毛纲源考研数学辅导系列

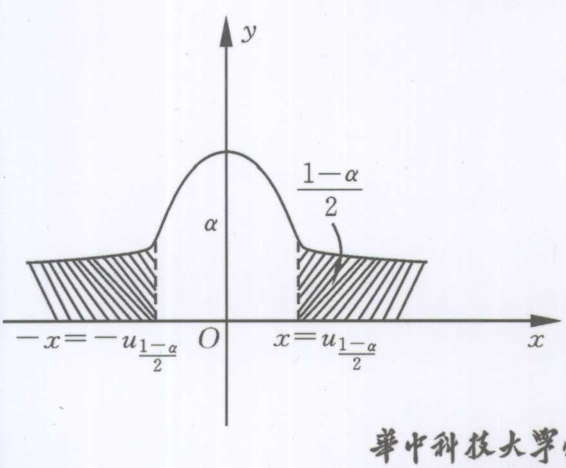
本书在手 考研无忧

考研数学（三）

客观题简化求解技巧分类归纳

（线性代数、概率论与数理统计）

毛纲源 编著



◇经典题型 紧扣大纲
帮你高效复习
◇方法新颖 技巧独特
助君考研成功

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

毛纲源考研数学辅导系列

考研数学(三)
客观题简化求解技巧分类归纳
(线性代数、概率论与数理统计)

毛纲源　编著

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

考研数学(三)客观题简化求解技巧分类归纳(线性代数、概率论与数理统计)/毛纲源　编著. —武汉:华中科技大学出版社,2008年11月
ISBN 978-7-5609-4948-2

Ⅰ.考…　Ⅱ.毛…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-解题　②线性代数-研究生-入学考试-解题　③概率论-研究生-入学考试-解题　④数理统计-研究生-入学考试-解题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第170214号

考研数学(三)客观题简化求解技巧分类归纳
(线性代数、概率论与数理统计)
毛纲源　编著

责任编辑:王汉江　　封面设计:潘　群
责任校对:张　琳　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　　邮编:430074　　电话:(027)87557437

录　排:武汉金翰林工作室
印　刷:武汉中远印务有限公司

开本:710mm×1000mm　1/16　　印张:14.5　　字数:284 000
版次:2008年11月第1版　　印次:2008年11月第1次印刷　　定价:29.80元
ISBN 978-7-5609-4948-2/O·473

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

前　言

考研数学试题中的客观题(填空题和选择题)是考研数学试题的重要组成部分.它侧重考查考生对数学概念、数学定理(命题)的理解和掌握程度,并测试考生能否通过这些基本数学概念、数学定理(命题)进行简单推理.由于客观题的试题数量在试卷中所占比例较大(接近试题总题量的三分之二),且其总分超过整个试卷总分的三分之一,如何快速准确地做好客观题,是考生为取得好成绩渴望得到解决的问题,这也是本书出版的目的.

本书分为考研数学(三)中的微积分部分,按照考纲的知识块进行分类,分为若干个章节.每一章节(考纲知识块)又分为若干个小节(考点),结合历年来经济类考研数学的客观题及各个名校的有关试题对所考核的知识点(考点)的简化求解方法与技巧进行分类归纳与总结.为使这些简化求解方法与技巧和常规套路的求解方法进行比较,不少例题给出多种求解方法,其中“解一”一般为简化求解方法,为使考生掌握和应用这些简化求解方法.作者根据不同的知识点(考点)将其求解方法归纳整理成相应命题,便于考生应用,其中不少命题是作者教学经验的总结.这些命题可在理解的基础上当作重要结论来记忆和应用.这些命题的证明,不少渗透在相关题的解法上(常为“解二”).它们是必须掌握的核心知识点.

这些分类简化求解方法与技巧不仅有助于快速准确地求解客观题,而且对证明题及计算题也能发挥重要作用.

为了把每个知识块复习好.本书以知识点(考点)为线索将同一知识点(考点)的填空题、选择题结合在一起进行讲解.这样做的目的是使读者熟练掌握有关客观题简化求解方法与技巧,从而帮助考生快速、准确地求解客观题.读者使用本书时,最好能自己先想再做,不要急于看解答,然后与书中求解方法比较.“注意”中的一些题外话也值得读者细心揣摩.

