

大变形固结理论 及其有限元法

谢永利 著

人民交通出版社

536

1.5
1

国家自然科学基金项目(No. 59879021)

中国博士后科学基金资助出版

(西安理工大学博士后流动站)

Da bianxing Gujielilun Jiqi Youxianyuanfa

大变形固结理论及其有限元法

谢永利 著

人民交通出版社

图书在版编目(CIP)数据

大变形固结理论及其有限元法/谢永利著. —北京:人民交通出版社, 1998. 11

ISBN 7-114-03221-8

I. 大… II. 谢… III. ①固结理论②有限元法-应用-固结理论 IV. TU411.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 34699 号

大变形固结理论及其有限元法

谢永利

责任印制:孙树田

人民交通出版社出版发行

(100013 北京和平里东街 10 号)

各地新华书店经销

北京牛山世兴印刷厂印刷

开本:787×1092 1/16 印张:10.25 字数:240 千

1998 年 11 月 第 1 版

1998 年 11 月 第 1 版 第 1 次印刷

印数:0001-2000 册 定价:25.00 元

ISBN 7-114-03221-8

TU · 00053

内 容 提 要

本书应用张量这一有力的数学工具,从连续介质力学的基本原理出发,系统而清晰地阐述了大变形固结理论及其有限元方法,并扼要介绍了作者编制的大变形固结有限元分析程序(LSCFEA),通过对软土地基大变形固结性状与工程实例的分析,架起了大变形理论与工程应用之间的桥梁。书中大部分内容是作者近年来的主要研究成果,基本反映了国内大变形固结理论的最新进展。

本书可作为岩土工程学科研究生和土建类专业本科生的选修课教材,也可作为交通、铁路、建筑、冶金、水电等行业从事这方面研究与设计人员的参考书。

前 言

固结理论一直是土力学的重要课题之一,是其精华所在。早在 1925 年, Terzaghi 就提出了著名的有效应力原理,并据此建立了一维固结理论,成为土力学发展史上的一个重要里程碑。但传统的固结理论都是基于小变形假定,难以体现软土固结中的大变形特征。本书从连续介质力学的基本原理出发,首先建立了空间描述的大变形固结问题的控制方程,并在引入线弹性本构关系的前提下,推导了相应的固结微分方程,其形式与传统的 Biot 固结微分方程基本一样,在小变形简化时能直接退化为 Biot 固结微分方程。

为了数值分析之需要,建立了物质描述的大变形固结问题的控制方程,并给出了控制方程相应的矩阵表达式。在此基础上,推导了 T.L. (Total Lagrangian) 表述的大变形固结增量有限元公式,并引入了自修正迭代算法。

小变形情况下的本构方程取决于介质本身的性质,而与坐标的选择无关。但若除去小变形的限制,其本构方程不仅受材料性质的影响,且随构形的选择与转换而异。同时,在大变形情况下,介质元可能产生刚性旋转,这就要求在本构方程中选择合适的客观度量,抵消刚性转动不变性的影响。书中以克希荷夫(Kirchhoff)应力张量之增量 ΔS_{ij} 和格林(Green)应变张量之增量 ΔE_{ij} 为应力和应变的客观度量,推导了基于物质描述的大变形本构方程及其相应的转换公式,并分析了本构张量的非对称特性及在不同的大变形有限元描述中的具体形式,可以在大变形固结有限元分析程序中得以实现。

在所建立的大变形固结有限元理论之基础上,书中简要介绍了作者编制的一个结构化的多用途大变形固结有限元分析程序(LSCFEA)。该程序包含 120 多个子程序,分属 16 个子功能块,形成了 3 组独立运行的程序单元,用以分析平面固结问题、平面变形空间渗流问题和空间固结问题。程序中可以引入线弹性、非线性弹性 Duncan-Chang 和弹塑性剑桥本构模型,并且可以考虑土的渗透系数随时间的变化。该程序在不计大变形之影响时,即为 Biot 固结有限元程序,在不考虑固结效应时,等同于一般固体力学大变形有限元程序。

