法	161
10.1.1 把 $X(k)$ 分解为 2	
个 4 点 DFT	161
10.1.2 把 $X(k)$ 分解为 4	
个 2 点 DFT	162
10.1.3 DFT 的分析与综合	163
10.1.4 用 4 个 2 点 DFT	
合成 $X(k)$	163
10.1.5 用 2 个 4 点 DFT	
合成 $X(k)$	164
10.1.6 第三步是简单的	
分裂	165
10.2 频域抽取 FFT 算法	165
10.2.1 把一个 8 点 DFT 分解	
为两个 4 点 DFT	166
10.2.2 把一个 4 点 DFT 分解	
为两个 2 点 DFT	166
10.2.3 频域抽取 8 点 DFT	
的综合	167
10.3 蝶形计算	169
10.4 位逆转	169
10.5 超过 8 点的 FFT 算法	170
10.5.1 时域抽取 16 点 FFT	
算法	171
10.5.2 频域抽取 16 点 FFT	
算法	172
10.6 FFT 的计算顺序	172
小结	173
习题	173
练习题参考答案	175
参考文献	178
索引	179
基本符号表	182

第 1 章

信号处理预备知识

在第 1 章中,我们收集了一些理解数字信号处理所必需的基础知识,以便读者可以比较容易地阅读和理解本书中关于数字信号处理的基本原理和概念。本书所收集的内容并不追求完整性和严密性,而是讲求实用性和简洁性。

1.1 复数运算

1.1.1 复函数的定义

我们用 $s=\sigma+j\omega$ 表示一个复变量,用 $W=U+jV$ 表示另一个复变量,其中的 σ 、 ω 、 U 、 V 都是实数。如果对于复变量 $s=\sigma+j\omega$ 的每一个值, $W=U+jV$ 总有一个值或一组值与之对应,那么, W 就叫做复变量 s 的一个函数。这两个复变量之间的对应关系可以写为 $W=F(s)$ 。

1.1.2 直角坐标与极坐标

一个复变量可以有两种表示法:直角坐标表示法和极坐标表示法。 $s=\sigma+j\omega$ 是直角坐标表示法,复变量 s 由直角坐标中实轴与虚轴上的两个实数 σ 和 ω 表示,因而也就表示为复平面上的一个点。而 $s=re^{j\theta}$ 是复变量 s 的极坐标表示法,它由极坐标中的模 r 和幅角 θ 表示,其中 r 和 θ 也是两个实数。

欧拉恒等式把直角坐标表示法和极坐标表示法联系了起来:

$$\begin{cases} e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \\ e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j\sin(\theta) \end{cases} \quad (1-1)$$

其中,左边是极坐标形式,它的模 $r=1$,所以是一个单位复指数;右边是直角坐标形式。

欧拉恒等式也可以用图 1-1 来表示。图中的水平轴为实轴(Re),垂直轴为虚轴(Im)。圆的半径等于 1,所以是一个单位圆。在图 1-1 中,单位复矢量 $e^{j\theta}$ 被分解为沿着实轴和虚轴方向上的两个矢量 $\cos(\theta)$ 和 $j\sin(\theta)$ 。

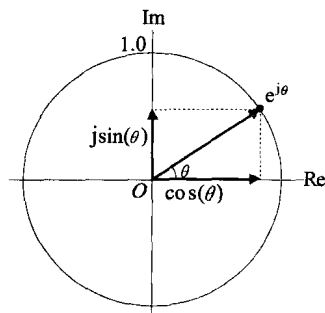


图 1-1 单位复指数与正余弦信号之间的关系

这就是欧拉恒等式的含义:一个复矢量可以分解为一对正余弦矢量,或者反过来,一对正余弦矢量可以合成为一个复矢量。

根据欧拉恒等式(1-1),我们可以由复变量 s 的极坐标形式 $s = re^{j\theta}$ 计算出它的直角坐标形式 $s = \sigma + j\omega$:

$$\begin{cases} \sigma = r \cos(\theta) \\ \omega = r \sin(\theta) \end{cases} \quad (1-2)$$