真诚希望本书能陪伴读者度过难忘的备考学习时光,能够迅速提高应试能力,取得优异的考研成绩,圆考研成功梦,圆考研考入名校梦.这是作者最大的心愿.

本书也可供大专院校在校学生学习微积分、线性代数、概率论与数理统计时,阶段复习和期末复习使用.

编写本书时参阅了有关书籍,引用了一些例子,在此特向有关作者致谢.

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,书中难免有错误和疏漏之处,恳请读者指正.

编　者

2008 年 10 月

题型说明

——客观题常用的解题方法与技巧

硕士研究生入学统一考试数学试题的题型有填空题、选择题和解答题(包括计算、应用和证明题)三种,其中填空题和选择题由于答案唯一,评分不受主观因素影响能较客观地反映考生水平,常称为客观题.

硕士研究生入学考试数学试题中的客观题(填空题、选择题)在研究生入学考试中占60分左右,约占总分的40%.从目前情况看,考生在客观题部分得分率较低,正是这部分得分率较低,总分就很难上去.其原因主要是两方面:一方面是考生做计算题时准确率低,基本概念和基本理论没有吃透,或计算能力较差;另一方面是考生对求解客观题的方法与技巧掌握得不熟练,不能运用自如.

填空题绝大部分是计算题,但这里的计算题不像一般的计算题,它只看结果不看过程.因而做填空题必须非常小心,因为一旦答案出错就是零分.若计算的准确率不高,填空题容易失分.填空题也有不少是概念题,主要考查考生对一些最基本的概念、性质、公式掌握和运用的熟练程度及快捷、准确的运算能力以及正确的判断能力和推理能力.为此,做填空题时要根据题目的特点充分利用多种方法和技巧简化计算,首先要充分利用本书所归纳总结出的有关命题的结论迅速、准确地写出答案.如果没有可直接利用的结论,那只好从题设条件出发通过分析、推理和计算推导出有关结果.

单项选择题(即四个选项中有且仅有一个选项是正确的,以下简称选择题)是研究生入学考试数学试卷的重要组成部分.选择题大部分考查基本概念和基本理论.如果基本概念和基本理论没有吃透,选择题部分也很容易失分.另一方面同一道题出成客观题后往往有更巧妙、更简单的方法求解.当然客观题用我们平时求解主观题的方法虽然也能求解,但在解题时间上有时相差几倍甚至几十倍.因此要提高客观题部分的得分率,一要提高做计算题的准确率,吃透基本概念和基本理论;二要掌握简化求解客观题的方法和技巧.

如何快速、准确地做好选择题为后面的计算、论证和求解应用题留下较充裕的时间,这是考生能否取得高分的关键.为此,首先要理解和熟悉本书各章节所介绍的命题的结论,然后充分利用这些结论判断四个选项中哪一个成立?如果没有现成的结论可用,则可采用下述各法确定选项.

法一 直选法.

即利用命题、定理、定义等直接判断或验证某选项正确,则其余选项必不正确(不必验证).

法二 排错法.

即验证其中三个选项不正确,则剩下的一个选项必正确(也不必验证).常用赋值法找出错误选项.这里的赋值法是指利用满足题设条件的"特殊值"通过推理或验证找出错误选项.

对于题干中"有……必有……";或"当……时,必有……";或"对任意……必有……"或题干中所给函数为抽象函数常用赋值法找出反例,找出错误选项,确定正确选项.

例1 设函数 $f(x)$ 处处可导,则(　　).

(A) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

解 上例具有赋值法的明显特征"当……时,必有……"可采用反例排除.取 $f(x)=x$ 时,则 $f'(x)=1$.而

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty,\quad 但\quad \lim_{x\to-\infty} f'(x)=\lim_{x\to-\infty} 1=1,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty,\quad 但\quad \lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty} 1=1,$$
可见(A)、(C)不正确. 再取 $f(x)=x^2$,则 $f'(x)=2x$. 则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3x=-\infty$,但 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$. 可见(B)也不正确. 仅(D)入选.