书中分析了软土地基的大变形固结性状,讨论了地基的沉降、侧向位移及土中孔压在计入大变形影响时的性状,结合工程实例,与相应小变形的计算结

果和实测成果进行了对比,更明确地揭示了地基沉降和侧向位移的分布特性及孔压逐渐传递和消散的变化规律。

书中内容是作者攻读博士及博士后流动期间开展的部分研究工作之初步总结,也基本反映了前人这方面的研究成果。但限于作者水平,加之形势所迫,匆忙成书,其中内容不当之处恐所难免,热切期盼各位读者予以指正。

作者在本书脱稿付印之际,不由回首 20 年的求学旅程,深深感谢导师曾国熙教授、潘秋元教授、谢定义教授、顾安全教授给予的精心指导和热情关怀,也非常怀念求是园三年多的学习生活及所结识的学友精英,这是宝贵的精神财富,作者一生受用不尽。

本书的研究工作先后得到了浙江省自然科学基金和国家自然科学基金的支持,本书的出版得到了中国博士后科学基金的资助,在此衷心感谢。

谢永利

1998 年 10 月

目 录

第一章 绪论	1
1.1 固结理论的发展回顾	1
1.2 传统固结理论的主要内容	3
1.3 大变形固结理论的研究意义	12
第二章 张量概论	14
2.1 指标与求和约定	14
2.2 矢量与张量	18
2.3 张量代数	20
2.4 对称张量与反对称张量	22
2.5 张量的主值及不变量	23
2.6 张量场的微分	25
第三章 固体力学大变形问题引论	28
3.1 变形过程的物质描述、变形梯度	28
3.2 格林应变张量与阿尔曼西应变张量	30
3.3 变形过程的空间描述	32
3.4 大变形问题的应力度量、应力变化率	33
3.5 大变形问题的平衡方程与虚功方程	36
3.6 基于物质描述的大变形本构方程	39
第四章 大变形固结理论	43
4.1 体变度量	43
4.2 连续条件描述	45
4.3 空间描述的大变形固结控制方程	46
4.4 空间描述的大变形固结微分方程	47
4.5 物质描述的大变形固结控制方程	50
4.6 物质描述的控制方程之矩阵表述	52
第五章 大变形固结有限元法	59
5.1 引言	59
5.2 有限元离散与等参元插值	60
5.3 应变转换矩阵的推导	62

5.4	平衡方程的空间离散	64
5.5	连续方程的离散化	67
5.6	大变形增量问题的 U.L. 表述	70
第六章	大变形固结有限元程序技术	73
6.1	固结方程的线性化过程及自修正迭代算法	73
6.2	等参数单元与接触面单元	75
6.3	大变形本构矩阵的计算	81
6.4	固结矩阵与右端荷载项的计算	85
6.5	非线性问题的应力修正	91
6.6	大变形固结有限元程序结构	92
第七章	软土地基大变形固结性状	97
7.1	问题的描述	97
7.2	软土地基的沉降	100
7.3	软土地基的侧向变形	100
7.4	软土地基的孔压	106
7.5	堆体刚度的影响	106
7.6	工程实例分析	113
附录	大变形固结有限元分析部分模块源程序	120
A.1	主程序及主驱动程序	120
A.2	构形转换矩阵计算子程序	132
A.3	应变转换矩阵计算子程序	136
A.4	大变形本构矩阵计算子程序	138
A.5	非对称三角分解及回代子程序	143
A.6	几何非线性迭代子程序	146
参考文献		150