反过来,我们也可以由 s 的直角坐标形式 $s = \sigma + j\omega$ 计算出它的极坐标形式 $s = re^{j\theta}$:

$$\begin{cases} r = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \\ \theta = \tan^{-1}(\omega/\sigma) \end{cases} \quad (1-3)$$

1.1.3 单值函数与多值函数

如果对于每一个 s 的值, W 只有一个值与之对应,那么 $W = F(s)$ 叫做单值函数。如果 W 有多于一个值与之对应,那么 $W = F(s)$ 叫做多值函数。

比如, $W = F(s) = 3s + 2$ 是一个单值函数。因为 W 可以表示为:

$$W = U + jV = 3 \times (\sigma + j\omega) + 2 = (3\sigma + 2) + j3\omega \quad (1-4)$$

因此有:

$$\begin{cases} U = 3\sigma + 2 \\ V = 3\omega \end{cases} \quad (1-5)$$

对于 σ 和 ω 的一对值,只有一对 U 和 V 的值与之对应。

但是,如果函数 $F(s)$ 是一个开方运算,那么这个函数就是一个多值函数。比如,复函数 $W = F(s) = s^{1/2}$ 就是一个多值函数。为了便于分析,我们把复变量 s 表示为极坐标形式:

$$s = re^{j\theta} \quad (1-6)$$

这样就可得到:

$$W = (re^{j\theta})^{1/2} \quad (1-7)$$

由于复指数是以幅角的 2π 为周期的,即:

$$e^{j\theta} = e^{j(\theta + 2k\pi)}, \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (1-8)$$

所以在式(1-7)中,对于 s 的一个值, W 就有两个值与之对应:

$$\begin{cases} W_1 = r^{1/2} e^{j\theta/2} \\ W_2 = r^{1/2} e^{j\theta/2 + \pi} \end{cases} \quad (1-9)$$

其中, $r^{1/2}$ 为 r 的算术平方根。

在信号处理中求解复数方程时,也会遇到多值问题。比如,有一个复数方程

$$z^5 - 1 = 0 \quad (1-10)$$

其中, z 是一个复变量。

上式中的 1 可以写成极坐标的形式 e^{j0} 。因此,式(1-10)变为:

$$z^5 = e^{j0} \quad (1-11)$$

所以,方程的5个根可以写为:

$$z = e^{j(0+2k\pi/5)} = e^{j2k\pi/5}, \quad k=0,1,2,3,4 \quad (1-12)$$

或者写为:

$$\begin{cases} z_1 = e^0 = 1 \\ z_2 = e^{j2\pi/5} \\ z_3 = e^{j4\pi/5} \\ z_4 = e^{j6\pi/5} \\ z_5 = e^{j8\pi/5} \end{cases} \quad (1-13)$$

这5个根均匀地分布在单位圆上。

1.1.4 等比级数求和

假设有一个复数的等比级数 $1+z+z^2+\cdots+z^n$, 如果公比 $z \neq 1$, 那么这个等比级数可以表示为:

$$1+z+z^2+\cdots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \quad (1-14)$$

上式就是等比级数的求和公式, 下面证明这个公式。

我们从式(1-14)的左边开始。由于 $z \neq 1$, 就可以对式(1-14)的左边乘以分式 $(1-z)/(1-z)$ 。把其中的两个因式的相乘展开之后, 可以得到:

$$\text{式(1-14)的左边} = \frac{1+z+z^2+\cdots+z^n - z - z^2 - \cdots - z^n - z^{n+1}}{1-z} \quad (1-15)$$

在上式的分子中, 大多数的项都可以两两抵消。所以, 上式变为:

$$\text{式(1-14)的左边} = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \quad (1-16)$$