法三 推演法.

它是指从题设条件出发运用有关概念、定理或命题经推理演算得出正确选项.

对于与基本概念或其性质有关的选择题,或题中的备选项为"数值"形式的项,或题干条件给出的是某种运算形式的项时,常用推演法确定正确选项.

例 2 设 $\lambda=2$ 是非奇异矩阵的一个特征值,则矩阵$(\boldsymbol{A}^2/3)^{-1}$有一个特征值等于(　　).

(A) 4/3　　(B) 3/4　　(C) 1/2　　(D) 1/4

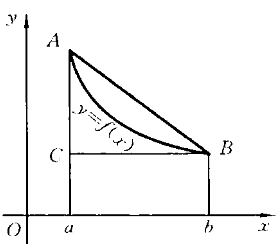
解 备选项为"数值"形式的项,适合用推演法求解. 由于 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 为非零特征值,λ^2 为 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值,$1/\lambda^2$ 为$(\boldsymbol{A}^2)^{-1}$的特征值,故$(\boldsymbol{A}^2/3)^{-1}=3(\boldsymbol{A}^2)^{-1}$的一个特征值为 $3\times(1/4)=3/4$. 仅(B)入选.

法四 图示法.

它是指根据题设条件作出有关问题的几何图形,然后借助几何图形的直观性得到正确选项或将四个选项的关系画出图形,看哪一种关系符合题设条件,从而确定正确选项.

对于有明显几何意义的题设条件如对称性、奇偶性、周期性、单调性、凹凸性、渐近性等或题设给出图形面积、立体体积;或在概率论中给出两事件的关系或概率关系等均可试用图示法求解.

例 3 设在区间$[a,b]$上 $f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)>0$. 记 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,S_2=f(b)(b-a)$,$S_3=[(b-a)/2][f(a)+f(b)]$,则(　　).



(A) $S_1<S_2<S_3$　　(B) $S_2<S_1<S_3$

(C) $S_3<S_1<S_2$　　(D) $S_2<S_3<S_1$

解 由 $f'(x)<0,f''(x)>0$ 知 $f(x)$的图形在$[a,b]$上单调减少凹向,作出其图形如左图所示. 连接弦 AB,过点 B 作平行于 x 轴的直线与过点 A 的垂线交于 C. 显然,梯形 $ABba$ 的面积为 S_3,矩形 $CBba$ 的面积为 S_2,曲边梯形 $ABba$ 的面积为 S_1,则
$$S_2<S_1<S_3.$$ 仅(B)入选.

法五 代入法.

将备选项逐一代入题设条件,验证哪个选项正确.

该法适用于备选项为具体"数值"形式的项,且题干中又含有验证条件,且验证又比较简单.

例 4 若 $f(x)$的导函数是 $\sin x$,则 $f(x)$有一个原函数是(　　).

(A) $1+\sin x$　　(B) $1-\sin x$　　(C) $1+\cos x$　　(D) $1-\cos x$

解 备选项为具体函数且含有合适的验证条件. 适合用代入法确定正确选项. 下面只需验证哪个函数的二阶导数为 $\sin x$. 因$(1+\sin x)''=-\sin x$. 仅(B)入选.

当然在解选择题时,如果能用计算确定正确选项就不需一一验证或举反例排除其他选项. 一般需用计算才能确定正确选项的选择题,其计算量都不大、不难. 当然如果能用上述各法较简便地确定正确选项也无须通过计算去验证正确选项.