第一章 绪 论

1.1 固结理论的发展回顾

固结理论一直是土力学的重要课题之一。早在 1925 年, Terzaghi 就在其著作中提出了著名的有效应力原理, 并据此建立了一维固结理论, 成为土力学发展史上的一个重要里程碑。在 Terzaghi 一维固结理论中除了假定土是均质的和小变形外, 还做了如下假定: 土是完全饱和的; 土颗粒和土中水是不可压缩的; 土的压缩和孔隙水挤出只发生于一个方向; 土中水的流动服从 Darcy 定律; 固结过程中渗透系数和压缩系数都是常数; 以及土的孔隙比与有效应力的关系不随时间变化, 亦即线弹性假定等。

Terzaghi 固结理论的推出, 极大地促进了土力学理论的发展, 强有力地指导了土工构筑物的设计与施工。后来, Rendulic(1936) 将 Terzaghi 的一维固结理论推广到二维、三维情况, 得出 Terzaghi-Rendulic 扩散方程。对于简单的几何形状和边界条件, 可以求得扩散方程的解析解, 对于较复杂的边界条件和几何形状, 可以借助有限差分法求解。

Biot(1941) 根据有效应力原理、土的连续条件和平衡方程, 提出了 Biot 固结理论。Biot 固结理论与 Terzaghi-Rendulic 固结理论的主要区别在于: 前者考虑了固结过程中土体平均总应力随时间的变化, 而后者则假定在固结过程中土体平均总应力保持不变。其实, 在一般情况下, 尤其是三维问题, 固结过程中总应力保持不变的条件总是难以满足的, 因此计算结果可能会有较大误差, 特别是 Terzaghi-Rendulic 固结理论无法解释 Mandel-Cryer 效应。但是, 由于 Terzaghi-Rendulic 固结理论关于孔隙水压力变化与土骨架变形无关的假设使其求解和计算大为简化, 故在实际工程中仍然得到广泛应用。Biot 固结理论可以解释 Mandel-Cryer 效应, 显然比 Terzaghi-Rendulic 固结理论合理。然而, 由于数学上的困难, 即使采用级数和积分变换等手段也只能对少数简单的边值问题求出解析解或半解析解, 于是, Biot 固结理论一直被束之高阁, 使研究者却步。

近 20 多年来, 计算机的迅猛出现, 引发了一场技术革命, 也使土力学的研究呈现勃勃生机。数值方法和计算技术的发展, 尤其是有限元技术的应用使许多工程问题可以通过数值计算得到比较圆满的解决。用有限元法求解 Biot 固结方程, 首先是由 Sandhu 等人(1969) 提出的, Sandhu 等对位移取二次插值模式, 对孔隙水压力则取线性模式, 应用变分原理推出了 Biot 固结理论的有限单元方程, 终于使冷落了近 30 年的 Biot 固结理论重新引起人们的注意, 使其在实际工程中发挥作用。Christian 等人(1970) 应用虚功原理也推出了 Biot 固结理论的有限元方程, 拓展了研究思路和有限元的应用深度。国内这方面研究的发展也很快, 沈珠江(1977) 首先把 Biot 固结理论的有限单元法应用于固结分析, 其中对位移和孔隙水压力

都取线性模式,应用变分原理得到 Biot 固结理论的有限元方程,用以计算软土地基的变形。殷宗泽等(1978) 根据流量平衡概念,结合虚位移原理也得到了类似的方程,以分析饱和粘土的平面固结问题。龚晓南(1984) 采用等价结点流量等于等价结点压缩量的粘土饱和条件推导出 Biot 固结理论的连续方程,并与考虑 K 固结的非线性本构模型结合起来分析了油罐地基的沉降。谢康和(1987) 用 Biot 固结理论对砂井地基的平面变形空间渗流问题进行了有限元分析,揭示了砂井地基的沉降,侧移和孔压性状。近几年来,国内外根据 Biot 固结理论,应用有限元法求解地基固结问题得到愈来愈广泛的应用,产生了很好的社会和经济效益,有力地推动了土力学这一技术学科的发展。