上式的右边就是式(1-14)的右边。我们就证明了等比级数的求和公式(1-14)。

1.2 复指数信号与负频率

在实验室中, 正余弦信号(指正弦信号或余弦信号)是我们能看到的最小信号单位。但是, 通过欧拉恒等式, 可以把正余弦信号分解成更小的信号单元——复指数信号。欧拉恒等式(1-1)左边的 $\exp(j\theta)$ 和 $\exp(-j\theta)$ 就是这样的两个复指数信号。

另一方面, 我们只要对式(1-1)稍做处理, 就可以把一个余弦信号表示为两个复指数信号之和:

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad (1-17)$$

上式中, 我们用 ωt 代替了式(1-1)中的 θ 。

同样, 我们可以把一个正弦信号表示为两个复指数信号之差:

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad (1-18)$$

式(1-17)和式(1-18)的右边各有两个复指数信号,它们的角频率分别是 ω 和 $-\omega$ 。所以,这两个复指数信号是以 $\pm\omega$ 为角频率而围绕单位圆旋转的单位复矢量。

由于 j 代表虚轴上的单位长度,因而可以用极坐标形式写为 $j=e^{j\pi/2}$ 。相应地,等式(1-18)分母中的 j 就可以写为 $1/j=j^{-1}=e^{-j\pi/2}$ 。此外,我们可以用 $e^{j\pi}$ 代替式(1-18)分子中的减号。这样之后,式(1-18)变为:

$$\sin(\omega t)=e^{-j\pi/2}\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2}=\frac{1}{2}(e^{-j\pi/2}e^{j\omega t}+e^{j\pi/2}e^{-j\omega t}) \quad (1-19)$$

上式中的两个复矢量现在变成了相加的形式。

我们来解释式(1-17):一个余弦信号可以用两个旋转复矢量合成。我们在单位圆所在的平面上画出两个旋转方向相反的单位复矢量 v_+ 和 v_- ,如图1-2所示。图中, $v_+=e^{j\omega t}$ 是正向旋转的复矢量, $v_-=e^{-j\omega t}$ 是反向旋转的复矢量。显然,当时间为零时,复矢量 v_+ 和 v_- 重合于实轴的正方向上。

为了图示的清晰,我们把复矢量 v_+ 和 v_- 以及合成出余弦信号的过程另外画在图1-3中。在图1-3中,两个复矢量之和是一条沿着实轴方向的合成复矢量 $v_{\cos}$ 。由式(1-17)可知,我们需要证明 $\cos(\omega t)$ 等于合成复矢量 $v_{\cos}$ 长度的一半。为此,在图1-3中从复数点 $e^{j\omega t}$ 引一条垂直于实轴的虚线 h 。因此,在虚线的两侧得到两个全等的直角三角形。因为斜边长度为1,所以每个直角三角形的底边都等于 $\cos(\omega t)$ 。因此, $\cos(\omega t)$ 确实等于合成复矢量 $v_{\cos}$ 长度的一半。另外,复矢量 $v_{\cos}$ 的方向是在实轴的方向上,所以, $v_{\cos}$ 是一个实数。这就验证了式(1-17)的正确性。