目　　录

第1部分　线性代数

1.1　行列式 …………………………………………………………… (1)

1.1.1　计算数字型行列式 …………………………………………… (1)

1.1.2　计算代数余子式之和的值 …………………………………… (7)

1.1.3　计算矩阵行列式的值……………………………………… (10)

习题 1.1 ……………………………………………………………… (13)

1.2　矩阵…………………………………………………………… (15)

1.2.1　矩阵的基本运算(不含求逆运算)………………………… (15)

1.2.2　可逆矩阵…………………………………………………… (21)

1.2.3　求解与伴随矩阵有关的问题……………………………… (24)

1.2.4　矩阵的秩…………………………………………………… (29)

1.2.5　求解矩阵方程……………………………………………… (33)

1.2.6　求解与初等变换有关的问题……………………………… (37)

习题 1.2 ……………………………………………………………… (40)

1.3　向量…………………………………………………………… (45)

1.3.1　求解与线性表示有关的问题……………………………… (45)

1.3.2　讨论向量组的线性相关性………………………………… (50)

1.3.3　求向量组的秩与极大线性无关组………………………… (53)

1.3.4　讨论两向量组等价………………………………………… (56)

1.3.5　确定向量分量中的待定常数……………………………… (58)

习题 1.3 ……………………………………………………………… (60)

1.4　线性方程组…………………………………………………… (63)

1.4.1　判定线性方程组解的情况………………………………… (63)

1.4.2　基础解系的判定及基础解系和特解的简便求法………… (68)

1.4.3　求线性方程组的通解……………………………………… (71)

1.4.4　由其解反求方程组或其参数……………………………… (75)

1.4.5　求两线性方程组的公共解………………………………… (79)

1.4.6　求解与两线性方程组同解的有关问题…………………… (81)

1.4.7　矩阵方程 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 与齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ 的关系 ……… (84)
习题 1.4 …………………………………………………………………… (86)
1.5　特征值和特征向量 ………………………………………………… (89)
1.5.1　特征值和特征向量的求法 ………………………………………… (89)
1.5.2　特征值、特征向量的简便求法 …………………………………… (92)
1.5.3　相似矩阵 …………………………………………………………… (95)
1.5.4　实对称矩阵的特征值、特征向量性质的应用 ………………… (101)
习题 1.5 …………………………………………………………………… (104)
1.6　二次型 ……………………………………………………………… (107)
1.6.1　求二次型的矩阵及其秩 ………………………………………… (107)
1.6.2　求二次型的标准形、规范形 ……………………………………… (108)
1.6.3　正定二次型和正定矩阵 ………………………………………… (111)
1.6.4　讨论两矩阵合同 ………………………………………………… (115)
习题 1.6 …………………………………………………………………… (118)

第 2 部分　概率论与数理统计

2.1　随机事件和概率 ……………………………………………… (120)
2.1.1　随机事件及其运算 ……………………………………………… (120)
2.1.2　计算事件的概率 ………………………………………………… (122)
2.1.3　计算古典概率与几何概率 ……………………………………… (127)
2.1.4　使用全概率公式和贝叶斯公式计算事件的概率 ……………… (129)
2.1.5　讨论事件的独立性 ……………………………………………… (130)
2.1.6　计算伯努利概型中事件的概率 ………………………………… (132)
习题 2.1 …………………………………………………………………… (133)
2.2　随机变量及其分布 …………………………………………… (135)
2.2.1　随机变量的概率分布及其分布函数 …………………………… (135)
2.2.2　利用概率分布的性质求其待定常数 …………………………… (139)
2.2.3　利用常见分布计算相关事件的概率 …………………………… (140)
2.2.4　求随机变量函数的分布 ………………………………………… (144)
习题 2.2 …………………………………………………………………… (147)
2.3　多维随机变量及其分布 ……………………………………… (150)
2.3.1　求二维离散型随机变量的分布 ………………………………… (150)
2.3.2　求二维连续型随机变量的分布 ………………………………… (153)
2.3.3　求两个随机变量的函数的分布 ………………………………… (157)