有限元技术的应用也大大促进了土本构理论的研究和发展,这是因为在增量有限元法的固结分析中,可以引入比较复杂的本构模型,可以考虑土的材料非线性或弹塑性等因素的影响,以更好地反映工程实际情况。70 年代前后,关于土的本构模型的研究十分活跃。Roscoe 和他的学生们(1958 ~ 1963) 提出了土的临界状态的概念,并建立了著名的剑桥模型(Cam-Clay 模型),从理论上阐明了土体弹塑性的变形特征,开创了土体的实用模型,这标志着土力学一个新的研究阶段的开始。在这之后,出现了数以百计的本构模型,其中有些模型已在工程实践中得到了广泛的应用。这里值得一提的是 Duncan-Chang(1970) 非线性弹性模型,该模型概念清晰,能够反映土变形的主要特征——非线性。其模型参数的意义明确并能通过常规三轴试验获得,且对其参数变化的情况也积累了比较丰富的经验,因此,深得工程界的青睐。

随着工程建设的需要和对土的认识水准的提高,固结理论自身也在不断完善和发展。Terzaghi 一维固结理论中的假定被一个个地取消,不少学者提出了一些更加普遍的固结理论表达式,使固结方程能够考虑应力应变的非线性关系以及渗透系数随有效应力而不断变化的因素,甚至放弃小变形或小应变的假定,而考虑大变形或大应变的影响。

借助离心模拟试验对土的固结性状进行研究已有不少报道。Tan & Scott(1985) 在离心试验机上比较详尽地研究了土粒与液体系统的耦合作用,以及高离心力场中土粒在液体中的运动性状(液化现象),并力图将离心试验结果与原型的情况联系起来,引起了不少研究者的关注。Miyake 等(1988) 利用离心模拟试验研究了疏浚后冲填之海相粘土泥浆层在自重作用下的沉积固结过程,并用一维有限变形固结理论对离心试验所模拟的原型情况进行了对比分析。Croce 等(1988) 则利用离心试验研究了竖向排水砂井对软土地基固结性状的影响,以图验证常用的砂井地基固结理论,研究指出,目前常用的砂井地基固结计算公式过高地估计了砂井地基的固结速率。Mikasa 等(1988) 则通过离心试验分析了某近海机场之地基土层的动力固结问题。Terashi 等(1988) 针对超软粘土地基上通过设置加筋织物修筑路堤的工程实例,借助离心模型试验研究了路堤的变形和稳定性以及地基土的固结变形性状。Kitazume 等(1993) 则利用大型离心机对填海陆地的超软粘土地基采用袋装砂井处置的效

果进行了分析研究。在国内也开展了这方面的研究工作,冯光愈等(1988)和饶锡保等(1992)分别利用长江科学院的离心机对岱黄公路和宜黄公路之软土地基采用不同地基处理方案的可行性进行了对比分析,为工程设计提供依据。试验中的软土地基模型采用原状土层修切成型,并先行在离心机上进行预固结。易进栋等(1992)也通过离心试验分析了几种不同地基处理方案的可行性。此外,还有一些关于这方面的研究报道(Liu & Gao,1988; Balay et al,1988;Matichard et al,1988;俞仲泉等,1989;吴邦颖等,1991,Leung & Tan, 1993)。

1.2 传统固结理论的主要内容

1.2.1 太沙基固结理论

1. 基本假设

为便于分析和求解,做了如下假定。

- (1) 土是均质的、完全饱和的理想弹性材料;
- (2) 土体变形是微小的;
- (3) 土颗粒和孔隙水均不可压缩;
- (4) 孔隙水渗流服从达西定律,渗透系数为常数;
- (5) 荷载一次瞬时施加并维持不变,土体承受的总应力不随时间变化;
- (6) 土体中发生竖向压缩变形和竖向孔隙水渗流。

2. 建立方程式

由于假定土体完全饱和,土颗粒和孔隙水均不可压缩,故图 1.1 所示单元土体的体积压缩变化量 $\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} dz$ 应等于表面流量之差 $\frac{\partial q_z}{\partial z} dz$,亦即