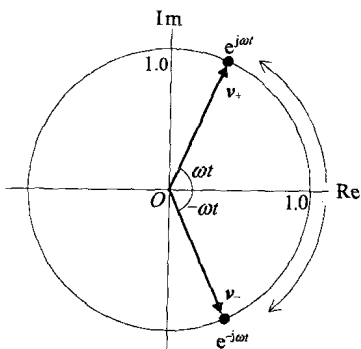


图 1-2 复平面上的两个旋转复矢量

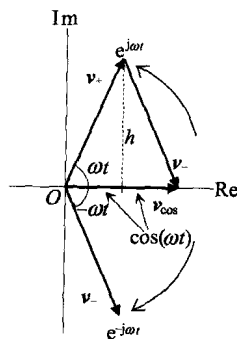


图 1-3 用两个旋转复矢量合成一个余弦信号

我们再用图1-4来验证式(1-18),也就是式(1-19)。首先由等式(1-19)可知,当时间 $t=0$ 时,复矢量 v_+ 和 v_- 分别位于负虚轴和正虚轴上;也就是说,图1-4中的两个复矢量 v_+ 和 v_- 是从虚轴开始旋转的。这与图1-3中 $\cos(\omega t)$ 的情况不同。假设现在的时间为 t ,所以,正频率的复矢量旋转了 ωt 的弧度,负频率的复矢量旋转了 $-\omega t$ 的弧度。两个复矢量现在旋转到了图1-4中的 $e^{j\omega t}$ 和 $e^{-j\omega t}$ 位置上;两个复矢量之和就是图中的 $v_{\sin}$,它在实轴的方向上,所以是一个实数。而且, $v_{\sin}$ 长度的一半等于 $\sin(\omega t)$ 。这样,我

们也验证了式(1-18)的正确性。

现在归纳上面的验证过程:随着 t 的增长,图 1-3 和图 1-4 中的两个单位复矢量 v_+ 和 v_- 同步地正反向旋转,并在旋转过程中合成出沿着实轴方向的一个余弦信号和一个正弦信号。这也就是说,一个正弦或余弦信号可以分解为两个同步反向旋转的单位复矢量 $e^{j\omega t}$ 和 $e^{-j\omega t}$ 。这样,我们把正余弦信号与更基本的复指数信号联系了起来。

从式(1-17)和式(1-18)可以看出,在把一个正余弦信号分解为两个复指数信号之后,信号的频率随即扩展到了负频率的方向上。因此,负频率是与复指数信号密切相关的,所谓“负频率”就是复指数信号在负方向(顺时针方向)上的旋转。

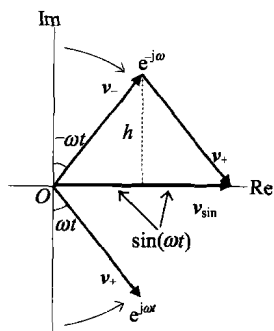


图 1-4 用两个旋转复矢量合成一个正弦信号

现在用频谱的方法来表示正余弦信号、复指数和负频率之间的关系。比如,图 1-5 表示了式(1-17)中那个余弦信号的频谱。其中上图是余弦信号的幅度谱,它的两个复指数的振幅都等于 0.5;下图是余弦信号的相位谱,两个复指数的相位都等于零。所谓“相位”一般是指信号的“初始相位”,也就是 $t=0$ 时的相位。在式(1-17)和图 1-3 中,两个复指数信号都是从零相位开始旋转的。

图 1-6 表示了式(1-18)或式(1-19)中的正弦信号的频谱,它的幅度谱与余弦信号完全一样。但是,下图指出了正弦信号有不同的初始相位,它的正负两个复指数的初相分别为 $-\pi/2$ 和 $\pi/2$,这其实是式(1-19)右边的那两个复指数常量 $e^{-j\pi/2}$ 和 $e^{j\pi/2}$ 所给出的初始相位。

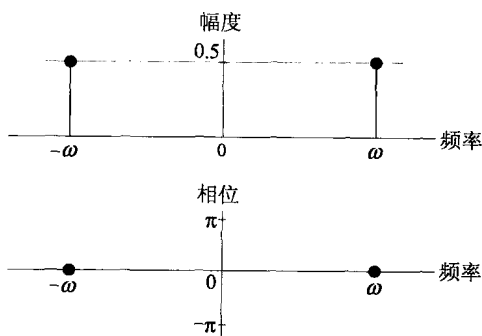


图 1-5 余弦信号的频谱

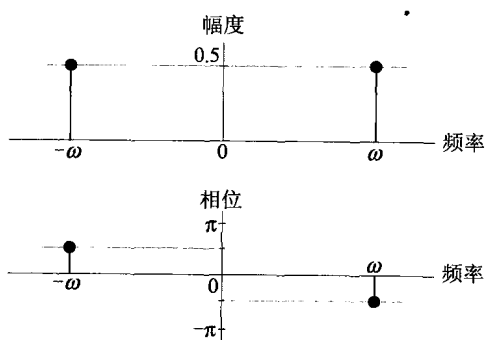


图 1-6 正弦信号的频谱

最后指出复指数信号的一个非常有用的特性:单一频率性。我们用等式(1-1)中的两个复指数信号来说明,但需要把其中的幅角 θ 改写为 ωt :