2.3.4 利用二维均匀分布和二维正态分布求解有关问题 …………… (161)
2.3.5 计算二维随机变量取值的概率 …………… (163)
2.3.6 随机变量的独立性 …………… (166)
2.3.7 确定二维随机变量分布中的待定常数 …………… (168)
习题 2.3 …………… (169)
2.4 随机变量的数字特征 …………… (172)
2.4.1 求随机变量的数学期望和方差 …………… (172)
2.4.2 求一维随机变量函数的数学期望和方差 …………… (176)
2.4.3 求二维随机变量函数的数学期望和方差 …………… (179)
2.4.4 求协方差和相关系数 …………… (182)
2.4.5 讨论随机变量不相关性、独立性 …………… (188)
2.4.6 已知数字特征求随机变量函数或其分布中的待定常数 …………… (190)
习题 2.4 …………… (191)
2.5 大数定律和中心极限定理 …………… (194)
2.5.1 用切比雪夫不等式估计随机变量取值的概率 …………… (194)
2.5.2 大数定律 …………… (195)
2.5.3 中心极限定理 …………… (197)
习题 2.5 …………… (199)
2.6 样本及抽样分布 …………… (201)
2.6.1 求解与样本均值、样本方差有关的问题 …………… (201)
2.6.2 求抽样分布 …………… (205)
习题 2.6 …………… (208)
2.7 总体参数的点估计 …………… (210)
2.7.1 求总体未知参数的矩估计 …………… (210)
2.7.2 最(极)大似然估计量的求法 …………… (212)
习题 2.7 …………… (214)
习题答案或提示 …………… (216)

第 1 部分 线性代数

1.1 行列式

1.1.1 计算数字型行列式

法一 利用行列式性质计算行列式.

常用到下述运算符号：$r_i + kr_j$ 它表示将行列式（或矩阵）第 j 行的 k 倍加到第 i 行，$c_i + kc_j$ 表示行列式（或矩阵）的第 j 列的 k 倍加到第 i 列.

法二 降阶法. 利用行列式按一行（列）展开的定理将行列式化为低阶行列式计算.

法三 利用下列计算行列式的常用公式计算.

命题 1.1.1.1 (1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) $$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n}a_{2,n-1}\cdots a_{n,1}.$$

(3) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n + (-1)^{n-1}b_1b_2\cdots b_n.$$

(4) $$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \\ b_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n + (-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n.$$

$$
(5)\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.
$$

1.1.1.1 计算行(列)和相等的行列式

将各列(行)加到第1列(行),再化为三角行列式计算,这是计算这类行列式最简单的方法.

例 1 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$ ________.

解 该行列式仅各行的行和相等,将各列都加到第1列,提取公因式,得

$$
原式 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[\substack{c_3+(-1)c_1 \\ c_4+c_1}]{c_2+c_1} x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

$= x(-1)^{4(4-1)/2}x^3 = x^4$(利用命题 1.1.1.1(2)).

例 2 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$,则 $|\boldsymbol{A}| =$ ________.

解一 因各行的行和相等,将各列都加到第1列,提取公因式,得到

$$
|\boldsymbol{A}| = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i+(-1)c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}
$$

$= (-1)^{n-1}(n-1)$.

解二 $|\boldsymbol{A}|$ 的各列的列和也相等,也可将各行都加到第1行计算(略).

1.1.1.2 计算形如 $|\ddots|$ 或 $|\ \ |$ 的行列式

可直接分别利用命题 1.1.1.1(3) 或 1.1.1.1(4) 计算.

例 3 设 $\boldsymbol{A}$ 为 10×10 矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 10 阶单位矩阵，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&1\\10^{10}&0&\cdots&0&0\end{bmatrix},\text{则 } |\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\underline{\qquad\qquad}.$$

解 $$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0&\cdots&0&0\\0&-\lambda&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&&-\lambda&1\\10^{10}&0&0&\cdots&0&-\lambda\end{vmatrix},$$ 由命题 1.1.1.1(3) 即得

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=(-\lambda)(-\lambda)\cdots(-\lambda)+(-1)^{n+1}10^{10}\times1\times1\times\cdots\times1=\lambda^{10}-10^{10}.$$

例 4 n 阶行列式 $$D_n=\begin{vmatrix}a_1&0&0&\cdots&0&b_n\\b_1&a_2&0&\cdots&0&0\\0&b_2&a_3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}&0\\0&0&0&\cdots&b_{n-1}&a_n\end{vmatrix}=(\quad).$$

(A) $a_1a_2\cdots a_n+b_1b_2\cdots b_n$　　(B) $(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n+b_1b_2\cdots b_n$