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} = \frac{\partial q_z}{\partial z} \quad (1.2.1)$$

式中 ϵ_v 为体积应变, q_z 为单位面积流量。由达西定律,得

$$q_z = - \frac{K}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.2.2)$$

式中: K —— 渗透系数;
 γ_w —— 水的容重;
 u —— 孔隙水压力。

将式(1.2.2)代入式(1.2.1),有

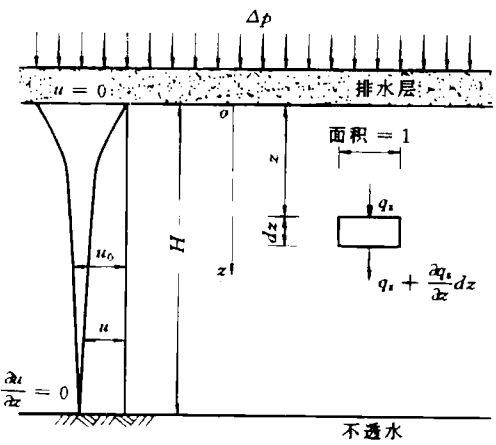


图 1.1 单向固结问题

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} = - \frac{K}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.2.3)$$

因总应力不随时间变化,故弹性土体单向压缩时,有

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial t} = - m_v \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.2.4)$$

式中: ϵ_z ——竖向正应变;

m_v ——体积压缩系数, $m_v = a/(1+e)$;

a ——压缩系数;

e ——孔隙比。

将式(1.2.4)代入式(1.2.3),便得太沙基单向固结基本微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.2.5)$$

式中 C_v 为固结系数, $C_v = K/m_v \gamma_w = (1+e)K/a\gamma_w$ 。

3. 方程式解

图 1.1 所示单向固结问题的初始条件和边界条件分别为

$$\left. \begin{aligned} u|_{t=0} &= u_0 \\ u|_{z=0} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=H} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.6)$$

式中: u_0 ——初始孔隙水应力;

H ——压缩层厚度。

这样,用分离变量法解式(1.2.5),便得解析解

$$u(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{H} \int_0^H u_0 \sin \frac{Mz}{H} dz \right) \sin \frac{Mz}{H} e^{-M^2 T_v} \quad (1.2.7)$$

式中: $M = \frac{(2m-1)\pi}{2}$; T_v ——时间因素, $T_v = C_v t/H^2$ 。

若压缩层内 u_0 为均匀分布,由式(1.2.7)得

$$u(z, t) = u_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{H} e^{-M^2 T_v} \quad (1.2.8)$$

整个压缩层 t 时刻平均孔隙水应力 $\bar{u}$ 、平均固结度 U 及总压缩量 S 分别为

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{H} \int_0^H u dz = u_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M^2} e^{-M^2 T_v} \quad (1.2.9)$$

$$U(t) = \frac{u_0 - \bar{u}(t)}{u_0} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M^2} e^{-M^2 T_v} \quad (1.2.10)$$

$$S(t) = m_v \int_0^H (u_0 - u) dz = m_v u_0 H \left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M^2} e^{-M^2 T_v} \right] \quad (1.2.11)$$

对于弹性土体,由式(1.2.10)和式(1.2.11)知,反映孔隙水压力消散程度的固结度 U

应等于变形比,即

$$U(t) = \frac{u_0 - \bar{u}(t)}{u_0} = \frac{S(t)}{S(\infty)} \quad (1.2.12)$$

式中 $S(\infty)$ 为最终压缩量, $S(\infty) = m_v u_0 H$.