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t) \end{cases} \quad (1-20)$$

这样,在式(1-20)的左边,就是两个频率相反的单位复指数信号 $\exp(j\omega t)$ 和 $\exp(-j\omega t)$ 。它们的频谱都是只包含一条谱线的线谱,如图 1-7 所示,而不像正余弦信号那样有两条对称的谱线。此外,两个单位复指数信号的初相都为零,所以图中没有画出。

从图 1-5 和图 1-6 可以看出,只要是实数信号,它的幅度谱一定是偶对称的,而相位谱一定是奇对称的。但图 1-7 的情况就不一样,完全没有了这种对称性,其原因是图 1-7 中的信号不是实数,而是复数。

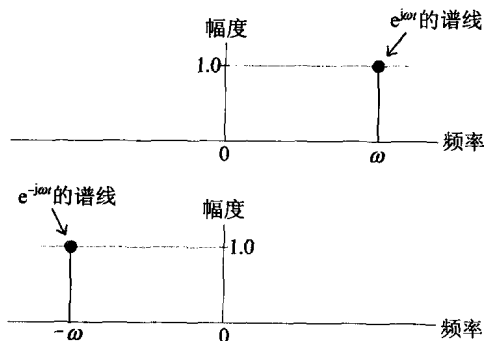


图 1-7 两个单位复指数信号的幅度谱

1.3 sinc 函数

sinc 函数是信号处理中最常见的一种函数,可以定义为:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (1-21)$$

其中, x 的取值范围是 $(-\infty, \infty)$ 。

由式(1-21)可以看出 $\text{sinc}(x)$ 函数的大概形状。只要 x 为一个非零整数, $\text{sinc}(x)$ 的值就一定为零。当 $x=0$ 时, $\text{sinc}(x)$ 的值达到最大值 1。而且,由于式(1-21)的分子与分母都是奇函数,所以 $\text{sinc}(x)$ 是一个偶函数。此外,当 x 在正负两个方向上延伸时,分母 πx 的绝对值线性增加,而分子 $\sin(\pi x)$ 只在做等幅振荡。因此, sinc 函数在 x 的正负方向上呈现趋于零的减幅振荡。图 1-8 画出了 sinc 函数的主要部分。由于 sinc 函数值是经常用到的,我们把函数值的主要部分列于表 1-1 中。

最后要说明的是,虽然 $\text{sinc}(x)$ 在 $x=0$ 处有一个间断点,但由于此时 $\text{sinc}(x)$ 的左右极限都等于 1,我们就可以定义 $\text{sinc}(0)=1$,以去除这个间断点。此外,如果对式(1-21)右边的分式使用洛必塔法则,也能得到同样的结果。

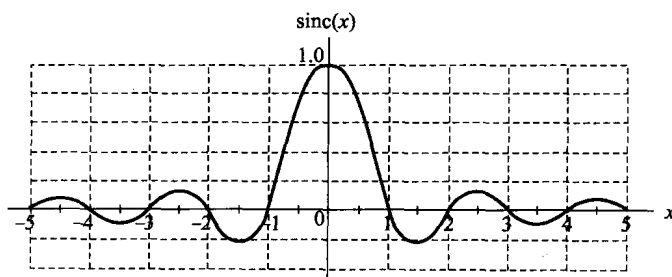


图 1-8 sinc 函数的主要部分

表 1-1 sinc 函数值

x	$\text{sinc}(x)$	x	$\text{sinc}(x)$	x	$\text{sinc}(x)$
0.0	1.0	1.0	0.0	3.0	0.0
0.125	0.974	1.25	-0.180	3.25	-0.069
0.25	0.900	1.5	-0.212	3.5	-0.91
0.375	0.784	1.75	-0.129	3.75	-0.60
0.5	0.637	2.0	0.0	4.0	0.0
0.625	0.471	2.25	0.100	4.25	0.053
0.75	0.300	2.5	0.127	4.5	0.071
0.875	0.139	2.75	0.082	4.75	0.047