(C) $a_1a_1\cdots a_n+(-1)^{n-1}b_1b_2\cdots b_n$　　(D) $a_1a_2\cdots a_n-b_1b_2\cdots b_n$

解一 仅(C)入选. 由命题 1.1.1.1(4) 即得

$$D_n=a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n=a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n-1}b_1b_2\cdots b_n.$$

解二 仅(C)入选. 按第 1 行展开得到

$$D_n=a_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_2&0&0&\cdots&0&0\\b_2&a_3&0&\cdots&0&0\\0&b_3&a_4&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}&0\\0&0&0&\cdots&b_{n-1}&a_n\end{vmatrix}+b_n(-1)^{1+n}\begin{vmatrix}b_1&a_2&0&\cdots&0\\0&b_2&a_3&\cdots&0\\0&0&b_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}\\0&0&0&\cdots&b_{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n+1}b_1b_n\begin{vmatrix}b_2&a_3&0&\cdots&0\\0&b_3&a_4&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}\\0&0&0&\cdots&b_{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2a_3\cdots a_n+(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_{n-1}b_n.$$

1.1.1.3 计算范德蒙行列式

以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为行元素的 n 阶范德蒙行列式的算式为

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j),\qquad(1.1.1.1)$$

其结构特点是每列元素 $1,x_i,x_i^2,\cdots,x_i^{n-1}$ 按 x_i 的升幂(升幂次数从上到下由 0 连续递增至 $n-1$,因而其第 1 行元素全为 1) 排列($i=1,2,\cdots,n$),其值等于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 这 n 个元素中列下标大的元素减去列下标小的所有可能的差 x_i-x_j 的连乘积,其中 $n\geqslant i>j\geqslant 1$.

因 $|D_n|=|D_n^{\mathrm{T}}|$,如果一个行列式的第 i 行($i=1,2,\cdots,n$) 的元素具有上述结构特征,也是范德蒙行列式,其值也可按式(1.1.1.1) 计算.

行列式中每行(或每列) 或其分行(分列) 元素的幂次递增时,应将其化成范德蒙行列式.

计算范德蒙行列式的考题常在解线性方程组及求矩阵的特征值等问题中出现.

例 5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{bmatrix}$,则 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=$ ______.

解 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2=(b-a)^2(c-a)^2(c-b)^2$.

例 6 行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\\9&8&7&6\end{vmatrix}=(\quad)$.

(A)120 (B) -120 (C)100 (D) -100

解 $D\xlongequal{r_4+r_1}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\\10&10&10&10\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\\1&1&1&1\end{vmatrix}=(-1)^3 10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}$

$=-10(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)=-120$. 仅(B) 入选.

注意 范德蒙行列式的第 1 行(列) 元素必须是 1,设法将其第 1 行(列) 元素全化成 1.

1.1.1.4 计算三对角线型行列式 $|\ddots|$

该行列式的结构特征是其主对角线及其两旁有非零元素,其余元素全为零. 常用递推归纳法计算,为此常先将下述行列式按第 1 行或第 1 列展开得到 $D_n=a_1D_{n-1}-c_1b_1D_{n-2}$,再递推归纳求出 D_n. 也可将 D_n 化为三角行列式计算,或用数学归纳法求出(证明) 其结果.

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1&b_1&&&&\\c_1&a_2&b_2&&&\\&c_2&a_3&b_3&&\\&&c_3&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&a_{n-1}&b_{n-1}\\&&&&c_{n-1}&a_n\end{vmatrix}=a_1D_{n-1}-c_1b_1D_{n-2}.\qquad(1.1.1.2)$$

例 7 五阶行列式 $D_5=\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}=$ ______.

解 将 D_5 按第 1 行展开得到 $D_5=(1-a)D_4-(-1)aD_3$，其中 D_3,D_4 分别是与 D_5 结构相同的三、四阶行列式. 由此得到递推公式 $D_n=(1-a)D_{n-1}+aD_{n-2}$，$3\leqslant n\leqslant 5$. 于是，逐项递推得到

$$\begin{aligned}D_5&=(1-a)D_4+aD_3=(1-a)[(1-a)D_3+aD_2]+aD_3\\&=[(1-a)^2+a]D_3+a(1-a)D_2\\&=[(1-a)^2+a][(1-a)D_2+a(1-a)+a(1-a)]\\&=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5.\end{aligned}$$

例 8 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1\\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}=(\quad)$.