1.2.2 多维固结方程

用类似于—维固结问题中的推导方法,可导出多维固结的基本微分方程。二向和三向渗流时,类似式(1.2.1),分别有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} &= \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} &= \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

将达西定律[参见式(1.2.2)]代入后分别有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} &= -\frac{1}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} &= -\frac{1}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

式中, K_x, K_y, K_z 分别为 x, y, z 方向渗透系数。

伦杜立克设只在竖向发生压缩变形,这样,联合式(1.2.13)、式(1.2.14)和式(1.2.4) 便得二维和三维固结的太沙基—伦杜立克基本方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{m_v \gamma_w} \left(K_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.2.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{m_v \gamma_w} \left(K_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.2.16)$$

实际上,多维固结问题中,不仅渗流是多向的,变形也往往是多向的。对于二维平面应变和三维固结,式(1.2.4)应分别改成

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} = \frac{\partial(\epsilon_x + \epsilon_z)}{\partial t} = -\frac{2(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.2.17)$$

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} = \frac{\partial(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)}{\partial t} = -\frac{3(1-2\nu)}{E} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.2.18)$$

式中: ν ——泊松比;

E ——弹性模量, $E = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)m_v}$

将式(1.2.17)代入式(1.2.13)、式(1.2.18)代入式(1.2.14),分别得二维平面应变固结和三维固结基本微分方程的合理形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2(1-\nu)\gamma_w m_v} \left(K_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.2.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(1+\nu)}{3(1-\nu)\gamma_w m_v} (K_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) \quad (1.2.20)$$

式(1.2.15)与式(1.2.19)、式(1.2.16)与式(1.2.20)具有相同的形式。即无论单向还是多向变形,二维固结基本微分方程均可写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_{vx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{vz} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.2.21)$$

三维固结基本微分方程均可写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_{vx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{vy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{vz} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.2.22)$$

然而,单向压缩时固结系数与多向压缩时固结系数不同。如,三向压缩时固结系数与单向压缩时固结系数比为 $(1+\nu)/3(1-\nu)$,固结计算中 ν 、 E 和 m_v 均为有效应力指标, $0 < \nu < 0.5$,故这一比值总小于1。这表明:多向压缩固结分析中,采用单向压缩固结系数是不恰当的,将导致计算固结速率快于实测值。

1.2.3 轴对称固结理论

1948年,巴隆(Barron)在太沙基单向固结理论基础上,建立了轴对称固结基本微分方程并导出其解析解,它在砂井地基设计中得到广泛应用。

1. 涂抹区的特性

砂井打设过程中,井周粘土薄层被扰动,渗透性减小,从而形成所谓的“涂抹区”,如图1-2所示。涂抹区的存在,延滞了径向渗流和固结过程。涂抹区厚度很薄,且紧靠砂井,其固结变形很快就可完成。因此,巴隆不考虑涂抹区固结变形,将涂抹区扰动土视为不可压缩材料。

涂抹区孔隙压力 u_s 应满足

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_s}{\partial r} = 0$$

积分后得

$$r \frac{\partial u_s}{\partial r} = \frac{u_s|_{r=r_s} - u_w}{\ln s} \quad (1.2.23)$$

式中: r_s ——涂抹区半径;

s ——涂抹区半径 r_s 与砂井半径 r_w 之比, $s = r_s/r_w$;

u_w ——砂井内孔隙压力。

不计砂井阻力影响时, $u_w = 0$,式(1.2.23)简化为

$$r \frac{\partial u_s}{\partial r} = \frac{u_s|_{r=r_s}}{\ln s} \quad (1.2.24)$$

2. 自由应变固结解

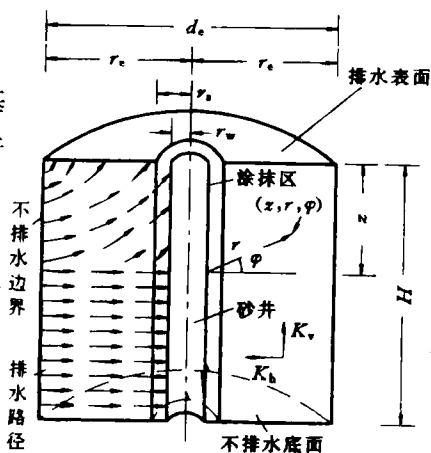


图 1.2 轴对称固结问题

为便于求解,巴隆仅考虑径向渗流和竖向压缩,且将砂井地基变形分成自由应变和等垂直应变两种理想情况。所谓自由应变,系指地基内各点变形完全自由,地面均布荷载不因地面出现差异沉降而重新分布。