1.4 傅里叶级数

在信号处理中,我们经常用到傅里叶级数展开的方法。如果把展开式中的正余弦函数用复指数信号表示,就可以得到复指数形式的傅里叶级数。

1.4.1 周期信号展开为傅里叶级数

把一个周期信号展开为傅里叶级数,就是把这个周期信号表示为无数个正余弦分量之和,这可以写为:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \cdots + b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \cdots \\
 &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)
 \end{aligned} \quad (1-22)$$

其中, $x(t)$ 为连续时域中的一个周期信号,如图 1-9 中那样,它的周期等于 T_0 ,因此,它的角频率 $\omega_0 = 2\pi/T_0$,一般叫做 $x(t)$ 的频率;在傅里叶级数展开中叫做基频,是傅里叶展开式中的最低频率(直流除外)。其他所有正余弦分量的频率都是 ω_0 的整数倍,这些

分量叫谐波分量。在式(1-22)中,我们实际上还规定了所有正余弦分量的初相都为零。

把 $x(t)$ 展开为傅里叶级数,就是求解式(1-22)中的 a_0 、 a_n 和 b_n 的值。在求解这些值的时候,我们利用了三角函数的正交性原理。具体地说,由于式(1-22)中的所有余弦分量和正弦分量的频率都是基频的整数倍,所以,在 $x(t)$ 的一个周期 T_0 内,每一个这样的正余弦分量都完成了自己的整数个周期。比如图 1-10a 的上面那个信号,它的频率是基频的两倍,所以,它在信号 $x(t)$ 的一个周期 $[-T_0/2, T_0/2]$ 之内完成了自己的两个周期。

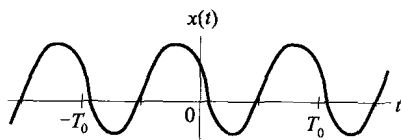


图 1-9 连续时域中的一个周期信号

在“整数个周期”的前提下,就有一个关于余弦分量正交性的原理:两个相同频率的余弦分量的乘积在 $x(t)$ 的一个周期 T_0 内的积分一定大于零;而两个不同频率的余弦分量的乘积在 $x(t)$ 的一个周期 T_0 内的积分一定为零。

这可以用图 1-10 来说明,图中的时间 t 从 $-T_0/2$ 到 $T_0/2$,正好是 $x(t)$ 的一个周期。在图 1-10a 中,上面与中间这两个波形是两个频率相同的余弦分量。由于它们的频率相同,所以它们的乘积,也就是图 1-10a 下面的那个波形,都是正的。因此,这个乘积在 $x(t)$ 的一个周期 T_0 内的积分就一定大于零。但是,在图 1-10b 中,上面的波形两倍于基频,中间的波形三倍于基频。由于它们的频率不同,它们的乘积,即图 1-10b 中下面的波形,是正负对称的。所以,这个乘积在 $x(t)$ 的一个周期 T_0 内的积分就一定为零。这就是两个余弦分量之间的正交性。