(A) $|\boldsymbol{A}|=na^n$　　(B) $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$

(C) $|\boldsymbol{A}|=na^{n+1}$　　(D) $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^{n+1}$

解一 利用数学归纳法求之. 当 $n=1$ 时，$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|_1=|2a|=2a$，结论成立；当 $n=2$ 时，$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|_2=\begin{vmatrix}2a & 1\\ a^2 & 2a\end{vmatrix}=3a^2$，结论也成立.

假设结论对 $n-2$，$n-1$ 阶行列式成立，即 $|\boldsymbol{A}|_{n-2}=(n-1)a^{n-2}$，$|\boldsymbol{A}|_{n-1}=na^{n-1}$. 将 $|\boldsymbol{A}|_n$ 按第 1 行展开，由式(2.1.1.2)得到

$$|\boldsymbol{A}|_n=2a|\boldsymbol{A}|_{n-1}-a^2|\boldsymbol{A}|_{n-2}=2a\cdot na^{n-1}-a^2(n-1)a^{n-2}=(n+1)a^n,$$

则结论对 n 阶行列式也成立. 由数学归纳法原理知，对任何正整数 n，有

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|_n=(n+1)a^n.$$

解二 将 $|\boldsymbol{A}|_n$ 化为三角行列式求之.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^2 & 2a\end{vmatrix}_n \xlongequal{r_2-\frac{1}{2}ar_1} \begin{vmatrix}2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3a/2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^2 & 2a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-\frac{2}{3}ar_2}\begin{vmatrix}2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\0 & 3a/2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 4a/3 & \cdots & 0 & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a & 1\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^2 & 2a\end{vmatrix}_n = \cdots$$

$$\xlongequal{r_n-\frac{n-1}{n}ar_{n-1}}\begin{vmatrix}2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\0 & 3a/2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 4a/3 & \cdots & 0 & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n-1}{n-2}a & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{n}{n-1}a & 1\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{n+1}{n}a\end{vmatrix} = (n+1)a^n.$$

1.1.1.5 求行列式方程的根

求行列式方程的根是行列式的一个重要应用，此类问题求解繁简的关键在于计算行列式的过程中(而不是求出行列式的结果后)分解出某些一次因子. 为此常先利用行列式性质化简行列式，将行列式中不含未知元素 x 的项消成零，使零所在的行或列出现 x 的一次因式 $ax+b$，直到行列式化为 x 的二次多项式才展开行列式计算. 有时也可将行列式化成含零子块的四分块矩阵的行列式，利用命题1.1.3.2(见下文)计算或化成三角行列式计算.

例 9 记 $f(x)=\begin{vmatrix}x-2 & x-1 & x-2 & x-3\\2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3\\3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为(　　).

(A)1　　　(B)2　　　(C)3　　　(D)4

解 利用行列式性质将 $f(x)$ 化为含零子块的四分块矩阵的行列式，得到

$$f(x)\xlongequal[i=2,3,4]{c_i+(-1)c_1}\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 0 & -1\\2x-2 & 1 & 0 & -1\\3x-3 & 1 & x-2 & -2\\4x & -3 & x-7 & -3\end{vmatrix}\xlongequal{c_4+c_2}\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 0 & 0\\2x-2 & 1 & 0 & 0\\3x-3 & 1 & x-2 & -1\\4x & -3 & x-7 & -6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x-2 & 1\\2x-2 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x-2 & 1\\x-7 & -6\end{vmatrix}(\text{利用命题 }1.1.3.2)=5x(x-1),$$

由此可知 $f(x)=0$ 的根有 2 个. 仅(B) 入选.

1.1.1.6 由矩阵方程求其矩阵行列式的值

常将所给的矩阵方程化为含所求行列式的矩阵为因子矩阵的矩阵等式，再在此等式两边取行列式，利用命题 1.1.3.1 即可求出所求的矩阵行列式的值.