推导过程类似式(1.2.5),自由应变情况下的轴对称固结基本方程为

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = C_{vr} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \quad (1.2.25)$$

式中: u_r ——原状粘土区($r_s \leq r \leq r_e$)中孔隙压力;

C_{vr} ——原状粘土区中径向固结系数, $C_{vr} = K_r / \gamma_w m_v$;

r_e ——单井有效排水区半径;

K_r ——原状粘土区中径向渗透系数。

单井有效排水区的边界 $r = r_e$ 上, $\frac{\partial u_r}{\partial r} = 0$, 又设初始孔隙压力 u_0 均匀分布, 用分离变量法解零阶贝塞尔方程式(1.2.25), 得

$$u_r(r, t) = u_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-\frac{2}{a_i s} V_1(a_i s) V_0(a_i \frac{r}{r_w})}{\frac{n^2}{s^2} V_0^2(a_i n) - V_0^2(a_i s) - V_1^2(a_i s)} e^{-a_i^2 \frac{C_{vr} t}{r_w^2}} \quad (1.2.26)$$

其中

$$V_1(as) = J_1(as) - \frac{J_1(an)}{N_1(an)} N_1(as)$$

$$V_0(a \frac{r}{r_w}) = J_0(a \frac{r}{r_w}) - \frac{J_1(an)}{N_1(an)} N_0(a \frac{r}{r_w})$$

式中: n ——井径比, $n = r_e / r_w$;

J_0 ——零阶贝塞尔函数;

J_1 ——一阶贝塞尔函数;

N_0 ——零阶诺埃曼函数;

N_1 ——一阶诺埃曼函数;

a ——特征值。

在 $r = r_s$ 处, $u_r = u_s$, $K_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = K_s \frac{\partial u_s}{\partial r}$. 不计砂井阻力影响, 由式(1.2.24) 得

$$r_s \frac{\partial u_s}{\partial r} \Big|_{r=r_s} = \frac{K_s}{K_r} \frac{u_r|_{r=r_s}}{\ln s}$$

将式(1.2.26) 代入上式, 得求解 a 的特征值方程为

$$asK_r(\ln s)V_1(as) + K_s V_0(as) = 0$$

若不计涂抹作用, $s = 1$, 上式简化为 $V_0(a) = 0$.

从 r_s 到 r_e 之间可压缩原状土中的平均孔隙压力 $\bar{u}_r$ 为

$$\bar{u}_r(t) = u_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4V_1^2(a_i s)}{a_i^2(n^2 - s^2) [\frac{n^2}{s^2} V_0^2(a_i n) - V_0^2(a_i s) - V_1^2(a_i s)]} e^{-a_i^2 \frac{C_{vr} t}{r_w^2}} \quad (1.2.27)$$

3. 等应变固结解

所谓等应变,是指地面不出现差异沉降,这样地面荷载就可能不是均匀分布了。考虑井阻影响, $\bar{u}_r$ 和 u_w 均为待求未知函数,等应变条件下固结基本微分方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} &= \frac{2C_{vr}}{r_c^2 \mu} (u_w - \bar{u}_r) \\ \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} &= \beta^2 (u_w - \bar{u}_r) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.28)$$

其中

$$\mu = \frac{n^2}{n^2 - s^2} \ln \frac{n}{s} - \frac{3n^2 - s^2}{4n^2} + \frac{K_r}{K_s} \frac{n^2 - s^2}{n^2} \ln s$$

$$\beta^2 = \frac{2(n^2 - s^2)K_r}{\mu r_c^2 K_w}$$

式中: K_w ——砂井内渗透系数。

初始条件和边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_r|_{t=0} &= u_0 \\ \bar{u}_r|_{z=0} &= 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z}|_{z=H} = 0 \\ u_w|_{z=0} &= 0, \quad \frac{\partial u_w}{\partial z}|_{z=H} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.29)$$