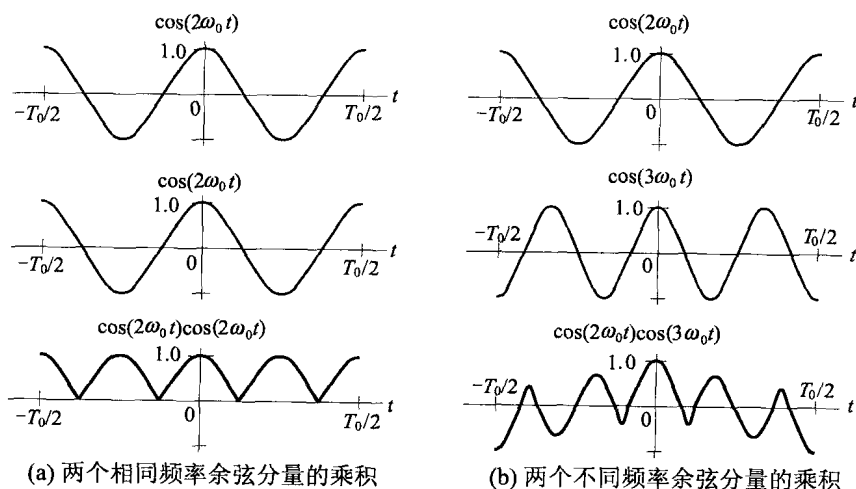


图 1-10 两个整数周期的余弦分量之间的乘积波形:如果频率相同,乘积全部为正;如果频率不同,乘积正负对称

同样可以证明,在整数周期的前提下,两个正弦分量之间也存在正交性。而在正弦分量与余弦分量之间,不仅当两者频率不同时,积分等于零;当频率相同时,积分也等于零。

根据这个正交性原理,如果要计算式(1-22)傅里叶级数展开式中第 m 项余弦分量的系数 a_m ,就只要对等式(1-22)两边同时乘以 $\cos(m\omega_0 t)$,并在区间 $[-T_0/2, T_0/2]$ 内对等式两边分别积分。积分的结果是,在等式右边只有 $a_m \cos(m\omega_0 t)$ 这一项的积分不为零,其他所有项的积分都为零。因此,这个积分可以化简为:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(m\omega_0 t) dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} a_m \cos^2(m\omega_0 t) dt \quad (1-23)$$

上式右边的被积函数 $\cos^2(m\omega_0 t)$ 可以用三角恒等式变换成 $[1 + \cos(2m\omega_0 t)]/2$ 。所以,上式变为:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(m\omega_0 t) dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} a_m [0.5 + 0.5 \cos(2m\omega_0 t)] dt \quad (1-24)$$

由于余弦函数的正负对称性,上式右边的余弦项 $\cos(2m\omega_0 t)$ 的积分一定为零。所以,上式可演算为:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(m\omega_0 t) dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} 0.5 a_m dt = 0.5 a_m T_0 \quad (1-25)$$

因此,式(1-22)傅里叶级数中的余弦项系数 a_m 为:

$$a_m = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(m\omega_0 t) dt \quad (1-26)$$

利用相同的计算过程,可以得到展开式(1-22)中直流项系数的计算公式:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt \quad (1-27)$$

同样可以得到式(1-22)中正弦项系数 b_m 的计算公式:

$$b_m = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(m\omega_0 t) dt \quad (1-28)$$

至此,我们导出了傅里叶级数展开式(1-22)中的直流、余弦和正弦项系数的计算公式,这也就完成了对周期函数 $x(t)$ 的傅里叶级数展开。

1.4.2 函数与展开式的奇偶性

我们现在来观察傅里叶级数展开式的对称性。从式(1-27)的积分式可知,如果 $x(t)$ 为奇函数,那么式(1-27)的积分一定等于零。因此,我们得到一个结论:如果 $x(t)$ 为奇函数,那么,它的傅里叶级数展开式中的直流项系数 a_0 一定为零。

这个结论很容易推广到余弦项:如果 $x(t)$ 是一个奇函数,那么,式(1-26)中的被积函数 $x(t) \cos(m\omega_0 t)$ 也是一个奇函数,所以,傅里叶级数展开式中的余弦项的系数 a_m 一定都为零。反之,如果 $x(t)$ 是一个偶函数,那么式(1-28)中的被积函数 $x(t) \sin(m\omega_0 t)$ 就是一个奇函数,结果是,傅里叶级数展开式中的正弦项系数 b_m 都为零。

现在把奇偶性的结论归纳如下:在一个傅里叶级数展开中,如果 $x(t)$ 为偶函数,