例 10 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为二阶单位矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$ ______.

解 由 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 得到 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$，两边取行列式得到 $|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=4$，而 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2$，故 $|\boldsymbol{B}|=2$.

例 11 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵，则 $|\boldsymbol{B}|=$ ______.

解一 在所给矩阵方程两边右乘 $\boldsymbol{A}$，由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 得到

$$\boldsymbol{ABA}^*\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{BA}^*\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A},\quad \text{即}\quad |\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}. \tag{①}$$

在式 ① 两端取行列式得到 $\big||\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}\big|=|\boldsymbol{A}|$，即 $|\boldsymbol{A}|^3|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|$，易求得 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=1$，故 $|\boldsymbol{B}|=1/9$.

解二 将原方程恒等变形，使 $\boldsymbol{B}$ 为其因子矩阵：

$$\boldsymbol{ABA}^*-2\boldsymbol{BA}^*=\boldsymbol{E},\quad (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{BA}^*=\boldsymbol{E},$$

故 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}||\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}^*|=1$，而 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{3-1}=|\boldsymbol{A}|^2=9$，$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=1$，所以 $|\boldsymbol{B}|=1/9$.

1.1.1.7 利用矩阵及其运算性质计算行列式

例 12 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$，$|\boldsymbol{A}|<0$，则行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$ ______.

解一 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$，$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，$|\boldsymbol{A}|=\pm 1$，因 $|\boldsymbol{A}|<0$，故 $|\boldsymbol{A}|=-1$，于是 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=-|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$，即 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

解二 利用正交矩阵的性质求之. 因正交矩阵的特征值 λ 必有 $|\lambda|=1$，而 $|\boldsymbol{A}|<0$，故 $|\boldsymbol{A}|=-1$，由命题 1.2.1.7(4)(见下文)知，$\lambda=-1$ 必是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，即 $|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，故

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|(-1)(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})|=(-1)^n|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0.$$

1.1.2 计算代数余子式之和的值

带有代数符号的余子式称为代数余子式. 计算元素的代数余子式时，首先要注意不要漏掉代数余子式所带的代数符号.

1.1.2.1　计算某一行(或列)的元素代数余子式的线性组合的值

尽管直接求出每个代数余子式的值,再求和也是可行的,但一般不用此法,其原因是计算量太大.注意到行列式 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 与 a_{ij} 的值无关,仅与其所在位置有关,利用这一点,可将 D 的某一行(或列)元素的代数余子式的线性组合表示为一个行列式.而构造这一行列式是不难的,只需将其线性组合的系数替代 D 的该行(或该列)元素,所得的行列式 $\widetilde{D}$ 就是所要构造的行列式.再应用下述行列式的展开定理,即命题 1.1.2.1 和命题 1.1.2.2 就可求得 $\widetilde{D}$ 的值.

例 1　设列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}$,则第 4 行各元素的余子式之和的值为______.

解一　设 M_{ij} 为 D 中元素 a_{ij} 的余子式,A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式,则由 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 得到

$$\begin{aligned} M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44} &=-(-1)^{4+1}M_{41}+(-1)^{4+2}M_{42} \\ &\quad +[-(-1)^{4+3}]M_{43}+(-1)^{4+4}M_{44} \\ &=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &=7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-28. \end{aligned}$$

解二　直接计算第 4 行各元素的余子式,然后相加,也可求得上述结果(略).

例 2　设四阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \\ d & b & c & a \\ a & b & d & c \end{vmatrix}$,则 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=$______.

(A) $a+b+c+d$　　　　(B) $(a+b+c+d)^2$

(C) 0　　　　(D) $(a+b+c+d)^3$

解　$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}$ 表示在原行列式中将第 4 列元素换为 1 所得的新行列式的值,即

$$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ c & b & d & 1 \\ d & b & c & 1 \\ a & b & d & 1 \end{vmatrix}.$$

由于第 2 列与第 4 列对应元素成比例,故 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=0$. 仅(C)入选.