巴隆在求解时,令

$$\bar{u}_r = u_0 e^{-\frac{2C_{vr}f(z)}{r_c^2 \mu} t} \quad (1.2.30)$$

式中 $f(z)$ 为待定坐标 z 的函数。

将式(1.2.30)代入式(1.2.28)的第一式,得

$$u_w = u_0 [1 - f(z)] e^{-\frac{2C_{vr}f(z)}{r_c^2 \mu} t} \quad (1.2.31)$$

当 $t = 0$ 时,由以上两式分别有 $\bar{u}_r = u_0, u_w = u_0 [1 - f(z)]$,代入式(1.2.28)的第二式得

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = \beta^2 f(z) \quad (1.2.32)$$

其边界条件为 $f(z)|_{z=0} = 1, \frac{df(z)}{dz}|_{z=H} = 0$ 。求解后得

$$f(z) = \frac{e^{\beta(H-z)} + e^{-\beta(H-z)}}{e^{\beta H} + e^{-\beta H}}$$

巴隆考虑井阻等应变的固结解式(1.2.30)不满足基本方程组(1.2.28),故只是近似解,其原因是假设的解式(1.2.30)并非式(1.2.28)的解,且利用 $t = 0$ 时才导出的式(1.2.32)来求解 $f(z)$ 也是不恰当的。

用分离变量法解基本方程(1.2.28),得精确解

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_r &= u_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{H} e^{-\kappa_m t} \\ u_w &= u_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M} \frac{(n^2 - s^2)G}{(n^2 - s^2)G + M^2 n^2 \mu} \sin \frac{Mz}{H} e^{-\kappa_m t} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.33)$$

式中: G ——井阻因子, $G = \frac{2K_r H^2}{K_w r_w^2}$;

$$K_m = \frac{M^2 n^2 \mu}{M^2 n^2 \mu + (n^2 - s^2)G} \frac{2C_{vr}}{r_e^2 \mu};$$

$$M = \frac{(2m-1)\pi}{2}$$

不计井阻影响时, $K_w = \infty$, $G = 0$, $u_w = 0$, $K_m = \frac{2C_{vr}}{r_e^2 \mu}$, 式(1.2.33)与式(1.2.30)相同。

砂井地基地面平均沉降为

$$S(t) = m_v u_0 H \left(1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M^2} e^{-K_m t} \right) \quad (1.2.34)$$

计算表明,自由应变固结解和等应变固结解计算的结果差别不大,但前者的计算工作量远大于后者,故实际工程只需采用等应变固结解。涂抹作用可用折减井径法考虑。巴降假定只产生竖向压缩变形是值得讨论的,砂井地基原状土实际上还发生径向位移,应取 $C_{vr} =$

$\frac{(1+\nu)K_r}{3(1-\nu)\gamma_w m_v}$, 这样可使计算固结速率更接近实测值。

1.2.4 比奥固结理论

太沙基固结理论只在一维情况下是精确的,对二维、三维问题并不精确。比奥(Biot)从较严格的固结机理出发推导了准确反映孔隙压力消散与土骨架变形相互关系的三维固结方程,一般称为“真三维固结理论”。

1. 固结方程

在土体中取一微分体,若体积力只考虑重力, z 坐标向上为正,应力以压为正,则三维平衡微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= -\gamma \end{aligned} \right\}$$

式中, γ 为土的容重,应力为总应力。根据有效应力原理,总应力为有效应力与孔隙压力 u 之和,且孔隙水不承受剪应力,上式可写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} &= -\gamma \end{aligned} \right\} \quad (1.2.35)$$